УДК 517.956.223

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ С ВЕСОМ ФУНКЦИЙ

Г.М. Айрапетян, В.А. Бабаян

Ереванский государственный университет,
Ереван, Республика Армения, e-mail:hhayrapet@gmail.com, bvazgen@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается задача Дирихле в пространстве непрерывных с весом функций. Предполагается, что весовая функция в окрестности единицы имеет степенной неотрицательный порядок. Доказано, что однородная задача Дирихле имеет только тривиальное решение когда весовая функция имеет порядок не больше единицы, а для случая, когда порядок весовой функции больше единицы, число линейно независимых решений однородной задачи определяется по показателю порядка весовой функции. В случае целого или нецелого порядка количество линейно независимых решений различается на единицу. Получены также необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи. Решения записываются в явном виде.

Ключевые слова: задача Дирихле, весовое пространство, краевая задача, ядро Пуассона, непрерывные функции.

1. Введение. Формулировка результатов

Пусть $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости, $T = \partial D^+ = \{z : |z| = 1\}$ – его граница и $D^- = C\setminus\overline{D^+}$. Весовая функция ρ на T определяется по формуле $\rho(t) = |1-t|^\alpha$ где α – действительное число. Пространство функций f, заданных на T , таких, что $f\rho$ непрерывна на T, обозначим $C(\rho)$. Норма в $C(\rho)$ определяется соотношением

$$\|f\|_{C(\rho)} = \max_{t\in T} |f(t)|\rho(t)\,.$$

В этом пространстве рассматриваем задачу Дирихле в следующей постановке:

Задача D. *Пусть $f \in C(\rho)$ – заданная функция. Требуется определить гармоническую в D^+ функцию u, удовлетворяющую условию,*

$$\lim_{r\to 1-0} \|u(rt) - f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,. \qquad (1)$$

Задача D в пространстве интегрируемых с весом функций $L^p(\rho)$, где $p \geqslant 1$, была исследована в работах [1], [2]. В пространстве непрерывных функций граничная задача для систем второго порядка в ограниченной области была исследована в работе [3]. При этом граничные значения рассматриваются в классической постановке (поточечная сходимость). В предлагаемой работе изучается задача D в случае, когда $\alpha \geqslant 0$. Доказывается, что при $\alpha \in (0,1)$ задача D имеет решение тогда и только тогда когда

$$F(1) = 0, \quad F(t) = f(t)|1-t|^{\alpha}\,. \tag{2}$$

При $\alpha \geqslant 1$ задача D имеет решение, если выполняется условие $f(t)(1-t)^{\alpha-1} \in L^1(T)$. Рассмотрена также соответствующая однородная задача (при $f \equiv 0$).

Для точной формулировки полученных результатов введем следующие обозначения. Через T_n обозначим множество полиномов $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ с коэффициентами a_k удовлетворяющими условиям $a_k = (-1)^n \overline{a_{n-k}}$.

Пусть $C_0(\rho) \subset C(\rho)$ пространство функций $f \in C(\rho)$, обладающих свойством $F(1) = 0$, где $F(t) = f(t)|1-t|^{\alpha}$. Через $\tilde{C}_0(\rho) \subset C_0(\rho)$ обозначим класс функций $f \in C_0(\rho)$, обладающих свойством $|f(t)||1-t|^{\alpha-1} \in L^1(T)$.

Положим

$$K(n,f,z) = \frac{1}{(1-z)^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^+ \cup D^-\,,$$

где n – целое число и $f(t)(1-t)^n \in L^1(T)$. Тогда основные результаты работы можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Справедливы утверждения:*

a) *Если $0 < \alpha \leqslant 1$, то однородная задача D имеет только тривиальное решение.*

b) *Если $\alpha > 1$ – нецелое, то общее решение однородной задачи D можно представить в виде*

$$u(z) = \Re \frac{P(z)}{(1-z)^m}\,,$$

где $m = [\alpha]$, $P \in T_m$.

c) *Если $\alpha > 1$ – целое, то*

$$u(z) = \Re \frac{P(z)}{(1-z)^{m-1}}\,,$$

где $P \in T_{m-1}$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in (0,1)$. Для того, чтобы задача D имела решение, необходимо и достаточно условие $f \in C_0(\rho)$.*

Теорема 3. *Пусть $\alpha \geqslant 1$ и $f \in \tilde{C}_0(\rho)$. Тогда задача D имеет решение, и его можно представить в виде*

$$u(z) = \Re(K(m,f,z) + K^*(m,f,z)) + u_0(z)\,,$$

где $u_0(z)$ – общее решение однородной задачи.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $A(D^+ \cup D^-)$ – пространство функций, аналитических в $D^+ \cup D^-$. Параллельно с задачей D рассмотрим также следующую граничную задачу в классе аналитических функций (Задача о скачке).

Задача D'. *Пусть $f \in C(\rho)$. Определить ограниченную на бесконечности функцию $\Phi(z) \in A(D^+ \cup D^-)$, для которой выполняется граничное условие*

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,, \tag{3}$$

где $\Phi^\pm(z)$ сужения функции $\Phi(z)$ на $D^\pm$ соответственно.

Следуя Мусхелишвили, для любой функции $F \in A(D^+ \cup D^-)$ положим

$$F^*(z) = -\overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)}, \quad z \in D^+ \cup D^-\,. \tag{4}$$

Если f – действительнозначная функция и F решение задачи D', то ясно, что F^* также решение задачи D'.

Лемма 1. *Пусть f – действительнозначная функция и Φ решение задачи D'. Тогда*

$$u(z) = \Re(\Phi(z) + \Phi^*(z)) \tag{5}$$

– решение задачи D. Верно и обратное утверждение, т.е. если $u(z)$ решение задачи D, то существует решение задачи D' такое, что имеет место равенство (5).

□ Пусть $\Phi \in A(D^+ \cup D^-)$ – решение задачи D'. Тогда, так как $\Phi(r^{-1}t) = -\overline{\Phi^*(rt)}$ и f – действительнозначная функция, то функция Φ^* – также решение задачи D'. Поэтому из (1) имеем:

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{C(\rho)} = \lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) + \overline{(\Phi^*)^+(rt)} - f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,,$$

$$\lim_{r\to 1-0} \|(\Phi^*)^+(rt) - (\Phi^*)^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{C(\rho)} = \lim_{r\to 1-0} \|(\Phi^*)^+(rt) + \overline{\Phi^+(rt)} - f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,.$$

Следовательно

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Re(\Phi^+(rt) + (\Phi^*)^+(rt)) - f(t)\|_{C(\rho)} = 0,$$

что и означает, что $u(z) = \Re(\Phi(z) + \Phi^*(z))$ при $z \in D^+$ является решением задачи D.

Пусть теперь u – решение задачи D и $u(z) = 2\Re\Phi^+(z)$, где Φ^+ – аналитическая в D^+ функция. Обозначим

$$\Phi^-(z) = -\overline{\Phi^+\left(\frac{1}{\bar z}\right)}, \quad z \in D^-\,. \tag{6}$$

Тогда функция

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in D^+ \\ \Phi^-(z), & z \in D^- \end{cases}.$$

принадлежит $A(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяет соотношению $\Phi^* = \Phi$.

Функцию u можно представить в виде:

$$u(z) = 2\Re\Phi^+(z) = \Re(\Phi^+(z) + (\Phi^*)^+(z))\,. \tag{7}$$

Подставляя это представление в (1) имеем

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) + (\Phi^*)^+(rt) + \overline{\Phi^+(rt)} + \overline{(\Phi^*)^+(rt)} - 2f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,.$$

Учитывая, что $\Phi^+(rt) + (\Phi^*)^+(rt) = \overline{\Phi^+(rt)} + \overline{(\Phi^*)^+(rt)}$, получим

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) + \overline{\Phi^+(rt)} - f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,. \tag{8}$$

Из (6) следует, что $\overline{\Phi^+(rt)} = -\Phi^-\left(r^{-1}t\right)$, поэтому равенство (8) запишется в виде:

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) - \Phi^-\left(r^{-1}t\right) - f(t)\|_{C(\rho)} = 0,$$

что и означает, что функция Φ - решение задачи D'. ■

Пусть C_0 – класс функций из $C(T)$ обращающихся в нуль в окрестности точки $t = 1$. Очевидно, что $C_0 \subset C(\rho)$.

Лемма 2. *Пусть $f \in C(\rho)$ и $\Phi \in A(D^+ \cup D^-)$ удовлетворяет условию (3). Тогда Φ представима в виде*

$$\Phi(z) = K(m, f, z) + \frac{P(z)}{(1-z)^m}\,, \tag{9}$$

где $P(z)$ – полином порядка m, а неотрицательное число m определяется соотношением: $m = [\alpha]$ при $\alpha \notin Z$ и $m = \alpha - 1$ при $\alpha \in Z$.

□ Пусть функция Φ удовлетворяет условию (3). Обозначим

$$f_r(t) = \Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t), \quad 0 < r < 1\,.$$

Умножая обе части последнего равенства на $(1-t)^m$, получаем классическую задачу о скачке (так как $f_r(t)$ бесконечно дифференцируема на T):

$$\Phi^+(rt)(1-t)^m - \Phi^-(r^{-1}t)(1-t)^m = f_r(t)(1-t)^m\,.$$

Так как $|\Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^m| < C|z|^m$ в окрестности бесконечности, имеем

$$\Phi(rz)(1-z)^m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{f_r(\tau)(1-\tau)^m}{\tau - z}d\tau + P_{m,r}(z)\,,$$

где $P_{m,r}(z)$ – некоторый полином порядка m . Переходя к пределу при $r \to 1-0$ получаем представление (5). ■

Лемма 3. *Пусть $f \in C_0$. Тогда функция $K(m, f, z)$ является решением задачи D', т.е.*

$$\lim_{r\to 1-0} \|K(m, f, rt) - K(m, f, r^{-1}t) - f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,.$$

□ Пусть $f \in C_0$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ $f(t) = 0$ при $|t-1| < \delta$. Из условия леммы следует, что $K(m,f,z)$ представима в виде

$$K(m,f,z) = \frac{A_0}{(1-z)^m} + \frac{A_1}{(1-z)^{m-1}} + \ \ldots$$

в некоторой окрестности точки $z=1$. Из этого представления имеем

$$|K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t)| \leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{m-1}}{|1-rt|^{2m}}, \quad |t-1| < \delta\,,$$

где $\delta > 0$. Поэтому

$$\rho(t)|K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t)| \leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^{2m}}\,.$$

При $|1-t| > 2(1-r)$ имеем

$$\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^{2m}} \leqslant \frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{(|1-t|-(1-r))^{2m}} = (1-r)^{\{\alpha\}}\frac{\tau^{1-\{\alpha\}}}{(1-\tau)^{2m}}\,,$$

где $\tau = \frac{1-r}{|1-t|}$. Из условия $|1-t| > 2(1-r)$ следует, что $\tau < \frac{1}{2}$. Поэтому, в этом случае

$$|K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t)|\rho(t) \leqslant C(1-r)^{\{\alpha\}}\,.$$

При $|1-t| \leqslant 2(1-r)$ также получаем

$$\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^{2m}} \leqslant C\frac{(1-r)^{2m+\{\alpha\}}}{(1-r)^{2m}} = C(1-r)^{\{\alpha\}}\,,$$

поэтому при $|1-t| < \delta$

$$|K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t) - f(t)|\rho(t) \leqslant C(1-r)^{\{\alpha\}}\,.$$

Следовательно,

$$|K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t) - f(t)| \to 0\,,$$

равномерно, при $|1-t| < \delta$.

Пусть теперь $t \in T_\delta \equiv \{t : |t| = 1, |t-1| \geqslant \delta\}$. Поскольку

$$K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t) = \left(\frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_\delta}\frac{f(\tau)(1-\tau)^m}{\tau - rt}d\tau +$$

$$+\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_\delta}\frac{f(\tau)(1-\tau)^m(1-r^2)}{|\tau - rt|^2}|d\tau| = I_1(r,t) + I_2(r,t)$$

и

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m}-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right|<C_1(\delta)(1-r)\,,$$

то при $t\in T_\delta$

$$\lim_{r\to 1-0}|I_1(r,t)|\rho(t)=0\,.$$

Далее, из свойств ядра Пуассона [3], имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_\delta}\frac{f(\tau)(1-\tau)^m(1-r^2)}{|\tau-rt|^2}|d\tau|\to f(t)(1-t)^m$$

равномерно, и поэтому

$$I_2(r,t)=\frac{1}{(1-rt)^m}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_\delta}\frac{f(\tau)(1-\tau)^m(1-r^2)}{|\tau-rt|^2}|d\tau|\to f(t)$$

равномерно. ■

Положим

$$\|f\|_1=\int\limits_T|f(t)||1-t|^{\alpha-1}|dt|<\infty\,. \tag{10}$$

Лемма 4. *Пусть $f\in\tilde C_0(\rho)$ и $\varepsilon>0$ – произвольное число. Существует $f_\varepsilon\in C_0$ такое, что*

$$\|f_\varepsilon-f\|_{C(\rho)}<\varepsilon,\quad \|f_\varepsilon-f\|_1<\varepsilon\,.$$

□ Обозначим ω функцию из класса C_0^∞ такую, что $\omega(x)=1$ при $|x|<1$ и $\omega(x)=0$ при $|x|>2$ и рассмотрим функцию $\omega_\varepsilon(x)=\omega\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right)$. В качестве f_ε возьмем функцию $f_\varepsilon=f(1-\omega_\varepsilon)$. Для нормы в весовом пространстве $C(\rho)$ получим

$$\|f_\varepsilon-f\|_{C(\rho)}=\max_{t\in T}|f_\varepsilon-f||1-t|^\alpha=\max_{t\in T}|f\omega_\varepsilon||1-t|^\alpha=\max_{|t-1|<2\varepsilon}|f||1-t|^\alpha\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0\,.$$

Стремление к нулю следует из принадлежности функции f классу $C_0(\rho)$ (класс функций $f\in C(\rho)$, обладающих свойством $F(1)=0$, где $F(t)=f(t)|1-t|^\alpha$).

Для нормы, определяющейся по формуле (10), получим

$$\|f_\varepsilon-f\|_1=\int\limits_T|f_\varepsilon-f||1-t|^{\alpha-1}|dt|=\int\limits_T|f\omega_\varepsilon||1-t|^{\alpha-1}|dt|\leqslant\int\limits_{|t-1|<2\varepsilon}|f||1-t|^{\alpha-1}|dt|\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0$$

по теореме об абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [5], стр.345). ■

Лемма 5. *Пусть $t,\tau\in T$ и $r\in(0,1)$. Тогда*

$$\sup_{r\in(0,1)}\frac{|1-t|^{1+\{\alpha\}}(1-r)|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{|1-rt|^2|\tau-rt|}<\infty\,.$$

□ Пусть α – целое число. Тогда $\{\alpha\}=0$. Так как $|1-\tau|<|1-rt|+|\tau-rt|$, то

$$\frac{|1-t|(1-r)|1-\tau|}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\leqslant\frac{|1-t|(1-r)}{|1-rt||\tau-rt|}+\frac{|1-t|(1-r)}{|1-rt|^2}\leqslant 2+2=4\,.$$

Пусть $\{\alpha\}>0$. Учитывая, что

$$\frac{|1-t|^{1+\{\alpha\}}(1-r)}{|1-rt|^{1+\{\alpha\}}|\tau-rt|}<2^{1+\{\alpha\}}\,,$$

получаем

$$\frac{|1-t|^{1+\{\alpha\}}(1-r)|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\leqslant\frac{|1-t|^{1+\{\alpha\}}(1-r)}{|1-rt|^{1+\{\alpha\}}|\tau-rt|}+$$

$$+\frac{|1-t|^{1+\{\alpha\}}(1-r)(|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}-|1-rt|^{1-\{\alpha\}})}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{1+\{\alpha\}}+A\frac{|\tau-rt|^{1-\{\alpha\}}(1-r)|1-t|^{1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\leqslant 2^{1+\{\alpha\}}+A\cdot 2^{1+\{\alpha\}}\,. \quad ■$$

3. Доказательство основных теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $0<\alpha\leqslant 1$. По лемме 2 общее решение однородной задачи D' имеет вид $\Phi(z)=A$, где A – комплексное постоянное число. Учитывая формулу (5), получаем, что решение u однородной задачи D, тождественно равно нулю.

Рассмотрим случай, когда $\alpha>1$ и α нецелое. Тогда по лемме 2 решение однородной задачи D' представляется в виде

$$\Phi(z)=A_0+\frac{A_1}{1-z}+...+\frac{A_m}{(1-z)^m}\,.$$

Так как

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m}-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right|\leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{m-1}}{|1-rt|^{2m}}\,,$$

получим

$$L_r\equiv\left|\frac{1}{(1-rt)^m}-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right|\rho(t)\leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^{2m}}\,. \tag{11}$$

Пусть $|1-t|\leqslant 2(1-r)$. Тогда из (11) имеем

$$L_r\leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^{2m}}\leqslant C\frac{(1-r)^{2m+\{\alpha\}}}{|1-r|^{2m}}=C(1-r)^{\{\alpha\}}\,. \tag{12}$$

Если же $|1-t|>2(1-r)$, то $0<\tau\equiv\frac{1-r}{|1-t|}<\frac{1}{2}$, и

$$|1-rt|\geqslant|1-t|-(1-r)=|1-t|(1-\tau)\,.$$

Учитывая это неравенство, из (11) получим:

$$L_r \leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-t|^{2m}(1-\tau)^{2m}} \leqslant C\frac{\tau^{1-\{\alpha\}}}{(1-\tau)^{2m}}(1-r)^{\{\alpha\}} \leqslant C(1-r)^{\{\alpha\}}\,. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что

$$L_r \equiv \left|\frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right|\rho(t) \leqslant C(1-r)^{\{\alpha\}}\,,$$

то есть

$$\lim_{r\to 1-0}\|\Phi^+(rt)-\Phi^-(r^{-1}t)\|_{C(\rho)} = 0\,.$$

Учитывая формулу (5), получаем доказательство утверждения b) теоремы. Если α целое, то рассмотрим функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{(1-z)^m}\,.$$

Будем иметь

$$\inf\|\Psi^+(rt)-\Psi^-(r^{-1}t)\|_{C(\rho)} > 0\,,$$

поэтому эта функция не является решением однородной задачи D'. Следовательно, $\Phi(z) = \frac{P(z)}{(1-z)^{m-1}}$, где P – некоторый полином порядка $m-1$. Применяя снова формулу (5), получаем доказательство утверждения c) теоремы. ■

Доказательство теоремы 2. Необходимость условия $f \in C_0(\rho)$ непосредственно следует из (1). Пусть теперь $f \in C_0(\rho)$. Докажем, что функция $K(m,f,z)$ является решением задачи D. Так как при условии теоремы $m=0$ и функция f интегрируема, получим:

$$K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{f(\tau)(1-r^2)\bar{\tau}d\tau}{|\tau-rt|^2}\,. \tag{14}$$

Предположим сначала, что $f \in C_0$. Тогда из (14), учитывая свойства интеграла Пуассона, получим

$$K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t) \to f(t) \tag{15}$$

равномерно при $t \in T, r \to 1-0$. Далее, так как $f \in C_0$, существует $\delta > 0$ такое, что $f(t) \equiv 0$ при $|t-1| < \delta$. Поэтому из (14) имеем

$$\|K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t)\| = \sup_{r\in(0,1)}|1-t|^\alpha\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_\delta}\frac{|f(\tau)|(1-r^2)|d\tau|}{|\tau-rt|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{C(\rho)}\sup_{r\in(0,1)}\frac{|1-t|^\alpha}{2\pi}\int\limits_T\frac{|1-\tau|^{-\alpha}(1-r^2)|d\tau|}{|\tau-rt|^2}\,. \tag{16}$$

Из результатов [2] следует, что

$$\sup_{r\in(0,1)}\frac{|1-t|^\alpha}{2\pi}\int\limits_T\frac{|1-\tau|^{-\alpha}(1-r^2)|d\tau|}{|\tau-rt|^2} \leqslant C\,.$$

Поэтому из (16) имеем

$$\|K(m,f,rt)-K(m,f,r^{-1}t)\|_{C(\rho)} \leqslant C\|f\|_{C(\rho)} \,. \tag{17}$$

Функции класса C_0 всюду плотны в $C_0(\rho)$. Поэтому, используя (15) и (17), завершаем доказательство теоремы. ■

Доказательство теоремы 3. Из определения функции $K(m,f,z)$ имеем

$$K(m,f,rt)-K(m,f,r^{-1}t)=I_1(r,t)+I_2(r,t)\,,$$

где

$$I_1(r,t)=\left(\frac{1}{(1-rt)^m}-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^m}{\tau-rt}d\tau\,,$$

$$I_2(r,t)=\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^m(1-r^2)}{|\tau-rt|^2}|d\tau|\,.$$

Так как

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m}-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right|\leqslant A\frac{(1-r)|1-t|^{m-1}}{(1-rt)^{2m}}\,,$$

то

$$\|I_1(r,t)\|_{C(\rho)}\leqslant\frac{(1-r)|1-t|^{1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^2}\int\limits_T|f(\tau)||1-\tau|^{\alpha-1}\frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{|\tau-rt|}|dt|\,.$$

В силу леммы 5, получаем

$$\|I_1(r,t)\|_{C(\rho)}\leqslant A\|f\|_1\,.$$

Далее, имеем

$$\|I_2(r,t)\|_{C(\rho)}\leqslant A|1-t|^{\{\alpha\}}\int\limits_T|f(\tau)||1-\tau|^{\alpha}\frac{1-r^2}{|1-\tau|^{\{\alpha\}}|\tau-rt|^2}|d\tau|\,.$$

Учитывая, что

$$\sup_{r\in(0,1)}|1-t|^{\{\alpha\}}\int\limits_T\frac{(1-r^2)|d\tau|}{|1-\tau|^{\{\alpha\}}|\tau-rt|^2}<\infty\,,$$

получаем

$$\|I_1(r,t)\|_{C(\rho)}\leqslant A\|f\|_{C(\rho)}\,.$$

Пусть теперь $f\in\tilde{C}_0(\rho)$ и $\varepsilon>0$. В силу леммы 4, $f_\varepsilon\in C_0$ можно подобрать так, чтобы имели место неравенства $\|f_\varepsilon-f\|_{C(\rho)}<\varepsilon,\quad \|f_\varepsilon-f\|_1<\varepsilon$. Будем иметь

$$\|K(m,f,rt)-K(m,f,r^{-1}t)-f(t)\|_{C(\rho)}\leqslant\|K(m,f_\varepsilon,rt)-K(m,f_\varepsilon,r^{-1}t)-f_\varepsilon(t)\|_{C(\rho)}+$$

$$+\|K(m,f-f_\varepsilon,rt)-K(m,f-f_\varepsilon,r^{-1}t)\|_{C(\rho)}+\|f_\varepsilon-f\|_{C(\rho)}\,.$$

Применяя лемму 4 получаем

$$\|K(m,f,rt)-K(m,f,r^{-1}t)-f(t)\|_{C(\rho)}\leqslant \|K(m,f_\varepsilon,rt)-K(m,f_\varepsilon,r^{-1}t)-f_\varepsilon(t)\|_{C(\rho)}+$$

$$+A(\|f_\varepsilon-f\|_1+\|f_\varepsilon-f\|_{C(\rho)})$$

Применяя лемму 3, получаем, что если $f\in\tilde{C}_0(\rho)$, то задача D' имеет решение. Применяя лемму 1 и формулу (5), завершаем доказательство теоремы. ■

4. Заключение

В статье рассматрена задача Дирихле в пространстве непрерывных с весом функций $C(\rho)$ в единичном круге $D^+=\{z:\ |z|<1\}$ в следующей постановке: Пусть $f\in C(\rho)$ – заданная функция. Требуется определить гармоническую в D^+ функцию u, удовлетворяющую условию,

$$\lim_{r\to 1-0}\|u(rt)-f(t)\|_{C(\rho)}=0\,,$$

где $\rho(t)=|1-t|^\alpha$, $t\in T$, $T=\{z:\ |z|=1\}$, а $\|f\|_{C(\rho)}=\max\limits_{t\in T}|f(t)|\rho(t)$ – норма пространства $C(\rho)$.

Устанавливается, что при $0<\alpha\leqslant 1$ однородная задача Дирихле имеет только тривиальное решение, а при $\alpha>1$ число линейно независимых решений однородной задачи равняется $[\alpha]$, если α нецелое число и $\alpha-1$, если α – целое. Получены также необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи. Решения записываются в явном виде.

Литература

1. Kazarian K.S. Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals // Studia Math. – 1987. – 86. – P.97-130.

2. Айрапетян Г.М. Задача Дирихле в пространствах с весом // Известия НАН Армении. Математика. – 2001. – 36;3. – С.22-44.

3. Soldatov A.P. Generalized potentials of double layer for second order elliptic systems // Научные ведомости БелГУ. – 2009. – 13(68);17/1. – С.103- 109.

4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

ON DIRICHLET PROBLEM IN WEIGHTED SPACE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

H.M. Hayrapetyan, V.A. Babayan

Erevan State University,
Erevan, Armenia, e-mail: hhayrapet@gmail.com, bvazgen@gmail.com

Abstract. The Dirichlet problem in weighted space of continuous functions is considered. It is assumed that weighted function has power nonnegative order. It is proved that the homogeneous problem has only trivial solution when order of the weighted function is not more than one. The number of linearly independent solutions of homogeneous problem is defined by the power of weighted function. The number of linearly independent solution in the case of integral power is differed by one from the one in the case of not integral power. Necessary and sufficient conditions of inhomogeneous problem solvability are obtained. All solutions are found in explicit form.

Key words: Dirichlet problem, weighted space, boundary value problem, Poisson kernel, continuous functions.