УДК 517.9

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА-КИПРИЯНОВА ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ НОСИТЕЛЕМ

Л.Н.Ляхов, О.И. Попова

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия,
e-mail: lyakhov@box.vsi.ru , studentpmm@gmail.com

Аннотация. Для образа преобразования Радона-Киприянова введены весовые нормы функций определенных на бесконечном полуцилиндре. Доказано, что эти нормы эквивалентны нормам функций в пространстве Соболева-Киприянова.

Ключевые слова: Преобразование Радона-Киприянова, пространство Соболева-Киприянова.

Как известно, преобразование Радона, будучи интегральным преобразованием, улучшает свойства гладкости функции, и это преобразование, рассматриваемое как оператор в L_2, является непрерывным. Но так же известно, что в пространстве L_2 соответствующий обратный оператор не является непрерывным. Поэтому исследование задач компьютерной томографии на основе формул обращения преобразования Радона вынуждает использовать другие функциональные классы. В работах [1] и [2] (в [2] для функций, определенных в R_2) выяснилось, что к таким классам можно отнести пространство функций, определенных на цилиндре с нормой, согласованной с обычной нормой пространства Соболева H^s. Этот класс функций оказался в соответствующем смысле эквивалентным обычному классу Соболева и оказался очень удобным в практических задачах компьютерной томографии (см. книгу Ф. Наттерера [3]).

В [4] введено специальное преобразование Радона[1], приспособленное для работы с весовыми классами функций И.А.Киприянова и соответствующими сингулярными дифференциальными операторами. В данной работе, следуя [1] и [3], вводится весовой функциональный класс на полуцилиндре и приводятся оценки введенной в этом функциональном пространстве нормы преобразования Радона-Киприянова четных гладких функций с ограниченным носителем. Эти нормы выражаются через нормы весового класса Соболева-Киприянова H_γ^s (см. [5], [6]).

Пусть R_n=$\{x=(x_1,\dots,x_n)\}$ – евклидово пространство точек, а R_n^+ – полупространство определенное неравенством $x_1>0$, и пусть $\varnothing^+$ – ограниченная область в R_n^+, прилегающая к гиперплоскости $x_1=0$. Скалярное произведение n-мерных векторов обозначим $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Уравнение произвольной гиперплоскости в R_n, ортогональной

[1] Впоследствии это преобразование стало называться преобразованием Радона-Киприянова. Именно это преобразование изучается в этой статье.

вектору ξ, задается уравнением $\langle \xi, x\rangle = p$. Если $|\xi| = 1$, а $p > 0$, то уравнение плоскости называется *нормальным*.

Через $C^{\infty}_{0,ev}(\varnothing^{+})$ будем обозначать множество бесконечно дифференцируемых функций с носителем в $\varnothing^{+}$, четное, продолжение которых по переменной x_1 является бесконечно дифференцируемой функцией в R_n.

Для произвольной локально интегрируемой в R_n^+ функции четной по переменной x_1 через $\Pi^{\gamma}_{x_1} f(x)$ будем обозначать действие на эту функцию оператора Пуассона по переменной $x_1 \in R_1^+$ по формуле

$$\Pi^{\gamma}_{x_1} g(x) = \Pi^{\gamma}_{x_1} g(x_1, x') = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi} g(x_1 \cos\alpha,\, x')\ \sin^{\gamma-1}\alpha\, d\alpha\,.$$

Здесь и всюду далее предполагается, что γ фиксированное положительное число.

Пусть функция f четная по x_1 абсолютно интегрируемая по R_n^+ с весом x_1^{γ}. Преобразование Радона-Киприянова функции f введено в работе [4] и имеет вид

$$K_{\gamma}[f](\xi; p) = \int_{R_n^+} f(x)\, \Pi^{\gamma}_{x_1}(p - \langle x, \xi\rangle)\, x_1^{\gamma}\, dx\,,$$

где $\langle \xi, x\rangle - p = 0$ – нормальное уравнение плоскости с единичным вектором нормали ξ, проходящей на расстоянии p от начала координат, $\delta(P)$ – обычная[2] δ-функция, сосредоточенная на поверхности $P = 0$. Как видим, функция $K_{\gamma}[f](\xi; p)$ определена на полуцилиндре

$$(\xi; p) \in Z = S_1^+(n) \times R_1\,,$$

где $S_1^+(n) = \{\xi : |\xi| = 1,\ \xi_1 > 0\}$ – единичная полусфера с центром в начале координат, принадлежащая полупространству R_n^+. Размерность цилиндра Z равна n. Отметим, что преобразование K_{γ} создано для работы с сингулярными дифференциальными операторами типа оператора Бесселя. Для той же цели в [5], [6] введены весовые функциональные классы функций Соболева-Киприянова $W^{\ell}_{p,\gamma}$ и, в частности, функциональный класс H^l_{γ}. В связи с этим возникает задача введения нормы для функций, определенных в цилиндре Z так, чтобы она оказалась согласованной с нормой пространства Соболева-Киприянова H^l_{γ}. В данной работе решается именно эта задача в случае, когда носитель функции f ограничен в полупространстве R_n^+. Следуя [1], [3], введем следующим образом подобие весовых киприяновских классов функций $g = g(\xi, p)$, заданных на цилиндре Z. Функция $g(\xi, p) \in H^s_{\gamma}(Z)$, если

$$\|g\|^2_{H^s_{\gamma}(Z)} = \int_{S_1^+} \xi_1^{\gamma} \int_{R_1} (1 + \sigma^2)^s\, |F_{p\to\sigma}[g](\xi; \sigma)|^2\, d\sigma\ dS(\xi) < \infty\,, \tag{1}$$

[2]В теории весовых обобщенных функций построенной на основе весового скалярного произведения (см. [6]) используется специальный класс δ-функций. В определении же преобразование Радона-Киприянова использована δ-функция с носителем на поверхности в R_n, теория описана в книге [7], гл. III, §1.

где через F обозначено преобразование Фурье функций, действующее только по переменной p:

$$F_{p\to\sigma}[g](\xi;\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi;p)e^{-ip\sigma}dp\,.$$

Пусть j_ν – j-функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода J_ν формулой (см. [5], [6])

$$j_\nu(t) = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}J_\nu(t)\,.$$

Смешанное интегральное преобразование Фурье-Бесселя функций, четных по переменной x_1 и интегрируемых по R_n^+, определяется по формуле (см. [6])

$$F_B[f](\eta) = \int\limits_{R_n^+} f(x)\; j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1)\; e^{-i\langle x,\eta\rangle}\; x_1^\gamma\; dx\,.$$

Множество функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p^\gamma} = \left(\int |f(x)|^p\, x_1^\gamma\, dx\right)^{1/p} \qquad (p\geq 1)\,,$$

обозначим $L_p^\gamma(R_n^+)$.

Для функций f и g, принадлежащих $L_2^\gamma(R_n^+)$, справедлива формула順 Планшереля, выражающая инвариантность весового скалярного произведения

$$(f,g)_\gamma = \int f(x)\,g(x)\,x_1^\gamma\,dx$$

при преобразовании Фурье-Бесселя:

$$\int\limits_{R_n^+} F_B[f](\xi)\;\overline{F_B[g](\xi)}\,\xi_1^\gamma\,d\xi = \int\limits_{R_n^+} f(x)\;\overline{g(x)}\,x_1^\gamma\,dx\,.$$

Классический класс функций Соболева-Киприянова определяется с помощью смешанного интегрального преобразования Фурье-Бесселя (см. [6]) и представляет собой множество функций, для которых конечна норма

$$\|f(x)\|^2_{H_\gamma^s(R_n)} = \int_{R_n^+}(1+|\eta|^2)^s|F_B[f](\eta)|^2\eta_1^\gamma d\eta\,.$$

Теорема. *Для всякого s существуют такие положительные константы $c(s,n,\gamma)$, $C(s,n,\gamma)$, что для $f\in C_{0,ev}^\infty(\Omega^+)$*

$$c(\alpha,n,\gamma)\|f\|_{H_\gamma^s(\Omega^+)} \leq \|K_\gamma[f]\|_{H_\gamma^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}(Z)} \leqslant C(s,n,\gamma)\|f\|_{H_\gamma^s(\Omega^n)}\,. \qquad (2)$$

$\square$. Мы исходим из связи преобразований Фурье, Фурье-Бесселя и Радона, полученной в работе [1], которая заключается в следующем равенстве

$$F_B[f](\eta) = F_B[f](\sigma\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[f](\xi;p)\, e^{-i\sigma p}\, dp = F_{p\to\sigma}[K_\gamma[f]](\sigma\xi)\,. \tag{3}$$

Здесь $\sigma \in R_1$, а ξ, вообще говоря, произвольная точка замкнутого полупространства $\overline{R_n^+}$, но далее нам удобно считать её принадлежащей единичной полусфере $\overline{S_n^+}$, поскольку именно так эта переменная используется в определении нормы (1).

Согласно (1) и (3), имеем

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H^{s+(n+\gamma-1)/2}(Z)} =$$

$$= \int\limits_{S_1^+(n)} \xi_1^\gamma \int\limits_{R^1} (1+\sigma^2)^{s+(n+\gamma-1)/2} |F_{p\to\sigma}[K_\gamma[f]](\sigma\,\xi)|^2 d\sigma\, dS(\xi) =$$

$$= \int\limits_{S_1^+(n)} \xi_1^\gamma \int\limits_{R^1} (1+\sigma^2)^{s+(n+\gamma-1)/2}\, |F_B[f](\sigma\,\xi)|^2\, d\sigma\, dS(\xi)\,.$$

Учитывая четность функции $F_B[f](\eta)$ по переменной $\eta_1 = \sigma\,\xi_1$, последнее выражение можно переписать в виде интеграла по полной сфере и тогда

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H^{\alpha+(n+\gamma-1)/2}(Z)} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{S_1(n)} |\xi_1|^\gamma \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\sigma^2)^{\alpha+(n+\gamma-1)/2} |F_B[f](\sigma\xi)|^2\, d\sigma\, dS(\xi)\ . \tag{4}$$

Интеграл по переменной σ представим в виде суммы двух интегралов по полуосям $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$. В первом из них сделаем замену $\sigma = -\sigma_1$. Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{0} (1+\sigma^2)^{s+(n+\gamma-1)/2} |F_B[f](\sigma\xi)|^2 d\sigma =$$

$$= -\int\limits_{+\infty}^{0} (1+\sigma_1^2)^{s+(n+\gamma-1)/2} |F_B[f](-\sigma_1\xi)|^2 d\sigma_1 =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} (1+\sigma^2)^{s+(n+\gamma-1)/2} |F_B[f](-\sigma\xi)|^2 d\sigma\ .$$

Теперь учтем, что интеграл по сфере не изменится, если заменить ξ на $-\xi$ $(|\xi_1|=1)$. Тогда равенство (4) примет вид

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}(Z)}=\int\limits_{S_1(n)}|\xi_1|^\gamma\int\limits_{R_1^+}(1+\sigma^2)^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}|F_B[f](\sigma\xi)|^2 d\sigma\, dS(\xi)=$$

$$=\int\limits_{S_1^+(n)}\xi_1^\gamma\int\limits_{R_1^+}(1+\sigma^2)^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}|F_B[f](\sigma\xi)|^2 d\sigma\, dS(\xi)\,.$$

Здесь уже $\sigma>0$, и поэтому эта величина может играть роль радиуса сферических координат в R_n^+. Предполагая, что в последнем выражении σ и ξ — сферические координаты точки $\eta\in\overline{R_n^+}$, т.е. $\eta=\sigma\,\xi$, $\eta_1\geq 0$, $|\eta|=\sigma$, $|\xi|=1$, перейдем к декартовым координатам в R_n. При этом

$$d\eta=\sigma^{n-1}\,d\sigma\,dS(\xi)\ \Rightarrow\ d\sigma dS(\xi)=\sigma^{1-n}d\eta=|\eta|^{1-n}d\eta\,,$$
$$\sigma^{1-n}\,\xi_1^\gamma=(\sigma\xi_1)^\gamma\,\sigma^{1-\gamma-n}=\eta_1^\gamma\,|\eta|^{1-\gamma-n}\,.$$

Отсюда

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}(Z)}=$$
$$=\qquad 2\int\limits_{R_n^+}\eta_1^\gamma|\eta|^{1-n-\gamma}(1+|\eta|^2)^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}|F_B[f](\eta)|^2\,d\eta\,. \tag{5}$$

Теперь учтем, что в наших рассуждениях[3] $n\geq 1$, $\gamma>0$. Поэтому

$$|\eta|\leqslant(1+|\eta|^2)^{1/2}\ \Longrightarrow\ |\eta|^{1-n-\gamma}\geq(1+|\eta|^2)^{\frac{-n+\gamma-1}{2}}\ .$$

Следовательно

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}(Z)}\geq 2\int\limits_{R_n^+}(1+|\eta|^2)^s|F_B[f](\eta)|^2\,\eta_1^\gamma\,d\eta=2\|f\|_{H_\gamma^s}\ .$$

Это и есть левое неравенство утверждения (2).

Для того, чтобы получить правое неравенство в (2), представим интеграл в правой части равенства (5) в виде суммы интеграла по области $\Omega_1^+=\{|\eta|\leqslant 1\}^+=\{|\eta|\leqslant 1,\ \eta_1>0\}$ и интеграла по области $\Omega_2^+=\{|\eta|\geq 1\}^+=\{|\eta|\geq 1,\ \eta_1>0\}$.

В области Ω_2^+, очевидно, выполняется неравенство $2|\eta|^2\geq(1+|\eta|^2)$, поэтому $\eta|^2\geq 2^{-1}(1+|\eta|^2)$. Следовательно,

$$\int\limits_{\{|\eta|\geq 1\}^+}|\eta|^{1-n-\gamma}(1+|\eta|^2)^{s+(n+\gamma-1)/2}|F_B[f](\eta)|^2\eta_1^\gamma d\eta\leq$$

[3] Интересно отметить, что в классических исследованиях обычно необходимо, чтобы $n\geq 2$, так как преобразование Радона не определено в R_1. Напротив, преобразование Радона-Киприянова в R_1 определено.

$$\leq 2^{(n-1+\gamma)/2} \int\limits_{\{|\eta|\geq 1\}^+} (1+|\eta|^2)^s |F_B[f](\eta)|^2 \eta_1^\gamma d\eta \leqslant$$

$$\leq 2^{(n-1+\gamma)/2} \|f\|^2_{H^s_\gamma(\Omega^n)} \,. \tag{6}$$

Теперь перейдем к оценке этого же интеграла в области

$$\Omega_1^+ = \{|\eta| \leqslant 1\}^+ = \{|\eta| \leqslant 1,\ \eta_1 > 0\}.$$

В этой области функция $|\eta|^{1-n-\gamma}(1+|\eta|^2)^{s+(n+\gamma-1)/2}\,\eta_1^\gamma$ имеет особенность (только в начале координат, поскольку область ограничена). Но переходя к сферическим координатам в интеграле по $\{|\eta| \leqslant 1\}^+$ от этой функции, легко установить его сходимость. Введем обозначение

$$\int\limits_{\Omega_1^+} |\eta|^{1-n-\gamma}(1+|\eta|^2)^{s+(n+\gamma-1)/2}\,\eta_1^\gamma d\eta = c_1(s,n,\gamma)\ .$$

Имеем

$$\int\limits_{\Omega_1^+} |\eta|^{1-n-\gamma}(1+|\eta|^2)^{s+(n+\gamma-1)/2} |F_B[f](\eta)|^2 \eta_1^\gamma d\eta \leqslant$$

$$\leqslant c_1(s,n,\gamma)\ \sup_{\overline{\Omega_1^+}} |F_B[f](|\eta)|^2\ . \tag{7}$$

Для доказательства теоремы остается оценить величину

$$\sup_{\overline{\varnothing_1^+}=|\eta|\leq 1,\,\eta_1\geq 0} |F_B[f](\eta)|^2$$

через норму функции f в пространстве Соболева-Киприянова H^s_γ.

Пусть функция $\chi \in C^\infty_{0,ev}(R^n)$ и равна 1 на носителе $\operatorname{supp} f = \Omega^+ \in R^+_n$. Положим

$$\chi_\eta(x) = e^{-i\langle x',\eta'\rangle} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1)\ \chi(x).$$

Тогда

$$F_B[f](\eta) = \int\limits_{R^+_n} f(x)\ j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1)\ e^{-i\langle x,\eta\rangle}\ x_1^\gamma\ dx = \int\limits_{R^+_n} f(x)\ \chi_\eta(x)\ x_1^\gamma\ dx\,.$$

По условию теоремы функция f принадлежат весовому пространству Лебега $L^\gamma_p(R^+_n)$ $(p \geq 1)$, но то же самое можно сказать про функцию χ_η, поскольку она представляет собой произведение бесконечно дифференцируемых функций, одна из которых имеет ограниченный носитель. Поэтому к весовому интегралу от произведения функций, каждая из которых принадлежит L^γ_2, можно применить формулу Планшереля для смешанного преобразования Фурье-Бесселя. В результате получим равенство

$$F_B[f](\eta) = \int\limits_{R^+_n} \chi_\eta(x) f(x) x_1^\gamma dx = \int\limits_{R^n} F_B[\chi_\eta](\xi) F_B[f](\xi)\xi_1^\gamma d\xi =$$

$$= \int\limits_{R_n^+} F_B[\chi_\eta](\xi)\,(1+|\xi)|^2)^{-s/2}(1+|\xi)|^2)^{s/2}F_B[f](\xi)\xi_1^\gamma d\xi\,.$$

К этому выражению применим неравенство Коши-Буняковского, тогда

$$|F_B[f](\eta)|| \leqslant \left(\int\limits_{R_n^+}(1+|\xi|^2)^{-s}|F_B[\chi_\eta](\xi)|^2\,\xi_1^\gamma\,d\xi\right)^{1/2} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{R_n^+}(1+|\xi|^2)^{s}|F_B[f](\xi)|^2\,\xi_1^\gamma\,d\xi\right)^{1/2} = \|\chi_\eta\|_{H_\gamma^{-s}(R_n^+)}\|f\|_{H_\gamma^s(\Omega^+)}\,.$$

Рассмотрим первый из этих интегралов. Функция $F_B[\chi_\eta]$ имеет следующий вид

$$F_B[\chi_\eta](\xi) = \int\limits_{R^n} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\xi_1)e^{-i\langle x',\eta'\rangle}e^{-i\langle x',\xi'\rangle}\chi(x)x_1^\gamma dx\,.$$

Теорема сложения для j-функций Бесселя утверждает, что (см. книгу [6]) $j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\xi_1) = T_\xi^\eta j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)$, где через $T_{\eta_1}^{\xi_1}$ обозначен обобщенный сдвиг, действие которого по переменной x_1 определяется по формуле

$$f\to T_{x_1}^{y_1}f(x_1,x') =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\,\Gamma(1/2)}\int\limits_0^\pi f(\sqrt{x_1^2+y_1^2-2x_1y_1\cos\alpha},\,x')\,\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\,.$$

Таким образом,

$$F_B[\chi_\eta](\xi) = \int\limits_{R^n} T_{\eta_1}^{\xi_1}j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1)e^{-i\langle x',\eta'+\xi'\rangle}\chi(x)x_1^\gamma dx =$$

$$= T_{\eta_1}^{\xi_1}\widetilde{\chi}(\eta_1,\eta'+\xi') = (T^\eta\widetilde{\chi})(\xi)\,.$$

Здесь через $\widetilde{\chi}$ обозначено действие смешанного преобразования Фурье-Бесселя на функцию χ, а оператор T^η – смешанный обобщенный сдвиг (по первой переменной действует обобщенный сдвиг, а по оставшимся – обычный).

Поскольку функция χ четная по x_1, бесконечно дифференцируема и имеет ограниченный носитель, то ее преобразование Фурье-Бесселя принадлежит подпространству $S_{ev}(R_n^+)$ пространства Шварца основных функций $S(R_n)$, убывающих быстрее любой степени модуля переменной. Учитем, что обобщенный сдвиг, представляя собой интегральный оператор, является сглаживающим. Поэтому в равенстве

$$\|\chi_\eta\|^2_{H_\gamma^{-s}(R_n^+)} = \int\limits_{R^n}|T^\eta\hat{\chi}(\xi)|^2\,(1+|\xi|^2)^{-s}\,\xi_1^\gamma\,d\xi\,.$$

функция $T^\eta\hat{\chi} \in S_{ev}$, но при этом функция $(1+|\xi|^2)^{-s}$ при любом действительном s представляет собой мультипликатор пространства S_{ev}. Следовательно, существует и конечен

$$\sup_{\eta\in\overline{\varnothing_1^+}} \|T^\eta\chi\|_{H_\gamma^{-s}} = c_2(s,n,\gamma)\ . \tag{8}$$

Из (6), использую (7) и (8), получим

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H_\gamma^{s+(n+\gamma-1)/2}(Z)} \leq (2^{(n+\gamma-1)/2} + c_1(s,n,\gamma)\, c_2^2(s,n,\gamma)\|f\|^2_{H_\gamma^s(\Omega^+)}\ .$$

Это и есть правое неравенство для K_γ. ■

Отметим, что для целых $s \geq 0$ норма

$$\|f(x)\|^2_{H_\gamma^s(R_n)} = \int_{R_n^+}(1+|\eta|^2)^s|F_B[f](\eta)|^2\eta_1^\gamma d\eta\,.$$

эквивалентна следующей

$$\|f(x)\|^2_{\tilde{H}_\gamma^s(R_n)} = \int\limits_{R_n^+}\sum_{2l_1+|l'|\leqslant s}(B_{x_1}^{l_1}D_{x'}^{l'}f)(x)x_1^\gamma dx\,,$$

где $B_{x_1} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\gamma}{x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ – сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, $D_{x'}^{l'} = \left(\dfrac{\partial^{l_2}}{\partial x_2^{l_2}},\ldots,\dfrac{\partial^{l_n}}{\partial x_n^{l_n}}\right)$, $l'=(l_2,\ldots,l_n)$, $|l'| = l_2+\ldots+l_n$.

Если учесть, что при целых s $\sigma^s F[g](\sigma,\theta) = F[D_p^s g(p,\theta)](\sigma,\theta)$, то норма $\|\cdot\|_{H_\gamma^s(Z)}$ функций, определенных на полуцилиндре, эквивалентна норме

$$\|g\|^2_{\tilde{H}^s\gamma} = \int\limits_{S_1^+(n)}\theta_1^\gamma\int\limits_{R_1}\sum_{l\leqslant s}|D_p^l g(o,\theta)|^2\,dp\ .$$

Таким образом, для целых значений $s \geq 0$, как следствие доказанной теоремы, мы получим неравенства

$$c\|f\|_{\tilde{H}_\gamma^s(\Omega+)} \leq \|K_\gamma[f]\|_{\tilde{H}_\gamma^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}(Z)} \leqslant C\|f\|_{\tilde{H}_\gamma^s(\Omega^n)}\,.$$

Интересно, что здесь в средней части находятся весовые L_2^γ-нормы обычных производных, а крайние члены неравенства содержат весовые L_2^γ-нормы сингулярных B-производных. С другой стороны, это и не удивительно, поскольку известно ([8]), что смешанные производные типа $B_{x_1}^{l_1}D_{x'}^{l'}g(x)$ при $s = 2l_1+|l'|$ связаны соотношением $\xi_1^{2l_1}(\xi')^{l'}D_p^s K_\gamma(p;\xi) = K_\gamma[B_{x_1}^{l_1}D_{x'}^{l'}g(x)](p;\xi)$.

Литература

1. Smith K.T. Practical and mathematical aspects of the problem of the reconstructing a function from radiographs // Bull. AMS. – 1977. – 83. – P.1227-1270.

2. Natterer F. A Sobolev space analysis of picture reconstruction // SIAM J. Appl. Math. – 39 – P.402-411.

3. Наттерер, Ф. Математические аспекты компьютерной томографии / Ф. Наттерер. – М.: Мир, 1990. – 280 с.

4. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона // ДАН. – 1998. – 360;2. – С.157-160.

5. Киприянов, И.А. Преобразование Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. МИРАН. – 1967. – 89. – С. 130-213.

6. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. – М.: Наука, 1997. – 200 с.

7. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 470 с.

8. Ляхов, Л.Н. Преобразование Киприянова-Радона // Тр. МИРАН. – 2005. – 248. – С.153-163.

WEIGHT ESTIMATES FOR TRANSFORMATION OF RADON-KIPRIYANOV's FUNCTIONS WITH BOUNDED SUPPORT

L.N Lyakhov, O.I. Popova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia,
e-mail: lyakhov@box.vsi.ru , studentpmm@gmail.com

Abstract. For the image of Radon-Kipriyanov's transformation are introduced weight norms of functions defined on infinite half-cylinder. It is proved that these norms are equivalent to norms in Sobolev-Kipriyanov's space.

Key words: Radon-Kipriyanov's transformation, Sobolev-Kipriyanov's space.