УДК 517.9

К ИССЛЕДОВАНИЯМ ЛИНЕЙНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ Т.ПУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДА

И.П. Половинкин

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия;
Старооскольский технологический институт,
р-н Макаренко, 42, Старый Оскол, 309516, Россия, e-mail: polovinkin@yandex.ru

Аннотация. Получена двухточечная теорема о среднем значении и её обращение для гармонической функции. Доказаны двухточечные теоремы о среднем значении для некоторых линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрены их приложения к исследованию линейной непрерывной модели Т. Пу распределения дохода. В работе рассмотрена ситуация выполнения принципа Гюйгенса для решения линейного уравнения Пу распределения дохода.

Ключевые слова: теорема о среднем значении, формула среднего, принцип Гюйгенса.

1. Вывод линейного уравнения дохода. Следуя [1], обозначим через $Y = Y(x,y,t)$ отклонение уровня дохода от стационарного состояния в точке (x,y) в момент времени t. Будем считать, что сбережения S находятся в заданном отношении $s = s(t)$ к доходу. Пусть $v = v(t)$ означает отношение между основным капиталом K и доходом. Инвестиции, обозначаемые I, по определению являются темпами изменения основного капитала. Таким образом,

$$I = v\dot{Y}, \qquad S = s\dot{Y},$$

где точка сверху обозначает производную по времени t. Будем также предполагать, что существует некоторый адаптивный процесс, при котором доходы возрастают пропорционально разности инвестиций и сбережений: $\dot{Y} \sim (I - S)$. Подобную задержку предположим и при регулировании инвестиций, так что $\dot{I} \sim (v\dot{Y} - I)$. Итак, модель строится из следующих предположений:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = I - sY\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = v\frac{\partial Y}{\partial t} - I\,. \tag{2}$$

Взяв производную по времени от обеих частей равенства (1), получим:

$$\ddot{Y} = \dot{I} - \dot{s}Y - s\dot{Y}. \tag{3}$$

Выражая $\dot{I}$ из (2) и подставляя в (3), получим:

$$\ddot{Y} = (v - s)\dot{Y} - \dot{s}Y - I. \tag{4}$$

Теперь, выражая I из (1), мы окончательно получим уравнение дохода:

$$\ddot{Y} - (v - s - 1)\dot{Y} + (s + \dot{s})Y = 0\,. \tag{5}$$

В уравнение (5) географические координаты входят как простые параметры, так что оно является обыкновенным дифференциальным уравнением. Если же к предположениям (1) – (2) добавить предположение о межрегиональной торговле, то в первом приближении активное торговое сальдо определяется выражением

$$m\Delta Y = m\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right), \tag{6}$$

где m – коэффициент пропорциональности, характеризующий склонность к импортированию. При этих предположениях уравнение (5) заменится уравнением дохода в частных производных:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - (v-1-s)\frac{\partial Y}{\partial t} + (s+\dot{s})Y = m\Delta Y\,. \tag{7}$$

Если коэффициенты s, v постоянны, то уравнение (7) примет вид

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - (v-1-s)\frac{\partial Y}{\partial t} + sY = m\Delta Y. \tag{8}$$

2. Теорема о среднем значении для волнового уравнения А.В. Бицадзе и А.М. Нахушева. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ пару точек $(X^{(j)}, t^{(j)})$, $j=1,2$, где $X^{(j)} = (x_1^{(j)}$, $x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$, $j=1,2,$, удовлетворяющих условию

$$|X^{(1)} - X^{(2)}| < |t^{(1)} - t^{(2)}|\,. \tag{9}$$

Построим матрицу A по следующему правилу. Зафиксируем некоторый индекс $i \in \{1,\ldots,n\}$ и положим

$$a_{ij} = \frac{x_j^{(1)} - x_j^{(2)}}{|X^{(1)} - X^{(2)}|}\,, \qquad j = 1,\ldots,n\,.$$

Остальные элементы этой матрицы достроим из условий $AA^T = I$, $\det A = 1$, где A^T – матрица, транспонированная к матрице A, I – единичная матрица. Пусть A_i обозначает матрицу, полученную из матрицы заменой i-го столбца нулями. Обозначим через P величину, определяемую равенством

$$2P = \sqrt{(t^{(1)} - t^{(2)})^2 - |X^{(1)} - X^{(2)}|^2}\,. \tag{10}$$

Следуя [2] – [4], введем оператор усреднения S_t по формуле:

$$S_t = S_t^n v = \gamma(n)\int\limits_{|\xi|=t} v\,(\eta,\,\tau)\;d\omega_\xi\,, \quad |X^{(1)} - X^{(2)}| > 0\,, \tag{11}$$

где $\gamma(n) = \sqrt{\pi^{1-n}}$,

$$\eta = \frac{|t^{(1)} - t^{(2)}|\,\xi_i(X^{(1)} - X^{(2)})}{|X^{(1)} - X^{(2)}|\sqrt{(t^{(1)} - t^{(2)})^2 - |X^{(1)} - X^{(2)}|^2}} + \frac{X^{(1)} + X^{(2)}}{2} + A_i\xi\,,$$

$$\tau = \frac{t^{(1)} + t^{(2)}}{2} - \frac{|X^{(1)} - X^{(2)}|\xi_i}{\sqrt{(t^{(1)} - t^{(2)})^2 - |X^{(1)} - X^{(2)}|^2}}\,,$$

$d\omega_\xi$ – элемент площади поверхности сферы $|\xi| = t$ в $\mathbb{R}^n$. При $X^{(1)} = X^{(2)}$ оператор S_t определим формулой

$$S_t = S_t^n v = \gamma(n) \int\limits_{|\xi|=t} v \left(X^{(2)} + \xi \, \frac{t^{(1)} + t^{(2)}}{2} \right) d\omega_\xi \, . \tag{12}$$

Далее введем оператор B_t по формулам

$$B_t = B_t^n \, v = t \left(\frac{\partial}{2t\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \, t^{-1} \, S_t v, \; n = 1(\mathrm{mod}\, 2)\, , \tag{13}$$

$$B_t = B_t^n \, v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{2t\partial t} \right)^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^t \frac{S_t v \, d\tau}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \, , \quad n = 0(\mathrm{mod}\, 2)\, , \tag{14}$$

Теорема 1 (теорема о среднем для волнового уравнения [2] – [4]). *Если функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ является регулярным решением в области $\Omega \in R^{n+1}$ волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}\, , \tag{15}$$

то для любой пары точек $(X^{(j)}, t^{(j)})$, $j = 1, 2,$, удовлетворяющих условию (9), и таких, что область, ограниченная пересечением конусов с вершинами $(X^{(j)}, t^{(j)})$, $j = 1, 2,$, вместе с замыканием лежит в Ω, имеет место равенство

$$v(X^{(1)}, t^{(1)}) + v(X^{(2)}, t^{(2)}) = B_P \, v. \tag{16}$$

Определим число l формулами

$$l = \max\{n - 1, \; \frac{n+3}{2}\}\, , \quad n = 1(\mathrm{mod}\, 2)\, , \tag{17}$$

$$l = \max\{n, \; \left[\frac{n+3}{2} + 1 \right] \}\, , \quad n = 0(\mathrm{mod}\, 2)\, .$$

Теорема 2 (обратная теорема о среднем для волнового уравнения [5]). *Пусть функция $v(x,t) \in C^l(\mathbb{R}^{n+1})$ для любой пары точек $(X^{(j)}, t^{(j)})$, $j = 1, 2$, которые подчиняются неравенству (9), удовлетворяет соотношению (16). Тогда она является регулярным решением волнового уравнения (15) в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

3. Двухточечная теорема о среднем для гармонической функции. Пусть теперь функция $u(x)$ удовлетворяет в окрестности шара $|x| < r$ уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0\, . \tag{19}$$

В соответствии с методом спуска Адамара ведем фиктивную переменную t, полагая

$$v(x,t) = v(x,0) = u(x)\, , \quad |x| < r\, , \quad t \in R\, . \tag{20}$$

Положим, не умаляя общности,

$$t_1 = 0\, , \quad t_2 = r > 0\, . \tag{21}$$

Функция $v(x,t)$ будет удовлетворять уравнению (15), а значит, для нее справедлива формула среднего (16), где, с учетом наших предположений, оператор S_t будет действовать следующим образом:

$$S_t = S_t^n u = \gamma(n) \int\limits_{|\xi|=t} u\,(\eta)\; d\omega_\xi\,, \quad |X^{(1)} - X^{(2)}| > 0\,, \tag{22}$$

$$S_t = S_t^n u = \gamma(n) \int\limits_{|\xi|=t} u\left(X^{(2)} + \xi\right)\, d\omega_\xi\,, \qquad X^{(1)} = X^{(2)}\,, \tag{23}$$

причем формула (16) преобразуется к виду

$$u(X^{(1)}) + u(X^{(2)}) = B_P u\,. \tag{24}$$

Выясним геометрический смысл формулы (24). Положим, не ограничивая общности,

$$X^{(1)} = \alpha = (\alpha_1, 0, \ldots, 0)\,, \quad X^{(2)} = 0 = (0, 0, \ldots, 0)\,. \tag{25}$$

В (22) интегрирование ведется по сфере $\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2 = t^2$. Произведем замену первой переменной

$$\nu = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{r\xi_1}{\sqrt{r^2 - \alpha_1^2}}\;. \tag{26}$$

Выражая ξ_1 через ν из формулы (26), получим

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{r^2 - \alpha_1^2}}{r}\left(\nu - \frac{\alpha_1}{2}\right)\,. \tag{27}$$

Подставляя выражение (27) в уравнение сферы $|\xi| = P$, получим в новых переменных $\nu, \xi_1, ..., \xi_n$ уравнение эллипсоида Φ:

$$\frac{4(\nu - \frac{\alpha_1}{2})}{r^2} + \frac{4(\xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)}{r^2 - \alpha_1^2} = 1\,. \tag{28}$$

Интегрирование в формуле (24) ведется по эллипсоиду Φ, заданному уравнением (28). Таким образом, доказано следующее утверждение

Теорема 3 (двухточечная теорема о среднем для гармонической функции). *Пусть область $\Omega \subset R^n$, в которой функция $u(x)$ гармонична, содержит точки $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, $|X^{(1)} - X^{(2)}| < r$. Пусть область, ограниченная эллипсоидом Φ, определенным* (*подходящей системе координат*) *уравнением* (28), *вместе со своим замыканием лежит в области Ω. Тогда справедлива двухточечная формула среднего значения* (24).

Пусть

$$|S_n| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2) \tag{29}$$

— площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4. *При $X^{(1)} = X^{(2)} = X^{(0)}$ в случае $n = 1(\mathrm{mod}\,2)$ формула среднего* (24) *совпадает с известной формулой среднего Гаусса для гармонической функции для сферы радиуса $r/2$:*

$$u(X^{(0)}) = \frac{1}{|S_n|\delta^{n-1}} \oint\limits_{|\xi - X^{(0)}|=\delta} u(\xi)\, d\omega_\xi\,, \qquad \delta = r/2\,. \tag{30}$$

□ Снова воспользуемся методом спуска Адамара по пpеременной t с помощью вспомогательной функции, определенной формулой (20). Выберем произвольно точку $(X^{(0)};t^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и положим $X^{(1)}=X^{(2)}=X^{(0)}$, $t^{(1)}=t^{(0)}-\delta$, $t^{(2)}=t^{(0)+}\delta$, где $\delta=r/2$. Тогда $P=\delta$. Формула (16) примет следующий вид:

$$v(X^{(0)};t^{(0)}-\delta)+v(X^{(0)};t^{(0)}+\delta)=$$

$$=\sqrt{\pi^{1-n}}P\left(\frac{\partial}{2P\partial P}\right)^{\frac{n-1}{2}}P^{n-2}\int\limits_{|\xi|=1}v(X^{(0)}+P\xi;t^{(0)})\,d\omega_\xi\,. \tag{31}$$

Левая часть равенства (31) равна $2u(X^{(0)})$. Полагая

$$Q=Q(P,u)=\int\limits_{|\xi|=1}u(X^{(0)}+P\xi)\,d\omega_\xi\,, \tag{32}$$

применим к правой части формулы (31) тождество

$$P\left(\frac{\partial}{P\partial P}\right)^{\frac{n-1}{2}}(P^{n-2}Q)=\sum_{s=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2^{\frac{n-1}{2}-s}C^s_{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(s+1/2)}P^{2s}\left(\frac{\partial}{P\partial P}\right)^s Q\,, \tag{33}$$

где

$$C^m_n=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

суть биномиальные коэффициенты, $\Gamma(t)$ – гамма-функция Эйлера. После этого получим

$$2u(X^{(0)})=\frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi^n}}Q(P,u)+\frac{\Gamma(n/2)(n-1)}{2\sqrt{\pi^n}}P^2\left(\frac{\partial}{P\partial P}\right)Q(P,u)+$$

$$+\sqrt{\pi^{1-n}}\sum_{s=2}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2^{\frac{n-1}{2}-s}C^s_{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(s+1/2)}P^{2s}\left(\frac{\partial}{P\partial P}\right)^s Q(P,u)\,. \tag{34}$$

Первое слагаемое в правой части как раз и дает нужную величину:

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi^n}}Q(P,u)=\frac{2}{|S_n|P^{n-1}}\int\limits_{|\xi-X^{(0)}|=P}u(\xi)\,d\omega_\xi\,. \tag{35}$$

Далее, применяя формулу Гаусса-Остроградского, в силу гармоничности функции u, будем иметь

$$\frac{\Gamma(n/2)(n-1)}{2\sqrt{\pi^n}}P\frac{\partial}{\partial P}Q(P,u)=\frac{n-1}{|S_n|P^{n-2}}\int\limits_{|\xi-X^{(0)}|\le P}\Delta u(\xi)\,d\xi=0\,. \tag{36}$$

Пусть ν_ξ – единичный вектор внешней нормали к сфере $|\xi-X^{(0)}|=P$. Имеем:

$$\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial P}Q(P;u)=\frac{1}{P}\int\limits_{|\xi|=1}\sum_{j=1}^n\xi_j\frac{\partial u}{\partial\xi_j}(X^{(0)}+P\xi)\,d\omega_\xi=$$

$$= \frac{1}{P^n} \int\limits_{|\xi - X^{(0)}| = P} \frac{\partial v}{\partial \nu_\xi}(\xi, t^{(0)}) \,, \tag{37}$$

Применим теперь к равенству (37) формулу Гаусса-Остроградского:

$$\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial P} Q(P; u) =$$

$$\frac{1}{P^n} \int\limits_{|\xi - X^{(0)}| \le P} \Delta_\xi u(\xi)\, d\xi = \frac{1}{P^n} \int\limits_0^P d\rho \int\limits_{|\xi - X^{(0)}| = \rho} \Delta_\xi u(\xi)\, d\omega_\xi =$$

$$= \int\limits_0^1 \rho_1^{n-1} Q(\rho_1 P; \Delta u)\, d\rho_1 \,. \tag{38}$$

Положим

$$Q_s(P; u) =$$

$$= \int\limits_0^1 \rho_1^{n+2s-3}\, d\rho_1 \ldots \int\limits_0^1 \rho_{s-1}^{n+1}\, d\rho_{s-1} \int\limits_0^1 \rho_s^{n-1} Q(\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s P; u)\, d\rho_s \,.$$

Последовательное применение формулы (38) приводит к соотношению

$$\left(\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial P}\right)^s Q(P; u) = Q_s(P; \Delta^s u) = 0 \,. \quad \blacksquare \tag{39}$$

Отметим, что при доказательстве теоремы 4 мы воспользовались техникой, примененной при доказательстве теоремы 2 в работе [5], несколько изменив ее. Используя эту технику, мы в состоянии доказать утверждение, обратное к теореме Асгейрссона (см. [6]).

Введем обозначения сферических средних

$$\mu(x, y, r) = \int\limits_{|\xi|=1} v(x + r\xi, y)\, d\frac{\omega_\xi}{|S_n|} \,, \qquad \theta(x, y, r) = \int\limits_{|\xi|=1} v(x, y + r\xi)\, d\frac{\omega_\xi}{|S_n|} \,, \tag{40}$$

где $v = v(x, y) = v(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$.

Теорема 5 (обратный принцип Асгейрссона). *Пусть функция $v = v(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$ для всякой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ и для любого $r > 0$ удовлетворяет равенству*

$$\mu(x, y, r) = \theta(x, y, r) \,. \tag{41}$$

Тогда она является регулярным в $\mathbb{R}^{2n}$ решением ультрагиперболического уравнения

$$\Delta_x v = \Delta_y v \,, \tag{42}$$

где $\Delta_x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

□ Доказательство проводится аналогично предыдущему. Выражая в формуле (41) сферические средние (40) через функцию $v(x, y)$ из формулы Грина, умножая полученное равенство на n/r^2 и переходя к пределу при $r \to 0$, получим равенство (42) в точке (x, y).■

3. Формула среднего для телеграфного уравнения. Пусть функция $\overline{u}(x_1, x_2, t)$ является регулярным решением гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_2^2} + c^2 \overline{u}\ . \tag{43}$$

Тогда функция

$$v(x_1, x_2, x_3, t) \equiv e^{cx_3} \overline{u}(x_1, x_2, t) \tag{44}$$

является регулярным решением трехмерного волнового уравнения (15) ($n = 3$), что проверяется непосредственной подстановкой [7]. Теперь примем во внимание равенство (43), учитывая которое, мы из (15) получим:

$$e^{cx_3^{(1)}} \overline{u}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, t^{(1)}) + e^{cx_3^{(2)}} \overline{u}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, t^{(2)}) = B_P\left(e^{cx_3} \overline{u}\right). \tag{45}$$

Далее, не умаляя общности (к общему случаю можно перейти с помощью надлежащей замены переменных), мы для простоты выкладок будем считать,что $x_1^{(1)} = \alpha > 0$, $x_2^{(1)} = x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = x_3^{(1)} = x_3^{(2)} = 0$. Тогда действие оператора S_t может быть представлено в виде

$$S_t v = \frac{1}{\pi} \oiint\limits_{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=t^2} e^{c\xi_3} \overline{u} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{r\xi_1}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}}, \xi_2, \frac{r}{2} - \frac{\alpha \xi_1}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}} \right) d\omega_\xi\,, \tag{46}$$

где $r = |t^{(1)} - t^{(2)}|$. Выражая стандартным образом поверхностный интеграл в равенстве (46) через повторный, мы получим

$$\overline{u}(0,0,0) + \overline{u}(\alpha, 0, r) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \frac{\rho \operatorname{ch}(c\sqrt{r^2 - \rho^2})}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{-\pi}^{\pi} u \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\rho \cos\theta}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}}, \rho \sin\theta, \frac{r}{2} - \frac{\alpha \rho \cos\theta}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}} \right) d\theta\, d\rho \right)\,, \tag{47}$$

где $t = P = \sqrt{r^2 - \alpha^2}/2$. Формула (47) представляет собой аналог формулы среднего (16) для уравнения (43).

4. Двухточечная теорема о среднем для уравнения Гельмгольца. Пусть функция $u(x_1, x_2)$ является регулярным решением уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + c^2 u = 0 \tag{48}$$

в $\mathbb{R}^2$. Введем фиктивные переменные x_3 и t и положим

$$\overline{u}(x_1, x_2, t) \equiv u(x_1, x_2)\,,$$

$$v(x_1, x_2, x_3, t) \equiv e^{cx_3} \overline{u}(x_1, x_2, t)\,. \tag{49}$$

Тогда функция $\overline{u}(x_1, x_2, t)$ является регулярным решением гиперболического уравнения (43), а функция $v(x_1, x_2, x_3, t)$ является регулярным решением трехмерного волнового уравнения (15). Отсюда мы немедленно получаем:

$$u(0,0) + u(\alpha, 0) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\rho\,\mathrm{ch}(c\sqrt{r^2-\rho^2})}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}, \rho\sin\theta\right)d\theta\,d\rho\right), \tag{50}$$

где $t = P = \sqrt{r^2-\alpha^2}/2$.

5. Формула среднего для уравнения дохода с постоянными темпами инвестиций и сбережений. В уравнении (8) можно без ограничения общности положить $m = 1$. Пусть $\mu = s + 1 - v$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \mu\frac{\partial Y}{\partial t} + sY = \Delta Y\,. \tag{51}$$

Замена функции

$$Y = e^{-\mu t/2}\overline{u} \tag{52}$$

сведет уравнение (51) к телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_2^2} + c^2\overline{u}\,, \tag{53}$$

где $c^2 = \mu^2/2 - s$.

Решение $\overline{u}(x, y, t)$ уравнения (53) удовлетворяет формуле среднего значения

$$\overline{u}(0,0,0) + \overline{u}(\alpha, 0, r) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\rho\,\mathrm{ch}(c\sqrt{r^2-\rho^2})}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{-\pi}^{\pi} u\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}, \rho\sin\theta, \frac{r}{2} - \frac{\alpha\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}\right)d\theta\,d\rho\right), \tag{54}$$

где $t = P = \sqrt{r^2-\alpha^2}/2$, $|\alpha| < r$, Учитывая (52), для решения уравнения (51) мы окончательно получим следующую формулу среднего значения:

$$Y(0,0,0) + e^{\mu r/2}Y(\alpha, 0, r) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\rho\,\mathrm{ch}(c\sqrt{r^2-\rho^2})}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\mu\left(\frac{r}{4} - \frac{\alpha\rho\cos\theta}{2\sqrt{r^2-\rho^2}}\right)} Y\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}, \rho\sin\theta, \frac{r}{2} - \frac{\alpha\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}\right)d\theta\,d\rho\right), \tag{55}$$

где $t = \sqrt{r^2 - \alpha^2}/2$.

Формула (55) устанавливает связь между стоящей слева линейной комбинацией доходов в близких точках в различные моменты времени и динамикой изменения доходов в некоторой окрестности этих точек в течение рассматриваемого промежутка времени.

6. Стационарное линейное уравнение дохода. В рамках модели, рассматриваемой в разделах 1, 5, рассмотрим стационарное распределение дохода. Это означает, что в уравнении (51) решение Y не зависит от времени t. Тогда это уравнение примет вид

$$\Delta Y - sY = 0\,. \tag{56}$$

Применяя, как и в разделе 3, метод спуска Адамара по переменной t, мы из формулы (55) получим двухточечную формулу среднего для стационарного уравнения распределения дохода (56):

$$Y(0,0) + e^{\mu r/2}Y(\alpha,0) = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\rho\,\mathrm{ch}(c\sqrt{r^2-\rho^2})}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\mu(\frac{r}{4}-\frac{\alpha\rho\cos\theta}{2\sqrt{r^2-\rho^2}})}Y\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}},\rho\sin\theta\right)d\theta\,d\rho\right), \tag{57}$$

где $t = \sqrt{r^2 - \alpha^2}/2$.

Эта формула выражает связь между дисконтированными доходами в двух точках и распределением дохода в окрестности (специального вида) этих точек.

7. О принципе Гюйгенса в модели Пу. Вернемся к случаю, когда темпы сбережений и инвестиций зависят от времени, то есть к уравнению (7) Рассмотрим задание темпов инвестиций и сбережений специальным образом:

$$s = s(t) = s_0 e^{-t}\,, \tag{58}$$

$$v = v(t) = s_0 e^{-t} + 1 - \frac{1}{t}\,. \tag{59}$$

При таком выборе темпов инвестиций и сбережений уравнение (7)

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial Y}{\partial t} = m\Delta Y\,. \tag{60}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функция

$$Y(x,y,t) = \frac{1}{2\pi t}\oint\limits_{S_{\sqrt{m}\,t}(x,y)} \varphi(\xi,\eta)\,dl_{\xi\eta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+\sqrt{m}\,t\cos\theta, y+\sqrt{m}\,t\sin\theta)\,d\theta \tag{61}$$

является регулярным решением уравнения (60) и удовлетворяет начальным условиям

$$\lim_{t\to+0} Y(x,y,t) = \varphi(x,y)\,, \tag{62}$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{\partial Y}{\partial t}(x,y,t)=0\,. \tag{63}$$

Обратим теперь внимание на следующую особенность в задании функции (61): для определения значения отклонения дохода Y в точке (x,y) в момент времени t достаточно задать значения функции $\varphi(x,y)$ лишь на окружности $S_{\sqrt{m}\,t}(x,y)$, то есть размерность области зависимости решения от начальных данных меньше размерности многообразия начальных данных, то есть имеет место принцип Гюйгенса. С точки зрения рассматриваемого здесь приложения это означает следующее. Начальное отклонение дохода, локализованное на плоскости, повлечет за собой в точках плоскости отклонение дохода, локализованное во времени, то есть отклонения дохода будут иметь место лишь в течение конечного промежутка времени, после которого доход вернется к стационарному состоянию. Мы оставляем в стороне вопрос о возможности создания условий, при которых входные данные могли бы определяться формулами (58)-(59). Нам представляется, что при определенном влиянии некоторого центра на поведение субъектов, участвующих в товарообмене, эти условия вполне реализуемы. Это может стать своего рода управляющим фактором. Но тогда подобная ситуация означала бы своего рода тщетность усилий этих субъектов. Разумеется, подобный вывод может быть обусловлен всего лишь тем, что мы рассматриваем здесь линейную модель, которая упускает многие нюансы динамики в предметной области. Тем не менее, выявленный эффект позволяет говорить, что с помощью рассматриваемой модели мы обнаружили некоторые реальные свойства явления, инструментом изучения которого является эта модель.

Укажем еще на один случай, когда имеет место принцип Гюйгенса. Здесь мы предположим, что и склонность к импортированию m тоже зависит от времени, причем $m=m(t)\neq 0,\ t>0$. Тогда уравнение распределения дохода можно будет записать в виде

$$a(t)\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+b(t)\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{(s(t)+s'(t))}{m(t)}Y=\Delta Y\,,\qquad t>0\,, \tag{64}$$

где

$$\mu(t)=s(t)+1-v(t),\ a(t)=m^{-1}(t)\,,\qquad b(t)=\frac{\mu(t)}{m(t)}\,. \tag{65}$$

Пусть теперь

$$s(t)=v(t)=s_0e^{-t}\,,\quad m(t)=1+\frac{1}{t}\,. \tag{66}$$

Тогда в уравнении (64)

$$a(t)=b(t)=\frac{t}{t+1}\,,\quad s(t)+s'(t)=0\,. \tag{67}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} Y(x,y,t)&=\frac{1}{2\pi te^t}\oint\limits_{S_t(x,y)}\varphi(\xi,\eta)dl=\\ &=\frac{1}{2\pi e^t}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t\cos\theta,y+t\sin\theta)d\theta\,. \end{aligned} \tag{68}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что функция, определенная формулой (68), удовлетворяет уравнению (64) с коэффициентами, определенными формулами (67), а также начальным условиям

$$\lim_{t\to 0+} Y(x,y,t) = \varphi(x,y)\,, \qquad \lim_{t\to 0+}\left(t\frac{\partial Y(x,y,t)}{\partial t}\right) = 0\,. \tag{69}$$

7. Приближение волн, удовлетворяющих принципу Гюйгенса волнами, обладающими диффузией. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c^2 u\,, \quad x\in\mathbb{R}^3\,, \quad t>0\,, \quad c\geq 0\,, \tag{70}$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \quad x\in\mathbb{R}^3\,, \tag{71}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)\,, \quad x\in\mathbb{R}^3\,. \tag{72}$$

Решение задачи (70)-(72) обозначим $u_c(x,t)$. Известно [7], что функция $u_c(x,t)$ может быть выражена формулой

$$u_c(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \rho^2 J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2})Q(\varphi,x,\rho)\,d\rho\right) +$$

$$+\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \rho^2 J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2})Q(\psi,x,\rho)\,d\rho\,, \tag{73}$$

где

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}$$

– функция Бесселя первого рода порядка ν,

$$J_\nu(iz) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}$$

— функция Бесселя первого рода порядка ν от мнимого аргумента,

$$Q(\psi,x,\rho) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\oint_{|\xi-x|=\rho}\psi(\xi)\,dS_\xi$$

– сферическое среднее функции $\psi(x)$ по сфере с центром в точке x и радиусом ρ.

Отметим, что функция $u_0(x,t)$ принципиально отличается от функции $u_c(x,t)$ при $c\neq 0$. Поясним это. Для функции $u_0(x,t)$ представление (73) может быть преобразовано в формулу Кирхгофа [7]:

$$u_0(x,t) = tQ(\psi,x,t) + \frac{\partial}{\partial t}(tQ(\varphi,x,t))\,. \tag{74}$$

При $c\neq 0$ интегрирование в формуле (73) ведется по шару с центром в точке x и радиусом t, в то время как в формуле (74) интегрирование ведется по границе этого шара, то есть имеет место принцип Гюйгенса.

Предположим, что мы по каким-либо причинам не можем создать предпосылок для выполнения условий (70) – (72) при $c = 0$, но можем создать предпосылки для выполнения этих условий с $c \neq 0$. При этом будем стремиться придать параметру c как можно меньшее значение. В этом смысле c можно считать "управляющим параметром", при помощи которого мы будем приближать функцию $u_0(x,t)$ (то есть решение задачи (70)-(72), удовлетворяющее принципу Гюйгенса) функциями $u_c(x,t)$ (то есть решениями, не удовлетворяющими принципу Гюйгенса и обладающими свойством диффузии волн).

Ниже, считая c управляющим параметром, мы оценим близость функций $u_0(x,t)$ и $u_c(x,t)$ при малых $c \neq 0$ на малых и на больших промежутках времени.

Теорема 6. *Пусть*

$$\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3),\ \psi \in C^2(\mathbb{R}^3),\ |\varphi(x)| \le M\,, \quad |\psi(x)| \le M\,, \quad x \in \mathbb{R}^3\,.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$|u_c(x,t) - u_0(x,t)| \le M\left(\frac{\operatorname{sh}(ct) - ct}{c} + \operatorname{ch}(ct) - 1 - \frac{c^2t^2}{2}\right),$$

$$|u_c(x,t) - u_0(x,t)| \le Lc^2t^3\,,$$

где L не зависит от c и t

□ Имеем:

$$|u_c(x,t) - u_0(x,t)| \le I_1 + I_2\,,$$

где

$$I_1 = \left|\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \rho^2 Q(\psi,x,\rho)(J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2}) - 1)\,d\rho\right|,$$

$$I_2 = \left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \rho^2 Q(\varphi,x,\rho)(J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2}) - 1)\,d\rho\right)\right|.$$

Оценим каждое из слагаемых I_1, I_2. Сначала рассмотрим I_1. Выполняя операцию вычисления производной $\frac{\partial}{\partial t}$, учитывая, что $J_0(0) = 1$. мы получим

$$I_1 = \left|\frac{1}{t}\int\limits_0^t \rho^2 Q(\psi,x,\rho)\frac{\partial}{\partial t}(J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2}) - 1)\,d\rho\right|.$$

Учитывая определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда, мы получим

$$I_1 = \left|\frac{1}{t}\int\limits_0^t \rho^2 Q(\psi,x,\rho)\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^{2k}(t^2-\rho^2)^k}{2^{2k}(k!)^2}\,d\rho\right| =$$

$$= \left|\int\limits_0^t \rho^2 Q(\psi,x,\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^{2k}(t^2-\rho^2)^{k-1}}{2^{2k-1}(k-1)!\,k!}\,d\rho\right|.$$

Учитывая условие ограниченности функции $\psi(x)$, получим

$$I_1 \le M \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k}}{2^{2k-1}(k-1)!\,k!} \int_0^t \rho^2 (t^2-\rho^2)^{k-1}\,d\rho \right|.$$

Вычисляя интеграл в правой части этого неравенства, мы будем иметь

$$I_1 \le M \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k} t^{2k+1}}{2^{2k-1} k! \Gamma(k+3/2)} \right|,$$

а суммируя ряд в полученном неравенстве, получим окончательную оценку для I_1:

$$I_1 \le M \frac{\mathrm{sh}(ct) - ct}{c}\ . \tag{75}$$

Оценим теперь слагаемое I_2. Во-первых, выполняя внутреннее дифференцирование, получим

$$I_2 = \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \rho^2 Q(\varphi, x, \rho) \frac{\partial}{\partial t} (J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2}) - 1)\,d\rho \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \rho^2 Q(\varphi, x, \rho) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k}(t^2-\rho^2)^{k-1}}{2^{2k-1}(k-1)!\,k!}\,d\rho \right) \right|.$$

Теперь выполним внешнее дифференцирование:

$$I_2 = \left| \frac{c^2t^2}{2} Q(\varphi, x, \rho) + t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k}}{2^{2k-2}(k-2)!\,k!} \int_0^t Q(\varphi, x, \rho) \rho^2 (t^2-\rho^2)^{k-2}\,d\rho \right|.$$

Далее, учитывая ограниченность функции $\varphi(x)$, получим:

$$I_2 \le M \left| \frac{c^2t^2}{2} + t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k}}{2^{2k-2}(k-2)!\,k!} \int_0^t \rho^2 (t^2-\rho^2)^{k-2}\,d\rho \right| =$$

$$= M \left(\mathrm{ch}(ct) - 1 - \frac{c^2t^2}{2} \right). \tag{76}$$

Из (75) и (76) мы окончательно получим

$$|u_c(x,t) - u_0(x,t)| \le M \left(\frac{\mathrm{sh}(ct) - ct}{c} + \mathrm{ch}(ct) - 1 - \frac{c^2t^2}{2} \right). \tag{77}$$

Теперь, учитывая разложение в степенные ряды функций $\mathrm{sh}(ct)$ и $\mathrm{ch}(ct)$, мы получим

$$|u_c(x,t) - u_0(x,t)| \le Lc^2t^3\,, \quad \blacksquare \tag{78}$$

Оценка (77) при больших значениях c и t в некоторой степени характеризует расходимость разности $u_c(x,t) - u_0(x,t)$, причем она в этом случае точна в том смысле, что при постоянных функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ неравенство (77) заменяется равенством.

При малых значениях c и t неравенство (78), напротив, оценивает близость функций $u_c(x,t)$ и $u_0(x,t)$.

Литература

1. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика / Т.Пу – Ижевск: Удмуртский университет, 2000. – 200 с.

2. Бицадзе А.В., Нахушев А.М. О корректной постановке задач для уравнения смешанного типа в многомерных областях // Доклады АН СССР. – 1972. – 205;1. – С.9-12.

3. Бицадзе А.В., Нахушев А.М. К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях // Доклады АН СССР. – 1972. – 204;6. – С.1289-1291.

4. Бицадзе А.В., Нахушев А.М. К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях // Дифференциальные уравнения. – 1974. – 10;N 12. – С.2184-2191.

5. Половинкин И.П. Обращение теоремы о среднем значении для волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1991. – 27;11. – С.1987-1990.

6. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние / Ф. Йон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – 158 с.

7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2 / Р. Курант. – Москва, Ленинград: ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1945. – 620 с.

8. Половинкин И.П. О некоторых следствиях из теоремы о среднем А.В. Бицадзе и А.М. Нахушева для волнового уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2007. – 9;1. – С.69-72.

INVESTIGATION OF THE T.PU LINEAR CONTINUAL MODEL OF RETURNS DISTRIBUTION

I.P. Polovinkin

Voronezh State University,
Universitetskaya sq., 1, Voronezh, 394006, Russia;
Voronezh Institute of Innovation Systems,
Berezovaya Roscha St., 54, Voronezh, 394043, Russia, e-mail: polovinkin@yandex.ru

Abstract. The point-to-point mean value theorem for harmonic function and its inversion have been proved. Analogously, point-to-point mean value theorems for some linear differential equations have been proved also. It is studied their applications for investigation of the Puu returns distribution linear continual model. The example of the Huygens principle for the Puu returns distribution linear equation has been constructed.

Key words: mean value theorem, mean value formula, Huygens' principle.