УДК 511.35

О СУММИРОВАНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ДЕЛИТЕЛЕЙ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

М.В. Шевцова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: shevtsova@bsu.edu.ru

Аннотация. Найдена асимптотическая формула для сумм значений функций $\tau(n)$ и $\tau_3(n)$ по числам, лежащим в арифметической прогрессии.

Ключевые слова: схема решения тернарной аддитивной задачи, оценка Виноградова-Пойа.

1. Введение. Пусть $\tau_k(n)$ – число решений в целых положительных числах $n_1,\ldots,n_k$ уравнения

$$n_1\ldots n_k = n\,.$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\,,\\ n\equiv l \pmod D}} \tau_k(n)\,. \tag{1}$$

Ряд авторов занимались проблемой получения асимптотической формулы для этой суммы. В работе [1] эта задача решена для $k\geqslant 4$, $(l,D)=1$ и $D\leqslant X^{\alpha/k}$ ($\alpha>0$ – константа):

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\,,\\ n\equiv l \pmod D}} \tau_k(n) = \frac{X}{\varphi(D)}P_{k-1}(\ln X) + R\,, \tag{2}$$

где $P_{k-1}(z)$ – многочлен степени $k-1$ от переменной z с коэффициентами, зависящими от k и D.

Иванец [2] на основе модулярной техники получил асимптотическую формулу в случае
$k=2$, справедливую при $D\leqslant X^{2/3-\varepsilon}$ ($\varepsilon>0$ и произвольно мало), и совместно с Фридлендером, – для $k=3$ [3], справедливую при $D\leqslant X^{\frac{1}{2}+\frac{1}{230}}$.

С ростом параметров k и D задача получения асимптотики усложняется, так как прогрессия становится более редкой. В 1970 году А. А. Карацуба разработал новый метод решения мультипликативных тернарных задач [4]. Применяя этот метод, М. М. Петечук [5] получил для суммы (1) асимптотическую формулу в случае модуля специального вида $D=p_0^m$ ($p_0\geqslant 3$ – фиксированное простое число), где $D\leqslant X^{3/8-\varepsilon}$ ($\varepsilon>0$ – произвольно мало).

В настоящей статье дана элементарная оценка R в формуле (2) для $k=2$, $k=3$ и произвольного модуля D. Она опирается на идею А. А. Карацубы, которая позволяет оценивать остаточный член асимптотической формулы по схеме аддитивной тернарной задачи. Полученный результат формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема.

1. *При $k=2$ формула (2) справедлива для $D \leqslant X^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1}$ ($\varepsilon_1 > 0$ сколь угодно малое число) .*

2. *При $k=3$ формула (2) справедлива для $D \leqslant X^{\frac{4}{9}-\varepsilon_2}$ ($\varepsilon_2 > 0$ сколь угодно малое число) .*

При доказательстве используется следующая

Лемма. (Виноградова-Пойа) *Пусть χ – примитивный характер по модулю D. Тогда справедлива оценка:*

$$\left|\sum_{u\leq a}\chi(u)\right| \leqslant \sqrt{D}\ln D\,.$$

Доказательство см. в [6, с. 123] .

2. Доказательство теоремы. Пусть $k=2$. Тогда из ортогональности характеров имеем:

$$\sum_{\substack{n\leqslant X,\\ n\equiv l \pmod D}}\tau(n) = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \pmod D}\overline{\chi}(l)\sum_{n_1n_2\leqslant X}\chi(n_1n_2)\,.$$

Выделим слагаемое с χ_0:

$$\sum_{\substack{n\leqslant X,\\ n\equiv l \pmod D}}\tau(n) = W + R\,,$$

где

$$W = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\substack{n_1n_2\leqslant X,\\ (n_1,D)=1,\,(n_2,D)=1}} 1\,, \qquad R = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{n_1n_2\leqslant X}\chi(n_1n_2)\,.$$

Тогда

$$W = \frac{X}{\varphi(D)}\prod_{p|D}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2(\ln X + 2\gamma - 1) + O\left(\frac{X^{3/4}}{\varphi(D)}\right)\,,$$

где γ – константа Эйлера .

Оценим сумму R, представив ее как сумму $\ll \ln^2 X$ слагаемых вида:

$$S = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{\substack{N_1<n_1\leqslant 2N_1\\ n_1n_2\leqslant X}}\ \sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\chi(n_1n_2)\,.$$

Пусть $N_1 \geqslant N_2$, $0 < \delta \leqslant \frac{1}{4}$ – вещественное число. Если $N_2 \leqslant X^{\delta}$, то имеем:

$$S \ll \sum_{N_2 < n_2 \leqslant 2N_2} \left| \sum_{\substack{N_1 < n_1 \leqslant 2N_1, \\ n_1 \leqslant X/n_2}} \chi(n_1) \right| \leqslant X^{\delta} \sqrt{D} \ln D \ll \sqrt{D} X^{2\delta} < \frac{X^{1-\delta}}{D}$$

при $D \leqslant X^{\frac{2}{3}-2\delta}$, то есть первое утверждение теоремы для этого случая доказано.

Если $N_2 > X^{\delta}$, то разобьем промежуток суммирования $(N_1, 2N_1]$ на промежутки длины $H' = \frac{N_1}{X^{2\delta}}$. В этом случае получим:

$$S \ll \sum^{N_1/H'} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{H < n_1 \leqslant H+H'} \sum_{\substack{N_2 < n_2 \leqslant 2N_2, \\ n_2 \leqslant X n_1^{-1}}} \chi(n_1 n_2).$$

Заменим условие $n_2 \leqslant X n_1^{-1}$ на условие $n_2 \leqslant X H^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_1:

$$R_1 \leqslant \sum^{N_1/H'} \sum_{H < n_1 \leqslant H+H'} \sum_{\substack{X(H+H')^{-1} < n_2 \leqslant XH^{-1}, \\ n_2 \equiv l n_1^{-1} \pmod D}} 1 + \sum^{N_1/H'} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{H < n_1 \leqslant H+H'} \frac{X}{H^2} H' \ll$$

$$\ll \frac{X}{D} \left(\frac{H'^2}{H^2} \right) \left(\frac{N_1}{H'} \right) \ll \frac{X^{1-2\delta}}{D}.$$

В результате, находим:

$$S \ll X^{2\delta} \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{H < n_1 \leqslant H+H'} \chi(n_1) \right| \right\} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{N_2 < n_2 \leqslant 2N_2} \chi(n_2) \right| + O\left(\frac{X^{1-2\delta}}{D} \right).$$

Применив теперь неравенство Коши, имеем:

$$\sigma = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{N_2 < n_2 \leqslant 2N_2} \chi(n_2) \right| \leqslant (\sigma_1)^{1/2},$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \left| \sum_{N_2 < n_2 \leqslant 2N_2} \chi(n_2) \right|^2.$$

Заметим, что σ_1 равняется числу решений сравнения

$$n_2 \equiv n_2' \pmod D; \quad N_2 < n_2, n_2' \leqslant 2\,N_2.$$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2} \sum_{\frac{N_2-n_2}{D}<d\leqslant\frac{2N_2-n_2}{D}} 1 \ll \sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2} \left(\frac{N_2}{D}+1\right) \ll \frac{N_2^2}{D}+N_2\,.$$

Отсюда

$$\sigma \ll \frac{N_2}{\sqrt{D}}+\sqrt{N_2}\,.$$

Используя лемму , имеем:

$$S \ll X^{2\delta}\sqrt{D}\ln D\left(\frac{N_2}{\sqrt{D}}+\sqrt{N_2}\right).$$

1. Если $N_2\leqslant D$, то $S\ll\sqrt{N_2}\sqrt{D}X^{3\delta}\leqslant DX^{3\delta}$.
2. Если $N_2>D$, то $S\ll\dfrac{N_2}{\sqrt{D}}\sqrt{D}X^{3\delta}<\sqrt{X}X^{3\delta}$.

Выберем $\varepsilon_1=5\delta$, тогда в обоих случаях $S<\dfrac{X^{1-\delta}}{D}$ при $D\leq X^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1}$. Следовательно, первое утверждение теоремы полностью доказано.

Пусть $k=3$. Используя ортогональность характеров и выделяя слагаемое с χ_0, получим:

$$\sum_{\substack{n\leqslant X,\\ n\equiv l \pmod D}} \tau_3(n)=W+R\,,$$

где

$$W=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\substack{n_1n_2n_3\leqslant X,\\ (n_1,D)=1,\,(n_2,D)=1,\,(n_3,D)=1}} 1\,,\qquad R=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{n_1n_2n_3\leqslant X}\chi(n_1n_2n_3)\,.$$

Тогда

$$W=\frac{X}{\varphi(D)}\prod_{p|D}\left(1-\frac{1}{p}\right)^3\left[\frac{\ln^2 X}{2!}+\ln X\left(3\gamma^2-1\right)+\left(3\gamma-3\gamma^2+1\right)\right]+O\left(\frac{X^{5/6}}{\varphi(D)}\right).$$

Оценим сумму R, представив ее как сумму $\ll\ln^3 X$ слагаемых вида:

$$S=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{\substack{N_1<n_1\leqslant 2N_1\\ n_1n_2n_3\leqslant X}}\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\sum_{N_3<n_3\leqslant 2N_3}\chi(n_1n_2n_3)\,.$$

Пусть $N_1 \geqslant N_2 \geqslant N_3$, $0 < \delta \leqslant \dfrac{1}{6}$. Справедливы неравенства: $N_1N_2N_3 \ll X$, $N_1 \geqslant X^{1/3}$.

Если теперь $N_2 \leqslant X^{\delta}$, то $N_3 \leqslant X^{\delta}$. Следовательно, $S \ll \sqrt{D}\ln DX^{2\delta}$, и, очевидно, утверждение теоремы выполняется.

Пусть $N_2 > X^{\delta}$. Тогда, если $N_3 \leqslant X^{\delta}$, доказательство сводится к случаю $k = 2$, рассмотренному выше.

Пусть $N_3 > X^{\delta}$. Как и в случае $k = 2$, разобьем промежуток суммирования $(N_1, 2N_1]$ на промежутки длины $H' = \dfrac{N_1}{X^{2\delta}}$. Далее рассмотрим сумму

$$S' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} \sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2\,,\\ n_2\leqslant X(Hn_3)^{-1}}} \sum_{N_3<n_3\leqslant 2N_3} \chi(n_1n_2n_3)\,.$$

Разобьем промежуток суммирования $(N_3, 2N_3]$ на промежутки длины $W' = \dfrac{N_3}{X^{2\delta}}$. Получим:

$$S' \ll \sum^{N_3/W'} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} \sum_{W<n_3\leqslant W+W'} \sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2,\\ n_2\leqslant X(Hn_3)^{-1}}} \chi(n_1n_2n_3)\,.$$

Заменим условие $n_2 \leqslant X(Hn_3)^{-1}$ на условие $n_2 \leqslant X(HW)^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_2:

$$R_2 \leqslant \sum^{N_3/W'} \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} \sum_{W<n_3\leqslant W+W'} \sum_{\substack{X(H(W+W'))^{-1}<n_2\leqslant X(HW)^{-1},\\ n_2\equiv ln_1^{-1}n_3^{-1} \pmod D}} 1\, +$$

$$+ \sum^{N_3/W'} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} \sum_{W<n_3\leqslant W+W'} \sum_{X(H(W+W'))<n_2\leqslant X(HW)^{-1}} 1 \ll \frac{X^{1-2\delta}}{D}\left(\frac{H'}{H}\right).$$

Таким образом получаем:

$$S \ll X^{4\delta} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \left| \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} \chi(n_1) \right| \left| \sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2} \chi(n_2) \right| \left| \sum_{W<n_3\leqslant W+W'} \chi(n_3) \right| + O\left(\frac{X^{1-2\delta}}{D}\right).$$

Отсюда следует:

$$S \ll X^{4\delta} \max_{\chi\neq\chi_0} \left\{ \left| \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} \chi(n_1) \right| \right\} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \left| \sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2} \chi(n_2) \right| \left| \sum_{W<n_3\leqslant W+W'} \chi(n_3) \right|$$

$$\leqslant X^{4\delta} \max_{\chi\neq\chi_0} \left\{ \left| \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} \chi(n_1) \right| \right\} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \pmod D}\left|\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\chi(n_2)\right|^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \pmod D}\left|\sum_{W<n_3\leqslant W+W'}\chi(n_3)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Применив неравенство Коши, получим оценки:

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \pmod D}\left|\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\chi(n_2)\right|^2 \ll \frac{N_2^2}{D}+N_2\ ;$$

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \pmod D}\left|\sum_{W<n_3\leqslant W+W'}\chi(n_3)\right|^2 \ll \frac{W'^2}{D}+W'.$$

Тогда

$$S\ll X^{4\delta}\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\chi(n_1)\right|\right\}\left(\frac{N_2}{\sqrt{D}}+\sqrt{N_2}\right)\left(\frac{W'}{\sqrt{D}}+\sqrt{W'}\right)\ll$$

$$\ll\sqrt{D}X^{5\delta}\left(\frac{N_2W'}{D}+\frac{N_2\sqrt{W'}}{\sqrt{D}}+\sqrt{N_2W'}\right).$$

Учитывая, что $N_1\geqslant X^{1/3}$, $N_2W'\leqslant X^{2/3}$ и сравнивая каждое слагаемое с величиной $\dfrac{X^{1-\delta}}{D}$, получаем результат: $D\leqslant X^{\frac{4}{9}-\varepsilon_2}$, где $\varepsilon_2=5\delta$. ■

Литература

1. Лаврик А.Ф. Функциональное уравнение для L-функций Дирихле и задача делителей в арифметических прогрессиях // Изв. АН СССР, Серия математическая. – 1966. – 30. – С.433-448.

2. Iwaniec H., Kowalsky E. Analytic number theory / Colloquium Publications, V.53 / American Mathematical Society, 2004.

3. Friedlander J., Iwaniec H. Incomplete Kloosterman sums and divisor problem // Ann. Math. – 1985. – 121. – P.319-350.

4. Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Докл. АН СССР, – 1970. – 192;4. – С.724-727.

5. Петечук М. М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого нечетного числа // Изв. АН СССР, Серия математическая. – 1979. – 43;4. – С.892-908.

6. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / А.А. Карацуба. – 2-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

ON SUMMATION OF DIVISOR FUNCTION VALUES IN ARITHMETIC PROGRESSION

M.V. Shevtsova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: shevtsova@bsu.edu.ru

Abstract. The asymptotic formula of value sums of functions $\tau(n)$ and $\tau_3(n)$ on numbers lying in arithmetic progression is solved.

Key words: plan of ternary additive problem solution, Vinogradov-Poya estimate.