УДК 519.213.5 + 519.217.4

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАНДЕЛЯ

Ю.П. Вирченко, Н.Н. Витохина

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается распределение вероятностей Манделя квантовой оптики в случае одномодового циклически поляризованного стохастического излучения. Для этого распределения вероятностей доказана локальная предельная теорема при неограниченном росте времени регистрации T.

Ключевые слова: распределение Манделя, локальная предельная теорема, процесс Орнштейна-Уленбека.

1. Введение. Изучается распределение вероятностей для случайного числа фотоотсчётов при фотодетектировании оптического поля малой интенсивности. Особенностью такого физического процесса является то, что электромагнитного поле регистрируется отдельными порциями, состоящими из групп фотонов, и чем ниже интенсивность излучения, и чем больше разрешающая способность квантового счётчика, тем более вероятна регистрация отдельных фотонов. Число фотоотсчётов в течение времени регистрации T, с необходимостью, является случайным. Эта случайность является следствием двух причин. Первая из них – квантовая природа регистрируемого электромагнитного излучения, вторая связана с тем, что поле может иметь помимо регулярной (сигнальной) составляющей, также и стохастическую (шумовую). Если регистрируемое электромагнитное поле содержит стохастическую составляющую, то его квантовое состояние является статистически *смешанным* и описывается матрицей плотности. Распределение вероятностей $P_T(n)$ для числа фотоотсчётов получается посредством некоторой специальной процедуры усреднения диагонали этой матрицы плотности в представлении *чисел заполнения* фотонов [1]. Мы будем изучать, с чисто математической точки зрения, модель квантового счётчика фотонов одномодового циклически поляризованного полностью стохастического (без сигнальной составляющей) электромагнитного излучения. Нашей целью является асимптотика распределения вероятностей $P_T(n)$ для больших значений времени регистрации T.

2. Распределение Манделя. Известно (см., например, [1],[2],[3]), что случайное число $\tilde{n}$ фотоотсчётов квантового низкоинтенсивного оптического излучения имеет в качестве своего распределения вероятностей $P_T(n)$ т.н. *составное распределение Пуассона*, называемое в квантовой оптике распределением Манделя,

$$P_T(n) \equiv \Pr\{\tilde{n} = n\} = \frac{1}{n!}\mathsf{E}\left(\tilde{J}(T)\right)^n \exp[-\tilde{J}(T)]\,, \qquad (1)$$

Здесь $\tilde{J}(T)$ – случайная величина, представляющая собой поглощённую за время регистрации T энергию электромагнитного поля. Она определяется формулой

$$\tilde{J}(T) = \mathsf{J}_T[\tilde{z}] = \int\limits_0^T |\tilde{z}(s)|^2\, ds\,. \tag{2}$$

Одномодовый циклически поляризованный электромагнитный шум описывается комплекснозначным случайным процессом Орнштейна-Уленбека с траекториями $\tilde{z}(t) = \tilde{x}(t)+i\tilde{y}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, у которых $\tilde{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ и $\tilde{y}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ являются траекториями стохастически эквивалентных и независимых процессов Орнштейна-Уленбека, моделирующих, с физической точки зрения, соответственно, электрическую и магнитную составляющие шумового поля.

Каждый из стационарных процессов $\langle \tilde{x}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, $\langle \tilde{y}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ определяется посредством одинаковых (ввиду стохастической эквивалентности этих процессов) стохастических дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}}(t) + \nu\tilde{x}(t) = \tilde{\varphi}_x(t)\,, \quad \dot{\tilde{y}}(t) + \nu\tilde{y}(t) = \tilde{\varphi}_y(t)\,,$$

$\nu > 0$, где $\tilde{\varphi}_x(t)$, $\tilde{\varphi}_y(t)$ – стохастически независимые и эквивалентные «белые шумы» с одной и той же интенсивностью $\sigma > 0$, $\langle\varphi_x(t)\varphi_x(t')\rangle = \sigma\delta(t-t')$, $\langle\varphi_y(t)\varphi_y(t')\rangle = \sigma\delta(t-t')$.

Таким образом, фиксация значений двух параметров $\nu > 0$ и $\sigma > 0$ полностью определяет распределения вероятностей этих двух случайных процессов и, поэтому, полностью определяет распределения вероятностей случайных величин $\mathsf{J}_T[\tilde{x}]$, $\mathsf{J}_T[\tilde{y}]$. Принимая во внимание независимость и эквивалентность процессов $\langle \tilde{x}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, $\langle \tilde{y}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, можно утверждать независимость и эквивалентность случайных величин $\mathsf{J}_T[\tilde{x}]$, $\mathsf{J}_T[\tilde{y}]$. Это влечёт выполнение равенств

$$Q_T[\lambda; \tilde{z}] = Q_T[\lambda; \tilde{x}]Q_T[\lambda; \tilde{y}] = (Q_T[\lambda; \tilde{x}])^2\,, \tag{3}$$

связывающих производящие функции

$$Q_T[\lambda; \tilde{z}] = \mathsf{E}\exp\left(-\lambda\mathsf{J}_T[\tilde{z}]\right)\,, \quad Q_T[\lambda; \tilde{x}] = \mathsf{E}\exp\left(-\lambda\mathsf{J}_T[\tilde{x}]\right)\,,$$

что, наряду с результатом А.Зигерта (см., например, [2],[3]) приводит к формуле

$$Q_T[\lambda; \tilde{z}] = \frac{4r\nu\exp(\nu T)}{(r+\nu)^2\exp(rT) - (r-\nu)^2\exp(-rT)}\,, \tag{4}$$

где $r = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\sigma}$. Свойство мероморфности функции $Q_T[\lambda; \tilde{z}]$ и наличие для неё явной формулы (4) позволяет применять для исследования свойств довольно сложного, задаваемого неявно распределения Манделя $P_T(n)$, посредством формулы (1), методы функций комплексного переменного, как для качественных рассуждений, так и для прямых вычислений.

3. Локальная предельная теорема. Пусть $\Upsilon(s)$ – характеристическая функция распределения Манделя

$$\Upsilon(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ins} \Pr\{\tilde{n} = n\}\,. \tag{5}$$

Тогда, очевидно, что имеет место

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$\Upsilon(s) = Q_T[1 - e^{is}; \tilde{z}]\,. \tag{6}$$

□ Согласно определению, имеем

$$\Upsilon(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{isn}}{n!} \mathsf{E} \left(\tilde{J}(T)\right)^n \exp\left(-\tilde{J}(T)\right) = \mathsf{E} \exp\left(\tilde{J}(e^{is} - 1)\right) = Q_T[1 - e^{is}; \tilde{z}]\,.$$

Перестановочность суммирования и вычисления математического ожидания следует из равномерной по $m \in \mathbb{N}$ оценки

$$\left| \sum_{n=0}^{m} \frac{e^{isn}}{n!} (\tilde{J}(T))^n \exp(-\tilde{J}(T)) \right| \leqslant \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} (\tilde{J}(T))^n \exp(-\tilde{J}(T)) < 1\,,$$

которая показывает, что применима теорема Фату для интеграла Лебега (обозначаемого посредством оператора E) по вероятностной и, следовательно, конечной мере от последовательности функций

$$\langle \sum_{n=0}^{m} (\tilde{J}(T))^n \exp(-\tilde{J}(T))\ ;\ m \in \mathbb{N} \rangle\,.$$

Применение этой теоремы как раз и обосновывает перестановочность суммирования по n и оператора E. ■

Следствие 1. *Средние значения* $\mathsf{E}\tilde{n}$ *и* $\mathsf{E}\tilde{J}(T)$ *совпадают.*

□ Так как

$$\mathsf{E}\tilde{n} = -i \left(\frac{\partial}{\partial s} Q_T[1 - e^{is}; \tilde{z}] \right)_{s=0}, \quad \mathsf{E}\tilde{J}(T) = -\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} Q_T[\lambda; \tilde{z}] \right)_{\lambda=0},$$

то утверждение следует из равенства

$$\frac{\partial}{\partial s} Q_T[1 - e^{is}; \tilde{z}] = \frac{d\lambda}{ds} \frac{\partial}{\partial \lambda} Q_T[\lambda; \tilde{z}]$$

при $\lambda = 1 - e^{is}$,

$$\left(\frac{d\lambda}{ds} \right)_{s=0} = -i\,. \quad ■$$

Следствие 2. *Справедлива формула*

$$\mathsf{E}\tilde{n} = T\mathsf{E}|\tilde{z}(s)|^2 = \frac{T\sigma}{\nu} \equiv \Theta\,. \tag{7}$$

□ Используя формулу (4), вычислим производную

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}Q_T[\lambda;\tilde{z}]\right)_{\lambda=0} = \frac{T\sigma}{\nu}\,.$$

Согласно определению комплекснозначного процесса Орнштейна-Уленбека, имеем

$$\mathsf{E}|\tilde{z}(t)|^2 = \mathsf{E}(\tilde{x}(t))^2 + \mathsf{E}(\tilde{y}(t))^2 =$$

$$= \left(\frac{\nu}{\pi\sigma}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\exp\left(-\nu x^2/\sigma\right)dx + \left(\frac{\nu}{\pi\sigma}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2\exp\left(-\nu y^2/\sigma\right)dx = \frac{\sigma}{\nu}\,. \quad \blacksquare$$

Таким образом, среднее $\mathsf{E}\tilde{n}$ полностью определяется одним физически естественным безразмерным параметром $\Theta = \sigma T/\nu$.

Покажем, что локальное поведение распределения вероятностей Манделя при $\Theta \to \infty$ является следствием эргодичности процесса Орнштейна-Уленбека.

Теорема 1. *Для распределения Манделя $P_T(n)$ при $\Theta \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$P_T(n) = \frac{\Theta^n}{n!}\exp\left(-\Theta\right)\left(1 + o(1)\right). \tag{8}$$

□ Для эргодического процесса $\langle\tilde{z}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, с вероятностью 1, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T |\tilde{z}(t)|^2 dt = \mathsf{E}|\tilde{z}(t)|^2\,.$$

Используя Следствие 2 предыдущей леммы, отсюда получаем

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T |\tilde{z}(t)|^2 dt = \frac{\sigma}{\nu}\,. \tag{9}$$

По той же причине, при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо, с той же вероятностью, предельное соотношение

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T |\tilde{z}(t)|^2 dt\right)^n = \left(\mathsf{E}|\tilde{z}(t)|^2\right)^n = \left(\frac{\sigma}{\nu}\right)^n. \tag{10}$$

Формулу (10) запишем в виде

$$\lim_{T\to\infty}\left(T^{-1}\tilde{J}(T)\right)^n = \left(\frac{\sigma}{\nu}\right)^n. \tag{11}$$

На основе полученных предельных соотношений распределение Манделя записывается как

$$P_T(n) = \frac{\Theta^n}{n!}\mathsf{E}(1+\tilde{j}_T)^n \exp(-\Theta(1+\tilde{j}_T))\,, \tag{12}$$

где случайная величина $\tilde{j}_T$ с вероятностью 1 стремится к нулю (становится неслучайной) при $T \to \infty$. Последнее означает, что функция распределения $\Pr\{\tilde{j}_T < x\}$ стремится к функции Хевисайда $\theta(x)$ при $T \to \infty$. Формулу (12) представим в форме

$$P_T(n) = \frac{\Theta^n}{n!}\exp\left(-\Theta\right)\mathsf{E}(1+\tilde{j}_T)^n \exp(-(\sigma T/\nu)\tilde{j}_T)) =$$

$$= \frac{\Theta^n}{n!}\exp\left(-\Theta\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x)^n \exp\left(-\Theta x\right) d\Pr\{\tilde{j}_T < x\}\,.$$

Переходя в интеграле последнего выражения к пределу $T \to \infty$ и используя теорему Хелли, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x)^n \exp\left(-\Theta x\right) d\Pr\{\tilde{j}_T < x\} \to \int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x)^n \exp\left(-\Theta x\right) d\theta(x) = 1.$$

Следовательно, имеет место формула (8). ■

Обозначив пуассоновское распределение

$$P_T^{(0)}(n) = \frac{\Theta^n}{n!}\exp\left(-\Theta\right)\,, \tag{13}$$

из доказанной теоремы заключаем

Следствие. *$P_T(n)/P_T^{(0)}(n) \to 1$ при $T \to \infty$.*

Литература

1. Mandel L. Progress in Optics, Vol.2 / ed. E.Wolf. – Amsterdam: North-Holland, 1963. – 180p.

2. Lax M. Fluctuation and Coherence Phenomena in Classical and Quantum Physics / M. Lax. – New York: Gordon & Breach, 1968.
(пер. на рус. яз.: Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления / М. Лэкс. – М.: Мир, 1974.– 300с.)

3. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / А.С. Мазманишвили. – Киев: Наукова думка, 1987. – 224с.

LOCAL LIMIT THEOREM OF MANDEL's DISTRIBUTION

Yu.P. Virchenko, N.N. Vitokhina

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. The Mandel probability distribution used in quantum optics is studied in the case of one-mode circled polarized stochastic optic irradiation. The local limit theorem is proved for the distribution when the registration time T is increased unboundedly.

Key words: Mandel's distribution, local limit theorem, Ornstein-Uhlenbeck's process.