УДК 517.983

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ [5]

А.В. Глушак, И.М. Примак

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail:Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Найдены условия однозначной разрешимости краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными.

Ключевые слова: краевая задача, дробная производная, однозначная разрешимость.

В данной работе в банаховом пространстве E рассмотрим решение краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений дробного порядка $\alpha \in (0,1)$, содержащих либо дробную производную Герасимова-Капуто, либо дробную производную Римана-Лиувилля.

Дробная производная Герасимова-Капуто $\partial^\alpha u(t)$ определяется следующим образом:

$$\partial^\alpha u(t) = D^\alpha (u(t) - u(0))\,,$$

где $D^\alpha u(t) = \dfrac{d}{dt} I^{1-\alpha} u(t)$ – дробная производная Римана-Лиувилля [1, с. 44],

$$I^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

– дробный интеграл Римана-Лиувилля, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Исследуем разрешимость краевой задачи

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t)\,, \quad 0 < t < T\,, \tag{1}$$

$$\mu u(0) - u(T) = u_0\,. \tag{2}$$

Определение 1. *Функция $u(t) \in C([0,T],E)$ такая, что $I^{1-\alpha}u(t) \in C^1((0,T),E)$, называется решением задачи* (1), (2), *если она удовлетворяет уравнению* (1) *на интервале* $(0,T)$ *и краевому условию* (2).

Рассмотрим вначале частный случай краевой задачи, когда в уравнении (1) A — ограниченный оператор. Пусть также в условии (2) для любого $\lambda \in \sigma(A)$ ($\sigma(A)$ – спектр

[5]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613)

оператора A) число $\mu \neq E_\alpha(\lambda T^\alpha)$, где $E_\alpha(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$ $(\alpha > 0)$ – функция Миттаг-Леффлера.

По теореме об отображении спектра [2, с. 609] имеет место равенство $\sigma(E_\alpha(T^\alpha A)) = E_\alpha(T^\alpha(\sigma(A)))$, откуда следует существование оператора $(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1}$, определенного на E.

Пусть $u(t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(0) = v_0$. Тогда [3, с. 13] $u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)v_0$ при $t \in [0,T]$. Учитывая граничное условие (2), получим уравнение $\mu v_0 - E_\alpha(T^\alpha A)v_0 = u_0$. Следовательно, $v_0 = (\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1}u_0$ и

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1}u_0\,. \tag{3}$$

Таким образом, если решение краевой задачи существует, то оно единственно и имеет вид (3). С другой стороны, задаваемая равенством (3) функция $u(t)$ определена при любом $u_0 \in E$ и, как нетрудно проверить, является решением рассматриваемой краевой задачи (1), (2). Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть A – ограниченный оператор в банаховом пространстве E и для любого $\lambda \in \sigma(A)$, $\mu \neq E_\alpha(\lambda T^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in E$ решение краевой задачи* (1), (2) *существует, единственно и имеет вид* (3).

Пример 1. Пусть E – пространство комплексных чисел $\mathbb{C}$, A – оператор умножения на $A \in \mathbb{C}$ и $\mu \neq E_\alpha(AT^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{C}$ решение краевой задачи (1), (2) единственно и имеет вид

$$u(t) = \frac{E_\alpha(At^\alpha)u_0}{\mu - E_\alpha(AT^\alpha)}\,.$$

Рассмотрим далее краевую задачу, содержащую дробную производную Римана-Лиувилля

$$D^\alpha v(t) = Av(t)\,, \quad 0 < t < T\,, \tag{4}$$

$$\mu I^{1-\alpha}v(0) - v(T) = u_0\,. \tag{5}$$

Определение 2. *Функция $v(t) \in C((0,T],E)$ такая, что $I^{1-\alpha}v(t) \in C^1((0,T),E)$, называется решением задачи* (4), (5), *если она удовлетворяет уравнению* (4) *на интервале* $(0,T)$ *и краевому условию* (5).

В уравнении (4), по-прежнему, будем считать A ограниченным оператором в банаховом пространстве E. Пусть также в условии (5) для любого $\lambda \in \sigma(A)$, число $\mu \neq T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)$, где $E_{\alpha,\alpha}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}$ $(\alpha > 0)$ — функция типа Миттаг-Леффлера. По теореме об отображении спектра имеет место равенство $\sigma(E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A)) = E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha(\sigma(A)))$, откуда следует существование оператора $(\mu I - E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A))^{-1}$, определенного на E.

Пусть $v(t)$ – решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $I^{1-\alpha}v(0) = v_0$. Тогда [1, с. 601] $v(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)v_0$ при $t \in [0,T]$. Учитывая граничное условие (5), получим

$\mu v_0 - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A)v_0 = u_0$. Следовательно, $v_0 = (\mu I - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A))^{-1}u_0$ и

$$v(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)(\mu I - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A))^{-1}u_0 \,. \tag{6}$$

Таким образом, если решение краевой задачи существует, то оно единственно и имеет вид (6). С другой стороны, задаваемая равенством (6) функция $v(t)$ определена при любом $u_0 \in E$ и, как нетрудно проверить, является решением рассматриваемой краевой задачи (4), (5). Проведенные рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть A – ограниченный оператор в банаховом пространстве E и для любого $\lambda \in \sigma(A)$ $\mu \neq T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in E$ решение краевой задачи* (4), (5) *существует, единственно и имеет вид* (6).

Полученные в теоремах 1 и 2 результаты при $\alpha = 1$ превращаются в соответствующие результаты работы [4, с. 62]. Решение краевой задачи в этом случае имеет вид

$$u(t) = e^{tA}(\mu I - e^{tA})^{-1}u_0 \,.$$

Пример 2. Пусть E – пространство комплексных чисел $\mathbb{C}$, A — оператор умножения на $A \in \mathbb{C}$ и $\mu \neq T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{C}$ решение краевой задачи (4), (5) единственно и имеет вид

$$u(t) = \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)u_0}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(AT^\alpha)} \,.$$

Перейдем к рассмотрению краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка с неограниченным оператором A.

В дальнейшем будем считать допустимой область G комплексной плоскости, ограниченную кусочно-гладкими кривыми и такую, что для достаточно больших по модулю $\lambda \in G$

$$\arg\lambda \in [\varphi_1, \varphi_2] \cup [\varphi_3, \varphi_4] \,, \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2} < \varphi_3 < \varphi_4 < \frac{3\pi}{2} \,.$$

Оператор A и параметр μ будут удовлетворять следующему условию.

Условие 1. Область определения $D(A)$ оператора A плотна в E. Существуют допустимая область G, постоянная $K > 0$ и целое число $k \geq -1$, такие что

$$\forall\lambda \notin G \quad \|R(\lambda, A)\| \leq K(1 + |\lambda|)^k \,,$$

где $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ и, кроме того, $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha \bar{G})$.

Пусть $u(t) = U(t)u_0$ – решение краевой задачи с ограниченным оператором A. В силу теоремы 1 оператор $U(t)$, являющийся функцией ограниченного оператора A и параметра μ, может быть записан в виде контурного интеграла

$$U(t) = E_\alpha(t^\alpha A)(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)d\lambda \,, \tag{7}$$

где ∂G – граница области G, содержащей спектр оператора A, $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha G)$.

Покажем, что решение краевой задачи (1), (2) с неограниченным оператором A при выполнении условия 1 может быть получено в форме контурного интеграла (7).

Теорема 3. *Пусть выполнено условие 1 и $u_0 \in D(A^{k+3})$, тогда функция*

$$u(t) = U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A) u_0 d\lambda \tag{8}$$

определена, имеет непрерывную дробную производную порядка α и является решением краевой задачи (1), (2).

□ Покажем, что при $u_0 \in D(A^{k+2})$ функция $U(t)u_0$ определена и непрерывна на $(0, T)$. Возьмем произвольное $\lambda_0 \notin \bar{G}$. Используя тождество Гильберта

$$R(\lambda, A)R(\mu, A) = \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu},$$

для $u_0 \in D(A)$ можно записать

$$U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)R(\lambda_0, A)(A - \lambda_0 I)u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda_0, A)(A - \lambda_0 I)u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda .$$

Функция Миттаг-Леффлера имеет следующую асимптотику [5, с. 43]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \tag{9}$$

где $|z| \to \infty$, $\quad |\arg(z)| \le \eta$, $\dfrac{\pi\alpha}{2} < \eta < \min(\pi, \pi\alpha)$ и

$$E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \quad |z| \to \infty, \qquad \eta \le |\arg(z)| \le \pi . \tag{10}$$

Применяя лемму Жордана и учитывая (9), (10), для $0 < t < T$ получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = 0 . \tag{11}$$

Таким образом,

$$U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)}{\lambda - \lambda_0} u_0 d\lambda\,, \qquad t\in(0,T)\,. \tag{12}$$

Учитывая асимптотику функции Миттаг-Леффлера (9), (10), для $t \in [\delta, T]$, $\delta > 0$ и достаточно больших $|\lambda|$ будем иметь оценки

$$\frac{|E_\alpha(\lambda t^\alpha)|\ \|R(\lambda,A)\|}{|\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)|\cdot|\lambda-\lambda_0|} \le$$

$$\le \frac{\left|\frac{1}{\alpha} t\lambda^{1/\alpha} e^{t\lambda^{1/\alpha}} - \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha k)} \frac{1}{(\lambda t^\alpha)^k} + O\left(\frac{1}{(\lambda t^\alpha)^{N+1}}\right)\right|}{\left|\mu - \frac{1}{\alpha} T\lambda^{1/\alpha} e^{T\lambda^{1/\alpha}} + \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha k)} \frac{1}{(\lambda T^\alpha)^k} - O\left(\frac{1}{(\lambda T^\alpha)^{N+1}}\right)\right|} \cdot \frac{K}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|} \le$$

$$\le \frac{\left|T\lambda^{1/\alpha} e^{T\lambda^{1/\alpha}}\right|}{\left|\mu - T/\alpha\ \lambda^{1/\alpha} e^{T\lambda^{1/\alpha}}\right|} \cdot \frac{K_1}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|}, \quad |\arg(\lambda t^\alpha)| \le \eta\,, \quad \eta \in (\pi\alpha/2, \pi\alpha)\,, \tag{13}$$

$$\frac{|E_\alpha(\lambda t^\alpha)|\|R(\lambda,A)\|}{|\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)|\cdot|\lambda-\lambda_0|} \le$$

$$\le \frac{\left|-\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha k)} \frac{1}{(\lambda t^\alpha)^k} + O\left(\frac{1}{(\lambda t^\alpha)^{N+1}}\right)\right|}{\left|\mu + \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha k)} \frac{1}{(\lambda T^\alpha)^k} - O\left(\frac{1}{(\lambda T^\alpha)^{N+1}}\right)\right|} \cdot \frac{K}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|} \le$$

$$\le \frac{1}{|\mu|}\cdot\frac{K_1}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|}, \qquad \eta \le |\arg(\lambda t^\alpha)| \le \pi\,. \tag{14}$$

Очевидно, неравенства вида (13), (14) имеют место и для $t\in[0,\delta]$. Следовательно, при $k=-1$ интеграл в (12) равномерно сходится по $t\in[0,T]$ и определяет непрерывную на $[0,T]$ функцию.

Выполним аналогичное преобразование еще раз и получим

$$U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)R(\lambda_0,A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda_0, A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{(A-\lambda_0 I)u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda .$$

Аналогично равенству (11) устанавливается, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{(A-\lambda_0 I)u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda = 0 ,$$

$$U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda .$$

Последний интеграл определяет непрерывно дифференцируемую на $[0,T]$ функцию.

При $k>-1$ указанные преобразования следует повторить $k+1$ раз. В результате для $u_0 \in D\left(A^{k+2}\right)$ получим представление

$$U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda , \qquad t\in[0,T] . \tag{15}$$

Из ограниченности оператора $U(t)$ на плотном в E подмножестве $D(A^{k+2})$ следует его ограниченность на всем E [6, с. 130], что позволяет получить непрерывную зависимость решения задачи (1), (2) от значения u_0. Для построенного продолжения имеем

$$(\mu U(0) - U(T))u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\mu}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda +$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda ,$$

где подынтегральная функция аналитична по $\lambda \in C\setminus\overline{G}$, $\lambda\neq\lambda_0$, непрерывна по $\lambda\in\partial G$ и убывает на бесконечности как $|\lambda|^{-2}$. Поэтому имеем

$$(\mu U(0) - U(T))u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0 = u_0 ,$$

и, стало быть, $U(t)u_0$ удовлетворяет краевому условию (2).

Покажем, что при $t \in (0,T)$ $U(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (1). Учитывая замкнутость оператора A, $\forall u_0 \in D(A^{k+2})$ и $\forall \lambda \in \partial G$, получим $U(t)u_0 \in D(A^{k+2})$ и

$$AU(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{AE_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\left(\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} + \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}R(\lambda,A)\right)\frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)(\lambda-\lambda_0)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+3}}u_0 d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda\,.$$

Аналогично равенству (11) для $t \in (0,T)$, устанавливается равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+3}}d\lambda = 0\,,$$

поэтому

$$AU(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda\,. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$\partial^\alpha U(t)u_0 = D^\alpha(U(t)-U(0))u_0 = D^\alpha U(t)u_0 - \frac{U(0)}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}D^\alpha\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda - \frac{U(0)}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{-\alpha}E_{\alpha,1-\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{-\alpha}}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(\lambda-\lambda_0)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda\,. \tag{17}$$

Применяя в (17) равенство $E_{\alpha,\beta}(t) - \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} = tE_{\alpha,\alpha+\beta}(t)$ [5, с. 45] и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{-\alpha}}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(\lambda-\lambda_0)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda = 0\,,$$

получим

$$\partial^\alpha U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = AU(t)u_0\,.$$

Таким образом, функция $U(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (1). ■

Приведем далее достаточное условие единственности полученного в теореме 3 решения. Теорему единственности мы докажем путем аппроксимации задачи (1), (2) задачами

$$\partial^\alpha u_n(t) = A_n u_n(t)\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{18}$$

$$\mu u_n(0) - u_n(T) = u_0\,. \tag{19}$$

с ограниченными операторами A_n.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов A_n таких, что*

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A_n)\| \le M_1 e^{\omega t}\,, \tag{20}$$

и для $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha \bar{G})$

$$\left\|(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A_n))^{-1}\right\| \le M_2 \tag{21}$$

с постоянными $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ и ω не зависящими от n. Тогда определяемое равенством (8) решение задачи (1), (2) единственно.

□ Пусть $u(t)$ – решение задачи (1), (2), а $u_n(t)$ – решение задачи (18), (19). Тогда функция $w_n(t) = u(t) - u_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial^\alpha w_n(t) = A_n w_n(t) + (A - A_n)u(t)\,, \quad t \in (0,T)$$

и нулевому краевому условию

$$\mu w_n(0) - w_n(T) = 0\,.$$

Поскольку оператор A_n ограничен, то подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, запишем соотношение

$$w_n(t) = E_\alpha(t^\alpha A_n)(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A_n))^{-1} W_n(T) + W_n(t)\,, \tag{22}$$

где

$$W_n(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left((t-s)^\alpha A_n\right)(A - A_n)u(s)\,ds\,. \tag{23}$$

Учитывая оценку (20) и равномерное по $t \in [0,T]$ стремление к нулю последовательности $(A - A_n)u(t)$, из (23) вытекает равномерное по $t \in [0,T]$ стремление к нулю последовательности $W_n(t)$, а из (20)-(22) – последовательности $w_n(t) = u(t) - u_n(t)$.

Итак, рассматриваемое решение $u(t)$ задачи (1), (2) является пределом последовательности $u_n(t)$ и, следовательно, определяется единственным образом. ■

Другое достаточное условие единственности решения задачи (1), (2) можно пытаться найти следующими рассуждениями. Пусть $u(t)$ — решение краевой задачи

$$\partial^{\alpha} u(t) = Au(t) \quad (0 < t < T), \qquad \mu u(0) - u(T) = 0 .$$

Обозначим через $L_{\alpha}(\lambda) = E_{\alpha}(\lambda T^{\alpha}) - \mu$ и пусть λ_0 – ее нуль. Поскольку функция Миттаг-Леффлера при $\alpha \neq 1$ не имеет пикаровских исключительных значений (см. [7, с. 150]), то такое λ_0 всегда существует.

В работе [4, с. 65] доказано, что единственность решения задачи (1), (2) при $\alpha = 1$ зависит от взаимного расположения собственных значений оператора A и нулей функции $L_1(\lambda)$ – они не должны совпадать.

Определим векторно-значную целую функцию

$$f_{\alpha}(\lambda) = \int\limits_0^T s^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^{\alpha}) u(s)\, ds .$$

Если λ_0 не является собственным значением оператора A, то $Af_{\alpha}(\lambda_0) = \lambda_0 f_{\alpha}(\lambda_0) - L_{\alpha}(\lambda_0)\, u(0)$ и, следовательно, $f_{\alpha}(\lambda_0) = 0$.

Введем в рассмотрение скалярную функцию $\Upsilon_{\alpha}(\lambda) = \dfrac{h(f_{\alpha}(\lambda))}{L_{\alpha}(\lambda)}$, где h – линейный непрерывный функционал на E. В работе [8] при $\alpha = 1$ путем анализа нулей функции $f_1(\lambda)$ методом частных для функции $\Upsilon_1(\lambda)$ установлено равенство $u(t) \equiv 0$. Таким образом, проблема единственности решения задачи (1), (2) может быть сведена к распространению метода частных для функции $\Upsilon_{\alpha}(\lambda)$ при $\alpha \neq 1$.

Пример 3. Пусть оператор A является генератором аналитической полугруппы $Q(t)$. Тогда [9, с. 266]

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{K}{1 + |\lambda|}, \qquad \operatorname{Re} \lambda \geq \sigma ,$$

а допустимая область G – область, лежащая слева от контура ∂G, состоящего из двух лучей $\lambda = \sigma + \rho e^{i\gamma}$ и $\lambda = \sigma + \rho e^{-i\gamma}$, где $0 \leq \rho < \infty$, γ – любое число из промежутка $(\pi/2, \pi/2 + \arcsin 1/K)$, обход контура производится из нижней полуплоскости в верхнюю.

В силу теоремы 3 для $u_0 \in D(A^2)$ и $\mu \notin E_{\alpha}(T^{\alpha}\bar{G})$, функция

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu - E_{\alpha}(\lambda T^{\alpha})} \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} Q(\tau) u_0\, d\tau d\lambda$$

является решением задачи (1), (2). Поскольку оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов [10, с. 64], то, в силу теоремы 4, указанное решение является единственным.

Установим далее результаты, аналогичные теоремам 3 и 4 для краевой задачи (4), (5), содержащей дробную производную Римана-Лиувилля.

Оператор A и параметр μ будут удовлетворять следующему условию.

Условие 2. Область определения $D(A)$ оператора A плотна в E. Существуют допустимая область G, постоянная $K>0$ и целое число $k \geq -1$, такие что

$$\forall \lambda \notin G \qquad \|R(\lambda, A)\| \leq K(1+|\lambda|)^k\,,$$

и, кроме того, $\mu \notin T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \overline{G})$.

Пусть $v(t) = V(t)u_0$ – решение краевой задачи с ограниченным оператором A. По теореме 2 оператор $V(t)$, являющийся функцией ограниченного оператора A и параметра μ, может быть записан в виде контурного интеграла

$$V(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)d\lambda\,, \tag{24}$$

где ∂G – граница области G, содержащей спектр оператора A, $\mu \notin E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \overline{G})$.

Покажем, что решение краевой задачи (4), (5) с неограниченным оператором A при выполнении условия 2 может быть получено в форме контурного интеграла (24).

Теорема 5. *Пусть выполнено условие 2 и $u_0 \in D(A^{k+2})$, тогда функция*

$$v(t) = V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)u_0 d\lambda\,, \tag{25}$$

определена, имеет непрерывную дробную производную порядка α при $t \in (0;T)$ и является решением краевой задачи (4), (5).

□ Докажем, что при $u_0 \in D(A^{k+2})$ функция $V(t)u_0$ определена и непрерывна на $(0,T]$. Возьмем произвольное $\lambda_0 \notin \overline{G}$. Используя тождество Гильберта, для $u_0 \in D(A)$ можно записать

$$V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)R(\lambda_0, A)(A-\lambda_0 I)u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)u_0}{\lambda-\lambda_0} d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda_0, A)(A-\lambda_0 I)u_0}{\lambda-\lambda_0} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)u_0}{\lambda-\lambda_0} d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{u_0}{\lambda-\lambda_0}d\lambda\,. \tag{26}$$

Применяя лемму Жордана, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{u_0}{\lambda-\lambda_0}d\lambda=0\,,\qquad t\in(0,T]\,. \tag{27}$$

Откуда,

$$V(t)u_0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)}{\lambda-\lambda_0}u_0 d\lambda\,,\qquad t\in(0,T]\,. \tag{28}$$

Учитывая асимптотику функции Миттаг-Леффлера (9), (10), для $t\in[0,T]$ и достаточно больших $|\lambda|$ запишем оценки

$$\frac{|t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t)|\|R(\lambda,A)\|}{|\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T)||\lambda-\lambda_0|}\leq$$

$$\frac{t^{\alpha-1}\left|\frac{1}{\alpha}(\lambda t^{\alpha})^{(1-\alpha)/\alpha}e^{t\lambda^{1/\alpha}}-\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha k)}\frac{1}{(\lambda t^{\alpha})^{k}}+O\left(\frac{1}{(\lambda t^{\alpha})^{N+1}}\right)\right|}{\left|\mu-T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\alpha}(\lambda T^{\alpha})^{(1-\alpha)/\alpha}e^{T\lambda^{1/\alpha}}+\sum\limits_{k-1}^{N}\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha k)}\frac{1}{(\lambda T^{\alpha})^{k}}-O\left(\frac{1}{(\lambda T^{\alpha})^{N+1}}\right)\right)\right|}\frac{K}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|}\leq$$

$$\leq\frac{\left|\lambda^{(1-\alpha)/\alpha}e^{T\lambda^{1/\alpha}}\right|}{\left|\mu-1/\alpha\ \lambda^{1/\alpha-1}\ e^{T\lambda^{1/\alpha}}\right|}\frac{K_1}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|}\,,\qquad|\arg(\lambda t^{\alpha})|\leq\eta\,,\qquad\eta\in(\pi\alpha/2,\pi)\,, \tag{29}$$

$$\frac{|t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t)|\ \|R(\lambda,A)\|}{|\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T)||\lambda-\lambda_0|}\leq$$

$$\leq\frac{t^{\alpha-1}\left|-\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha k)}\frac{1}{(\lambda t^{\alpha})^{k}}+O\left(\frac{1}{(\lambda t^{\alpha})^{N+1}}\right)\right|}{\left|\mu+T^{\alpha-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha k)}\frac{1}{(\lambda T^{\alpha})^{k}}-O\left(\frac{1}{(\lambda T^{\alpha})^{N+1}}\right)\right)\right|}\frac{K}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|}\leq\frac{K}{|\mu||\lambda||\lambda-\lambda_0|}\,, \tag{30}$$

где $\eta\leq|\arg(\lambda t^{\alpha})|\leq\pi$.

Из (29), (30) следует, что при $k=-1$ интеграл (28) сходится равномерно по $t\in[0,T]$ и определяет непрерывную на $[0,T]$ функцию.

Выполняя подобное преобразование еще раз, получим

$$V(t)u_0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)u_0}{\lambda-\lambda_0}d\lambda=$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda,A)R(\lambda_0,A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{\lambda-\lambda_0}d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda_0,A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{(A-\lambda_0 I) u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda .$$

Аналогично равенству (11), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{(A-\lambda_0 I) u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda = 0 ,$$

поэтому

$$V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda .$$

При $k > -1$ указанные преобразования следует повторить $k+1$ раз и мы получим

$$V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda , \qquad t \in [0,T] . \qquad (31)$$

Из ограниченности $V(t)$ на плотном подмножестве $D(A^{k+2})$ следует его ограниченность на E. Для построенного продолжения имеем

$$(\mu I^{1-\alpha}(V(0)) - V(T))u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\mu I^{1-\alpha}(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha))\mid_{t=0}}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\mu(E_{\alpha}(\lambda t^\alpha))\mid_{t=0}}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} d\lambda\,,$$

где подынтегральная функция аналитична по $\lambda \in C\backslash\overline{G}$, $\lambda \neq \lambda_0$, непрерывна по $\lambda \in \partial G$ и убывает на бесконечности как $|\lambda|^{-2}$. Поэтому имеем

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = \frac{1}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0 = u_0\,,$$

следовательно, $V(t)u_0$ удовлетворяет краевому условию (5).

Покажем, что при $t \in (0;T)$ $V(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (4). Учитывая замкнутость оператора A и равенство (11) для $u_0 \in D(A^{k+2})$ и $\lambda \in \partial G$, получим $V(t)u_0 \in D(A^{k+2})$. Кроме того,

$$AV(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{At^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \left(\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} + \frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)\right) \frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda\,.$$

С другой стороны,

$$D^\alpha V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = AV(t)u_0\,,$$

следовательно, функция $V(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (4). ■

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов A_n таких, что*

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A_n)\| \le M_3 e^{\omega t}, \tag{32}$$

и для $\mu \notin T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \bar{G})$

$$\left\|(\mu I - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A_n))^{-1}\right\| \le M_4 \tag{33}$$

с постоянными $M_3 > 0$, $M_4 > 0$ *и* ω *не зависящими от* n. *Тогда решение задачи* (4),(5), *определяемое равенством* (24), *единственно.*

□ Пусть $v(t)$ – решение задачи (4), (5), а $v_n(t)$ – решение задачи

$$D^\alpha v_n(t) = A_n v_n(t)\,, \quad 0 < t < T\,, \tag{34}$$

$$\mu I^{1-\alpha} v_n(0) - v_n(T) = u_0\,, \tag{35}$$

с ограниченными операторами A_n. Тогда функция $w_n(t) = v(t) - v_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$D^\alpha w_n(t) = A_n w_n(t) + (A - A_n)v(t)\,, \quad t \in (0, T)$$

и нулевому краевому условию

$$\mu I^{1-\alpha} w_n(0) - w_n(T) = 0\,.$$

Поскольку оператор A_n ограничен, то аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2, запишем соотношение

$$w_n(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A_n)(\mu I^{1-\alpha} - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A_n))^{-1}W_n(T) + W_n(t)\,, \tag{36}$$

где

$$W_n(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left((t-s)^\alpha A_n\right)(A - A_n)v(s)\, ds\,. \tag{37}$$

Учитывая оценку (32) и равномерное по $t \in [0, T]$ стремление к нулю последовательности $(A - A_n)v(t)$, из (37) вытекает равномерное по $t \in [0, T]$ стремление к нулю последовательности $W_n(t)$, а из (32), (33), (36) – последовательности $w_n(t) = v(t) - v_n(t)$.

Итак, рассматриваемое решение $v(t)$ задачи (4), (5) является пределом последовательности $v_n(t)$ и, следовательно, определяется единственным образом. ■

Пример 4. Пусть оператор A является генератором аналитической полугруппы $Q(t)$. Тогда (см. пример 3)

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{K}{1 + |\lambda|}\,, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda \ge \sigma\,,$$

а допустимая область G – область, лежащая слева от контура ∂G, состоящего из двух лучей $\lambda = \sigma + \rho e^{i\gamma}$ и $\lambda = \sigma + \rho e^{-i\gamma}$, где $0 \le \rho < \infty$, γ – любое число из промежутка $(\pi/2, \pi/2 + \arcsin 1/K)$, обход контура производится из нижней полуплоскости в верхнюю.

В силу теоремы 5 для $u_0 \in D(A^2)$ и $\mu \notin T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \bar{G})$, функция

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau} Q(\tau) u_0 \, d\tau d\lambda$$

является решением задачи (4), (5). Так как оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов, то в силу теоремы 6 указанное решение является единственным.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко. – Минск: Наука и техника, 1987.

2. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы (общая теория) / Н. Данфорд. – М.: ИЛ. – 1962.

3. Bajlekova E. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / Ph. D. Thesis / Eindhoven University of Technology, 2001.

4. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов. – М.: Физматлит. – 1995.

5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations / A.A. Kilbas. – Math. Studies 204. – Elsevier, 2006.

6. Треногин В.А., Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.

7. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций / А.А. Гольдберг. – М.: Наука, 1970.

8. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Математические заметки. – 77; 2. – С.273-290.

9. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966.

10. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

A.V. Glushak, I.M. Primak

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. Conditions of unique solvability of boundary value problems are found for abstract differential equations with fractional derivatives.

Key words: boundary value problem, fractional derivative, unique solvability.