УДК 517.983

О СВОЙСТВАХ ВЕСОВЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ МАЛЬМСТЕНА [4]

А.В. Глушак, О.А. Покручин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: e-mail:Glushak@bsu.edu.ru,
pokru4in.oleg@yandex.ru

Аннотация. Установлены формулы, связывающие решение весовых задач Коши для абстрактного дифференциального уравнения Мальмстена с операторной функцией Бесселя и проинтегрированной косинус-оператор-функцией.

Ключевые слова: весовые задачи Коши, проинтегрированная косинус-оператор-функция, операторная функция Бесселя.

Ослабление требований на разрешающие операторы задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков привело к понятию проинтегрированной полугруппы и проинтегрированной косинус-оператор-функции (в дальнейшем ПКОФ). В работах [1, 2] приводятся формулы, связывающие ПКОФ $C_{k/2}(t)$ с операторной функцией Бесселя (ОФБ) $Y_k(t)$ – разрешающим оператором задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t)\,, \qquad t > 0\,, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = 0\,. \tag{2}$$

В уже процитированных работах [1, 2] приводится и определение ПКОФ, и формула связи ОФБ $Y_k(t)$ с ПКОФ $C_{k/2}(t)$, имеющая вид

$$Y_{2\alpha}(t)u_0 = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}t^\alpha}\left(C_\alpha(t)u_0 - \int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau\right), \tag{3}$$

где $P_{\alpha-1}(\tau)$ — сферическая функция Лежандра [3, с. 202], $\alpha > 0$.

В работе [4] было показано, что ОФБ и ПКОФ могут быть использованы и для построения решений весовых задач Коши для уравнения Мальмстена [5, с. 113]. По сравнению с [4], в настоящей работе доказаны утверждения о единственности решения рассматриваемых задач и исследованы дальнейшие свойства уравнения Мальмстена.

[4]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613).

1. Первая весовая задача Коши. Пусть E – банахово пространство, A – оператор, действующий в E, с областью определения $D(A)$. Рассмотрим следующую весовую задачу Коши для уравнения Мальмстена

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) + \frac{l}{t^2}u(t) = t^m Au(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(t^{(k-1-\nu(m+2))/2}u(t)\right) = u_0\,, \tag{5}$$

где параметр $\nu = \dfrac{\sqrt{(k-1)^2-4l}}{m+2} \geq 0$.

Отметим сразу, что при сделанных предположениях, для рассматриваемого дифференциального уравнения второго порядка (4) не ставится ("снимается") второе начальное условие при $t = 0$, что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах при $t = 0$.

Определение 1. *Решением задачи (4), (5) называется функция $u(t)$, которая при $t > 0$ дважды непрерывно дифференцируема, принимает значения, принадлежащие $D(A)$, и удовлетворяет уравнению (4) и условию (5).*

Разрешающий оператор задачи (4), (5) будем обозначать $Y_{k,l}^m(t)$, а множество операторов A, для которых задача (4), (5) однозначно разрешима, обозначим через $G_{k,l}^m$. Наряду с этим множеством рассмотрим множество G_k операторов A, для которых однозначно разрешима задача Коши для уравнения ЭПД (1), (2).

Теорема 1. *Пусть $\nu \geq 0$, $m > -2$, $u_0 \in D(A)$ и оператор $A \in G_{2\nu+1}$. Тогда $A \in G_{k,l}^m$, т.е., задача (4), (5) однозначно разрешима, ее решение представимо в виде*

$$u(t) \equiv Y_{k,l}^m(t)u_0 = t^{(1-k+\nu(m+2))/2}Y_{2\nu+1}(\tau)u_0\,, \tag{6}$$

и при этом справедлива оценка

$$\|Y_{k,l}^m(t)\| \leq Mt^{(1-k+\nu(m+2))/2}e^{\omega\tau}\,, \tag{7}$$

где $\tau = \dfrac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}$, ω — показатель роста ОФБ $Y_{2\nu+1}(\tau)$, $M \geq 1$.

□ Подстановкой $u(t) = t^{(1-k+\nu(m+2))/2}w(\tau)$ задача (4), (5) сводится к следующей задаче:

$$w''(\tau) + \frac{2\nu+1}{\tau}w'(\tau) = Aw(\tau)\,, \tag{8}$$

$$w(0) = u_0\,. \tag{9}$$

Из (8), (9) следует представление (6) и оценка (7), поскольку для ОФБ $Y_{2\nu+1}(t)$ имеет место оценка (см. [6])

$$\|Y_{2\nu+1}(\tau)\| \leq Me^{\omega\tau}\,. \tag{10}$$

Справедливость начального условия (5) вытекает из условий (2), которым удовлетворяет функция $Y_{2\nu+1}(\tau)u_0$.

Методом от противного докажем единственность решения задачи (8), (9). Пусть $w_1(\tau)$ и $w_2(\tau)$ — два решения задачи (8), (9). Рассмотрим функцию двух переменных $v(\tau, s) = f(Y_{2\nu+1}(s)(w_1(\tau) - w_2(\tau)))$, где $f \in E^*$ (E^* — сопряженное пространство), $\tau, s \geq 0$. Она очевидно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{2\nu+1}{\tau}\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{2\nu+1}{s}\frac{\partial v}{\partial s} \tag{11}$$

и условиям

$$v(0, s) = \frac{\partial v(t, 0)}{\partial s} = 0\,. \tag{12}$$

Истолкуем $v(\tau, s)$ как обобщенную функцию умеренного роста и применим к (11), (12) преобразование Фурье-Бесселя (см. [7]) по переменной s. Для образа $V(\tau, \lambda)$, $\lambda \geq 0$ получим следующую задачу

$$\frac{\partial^2 V(\tau, \lambda)}{\partial \tau^2} + \frac{2\nu+1}{\tau}\frac{\partial V(\tau, \lambda)}{\partial \tau} = -\lambda^2 V(\tau, \lambda)\,, \tag{13}$$

$$V(0, \lambda) = 0\,. \tag{14}$$

Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$V(\tau, \lambda) = \tau^{-\nu}(\xi_1(\lambda) J_{-\nu}(\lambda\tau) + \xi_2(\lambda) N_{-\nu}(\lambda\tau))\,,$$

где $J_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя, $N_\nu(\cdot)$ – функция Неймана. Так как функция Бесселя $J_{-\nu}(\lambda\tau)$ при $\tau \to 0$ имеет порядок $\tau^{-\nu}$ и $\nu > 0$, то необходимо $\xi_1(\lambda) = 0$. Функция Неймана $N_{-\nu}(\lambda\tau)$ при $\tau \to 0$ имеет порядок τ^{ν}, поэтому из (14) следует $\xi_2(\lambda) = 0$. Следовательно, $v(\tau, s) \equiv 0$ для любого $s \geq 0$. В силу произвольности функционала $f \in E^*$ при $s = 0$ получаем равенство $w_1(\tau) \equiv w_2(\tau)$ и единственность решения установлена. ■

Замечание 1. При $m > -1$ решение (6) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \to 0} (t^{(k-1-\nu(m+2))/2} u(t))' = 0\,.$$

Для проверки этого факта воспользуемся формулой (см. [6])

$$Y_k'(t) u_0 = \frac{t}{k+1} Y_{k+2}(t) A u_0\,.$$

Будем иметь

$$(t^{(k-1-\nu(m+2))/2} u(t))' = (Y_{2\nu+1}(\tau) u_0)'_t = t^{m/2} Y'_{2\nu+1}(\tau) u_0 = \frac{2}{(m+2)(2\nu+2)} t^{m+1} Y_{2\nu+3}(\tau) A u_0\,.$$

Поскольку по условию замечания $m > -1$, то требуемое соотношение выполнено.

Замечание 2. При $l = m = 0$, $k \geq 1$ задача (4), (5) превращается в задачу (1), (2). Условие $u'(0) = 0$ в этом случае может быть снято.

Теорема 2. *Пусть* $\nu \geq 0$, $m > -2$, $u_0 \in D(A)$, *оператор* $A \in G^m_{k,l}$ *и для* $Y^m_{k,l}(t)$ *справедлива оценка* (7). *Тогда* $A \in G_{2\nu+1}$, *т.е., задача* (1), (2) *при* $k = 2\nu + 1$ *однозначно разрешима и ее решение представимо в виде*

$$u(t) \equiv Y_{2\nu+1}(t)u_0 = \left(\frac{m+2}{2}t\right)^{(k-1-\nu(m+2))/(m+2)} Y^m_{k,l}\left(\left(\frac{m+2}{2}t\right)^{2/(m+2)}\right) u_0\,. \tag{15}$$

□ Подстановкой

$$u(t) = s^{(k-1-\nu(m+2))/2} w(s), \quad s = \left(\frac{m+2}{2}t\right)^{2/(m+2)}$$

задача (1), (2) сводится к следующей задаче:

$$w''(s) + \frac{k}{s}w'(s) + \frac{l}{s^2}w(s) = s^m A w(s)\,, \tag{16}$$

$$\lim_{s\to 0}\left(s^{(k-1-\nu(m+2))/2} w(s)\right) = u_0\,. \tag{17}$$

Из (16), (7) следует однозначная разрешимость задачи (1), (2) и представление (15) для $u(t)$, а из оценки (7) – оценка (10). □

Теорема 3. *Пусть* $\nu \geq 0$, $m > -2$, $u_0 \in D(A)$. *Тогда* $G_{2\nu+1} = G^m_{k,l}$.

□ Справедливость теоремы 3 вытекает из теорем 1 и 2. ■

2. Вторая весовая задача Коши. В этом пункте для уравнения Мальмстена оценки (4) рассмотрим еще одну весовую задачу Коши, но уже с двумя начальными условиями, в отличие от первой весовой задачи. При $0 < \nu < \dfrac{1}{2}$, $m > -2$ будем разыскивать решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to 0}(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t)) = u_0, \quad \lim_{t\to 0} t^{-m/2}(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t))' = 0\,. \tag{18}$$

Определение 2. *Решением задачи* (4), (18) *называется функция* $u(t)$, *которая при* $t > 0$ *дважды непрерывно дифференцируема, принимает значения, принадлежащие* $D(A)$, *и удовлетворяет уравнению* (4) *и условиям* (18).

Покажем, что операторная функция Бесселя может быть также использована для построения решения задачи (4), (18). Разрешающий оператор этой задачи обозначим через $Z^m_{k,l}(t)$, а множество операторов A, для которых задача (4), (18) однозначно разрешима, обозначим через $H^m_{k,l}$.

Теорема 4. *Пусть* $0 < \nu < \dfrac{1}{2}$, $m > -2$, *оператор* $A \in G_{1-2\nu}$ *и* $u_0 \in D(A)$. *Тогда* $A \in H^m_{k,l}$, *т.е., задача* (4), (18) *имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$Z^m_{k,l}(t)u_0 = t^{(1-k-\nu(m+2))/2} Y_{1-2\nu}(\tau)u_0, \quad \tau = \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\,, \tag{19}$$

и при этом справедлива оценка

$$\|Z_{k,l}^m(t)\| \leq Mt^{(1-k-\nu(m+2))/2}e^{\omega\tau}\,. \tag{20}$$

□ Подстановкой $u(t) = t^{(1-k-\nu(m+2))/2}w(\tau)$ задача (4), (18) сводится к следующей задаче:

$$w''(\tau) + \frac{1-2\nu}{\tau}w'(\tau) = Aw(\tau)\,, \tag{21}$$

$$w(0) = u_0, \quad w'(0) = 0\,. \tag{22}$$

Из (21), (22) следует представление (19) и оценка (20). Справедливость условий (18) вытекает из условий (2), которым удовлетворяет функция $Y_{1-2\nu}(\tau)u_0$. Единственность решения данной задачи доказана в работе [8]. ■

Теорема 5. *Пусть* $0 < \nu < \dfrac{1}{2}$, $m > -2$, $u_0 \in D(A)$, *оператор* $A \in H_{k,l}^m$ *и для* $Z_{kl}^m(t)$ *справедлива оценка (20). Тогда* $A \in G_{1-2\nu}$, *т.е., задача (1), (2) имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$Y_{1-2\nu}(t)u_0 = \left(\frac{m+2}{2}t\right)^{(k-1+\nu(m+2))/(m+2)} Z_{kl}^m\left(\left(\frac{m+2}{2}t\right)^{2/(m+2)}\right)\,. \tag{23}$$

□ Доказательство аналогично теореме 2. ■

Теорема 6. *Пусть* $0 < \nu < 1/2, \quad m > -2 \quad u_0 \in D(A)$. *Тогда* $G_{1-2\nu} = H_{k,l}^m$.

□ Справедливость теоремы 6 вытекает из теорем 4 и 5. ■

Замечание 3. При $l = m = 0$, $0 < k < 1$ задача (4), (18) превращается в задачу (1), (2) для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Приводимое далее следствие вытекает из теорем 1, 4 и формулы сдвига по параметру (см. [6])

$$Y_m(t) = \frac{2}{B(k/2+1/2, m/2-k/2)}\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^kY_k(ts)\,ds\,, \qquad m > k\,, \tag{24}$$

где $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функция.

Следствие 1. *Пусть* $0 < \nu < 1/2$, $m > -1$ *и* $A \in H_{k,l}^m$. *Тогда имеет место вложение* $H_{k,l}^m \subset G_{k,l}^m$ *и при этом*

$$Y_{k,l}^m(t) = \frac{2t^{\nu(m+2)}}{B(1-\nu,2\nu)}\int_0^1 (1-s^2)^{2\nu+1}s^{(k-1)/(m+2)-\nu+1}Z_{k,l}^m(ts^{2/(m+2)})\,ds\,. \tag{25}$$

□ Функция $Y_{2\nu+1}(t)$ выражается через $Y_{1-2\nu}(t)$ при помощи формулы (24)

$$Y_{2\nu+1}(t) = \frac{2}{B(1-\nu,2\nu)}\int_0^1 (1-s^2)^{2\nu+1}s^{1-2\nu}Y_{1-2\nu}(ts)\,ds\,. \tag{26}$$

Учитывая в (26) равенства (6) и (19), получим требуемое соотношение (25). ■

3. Третья весовая задача Коши. В этом пункте рассмотрим случай, когда $\frac{1}{2} \le \nu < 1$, не охваченный второй весовой задачей. Будем искать решение уравнения Мальмстена (4), удовлетворяющее условиям:

$$\lim_{t\to 0}\left(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t)\right) = u_0\,, \qquad \lim_{t\to 0} t^{1-\nu(m+2)}\left(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t)\right)' = 0\,. \tag{27}$$

Покажем, что и в этом случае решение может быть построено с помощью ОФБ.

Теорема 7. *Пусть* $\frac{1}{2} \le \nu < 1$, $m > -2$, *оператор* $A \in G_p$ *при некотором* $p \ge 0$ *и* $u_0 \in D\left(A^N\right)$, *где* $N = [N_1/2] + 2$ *([·] – целая часть числа),* N_1 *– наименьшее целое, удовлетворяющее неравенству* $2N_1 \ge p - 1 + 2\nu$. *Тогда задача* (4), (27) *имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$Z_{k,l}^m(t)u_0 = t^{(1-k-\nu(m+2))/2}Y_{1-2\nu}(\tau)u_0\,, \qquad \tau = \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\,. \tag{28}$$

□ Как доказано в теореме 4, функция $Z_{k,l}^m(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (4) и первому условию в (27). Справедливость второго начального условия следует из равенства

$$t^{1-\nu(m+2)}\left(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t)\right)' = t^{1-\nu(m+2)}\left(Y_{1-2\nu}(\tau)u_0\right)' = \tau^{1-2\nu}Y'_{1-2\nu}(\tau)u_0\,.$$

Для доказательства единственности заметим, что подстановкой $u(t) = t^{(1-k-\nu(m+2))/2}w(\tau)$ уравнение Мальмстена (4) сводится к уравнению ЭПД

$$w''(\tau) + \frac{1-2\nu}{\tau}w'(\tau) = Aw(\tau)\,,$$

а условия (27) превращаются в условия

$$w(0) = u_0, \quad \lim_{\tau\to 0}\left(\tau^{1-2\nu}w'(\tau)\right) = 0\,.$$

Единственность решения последней задачи доказана в [8]. ■

4. Дальнейшие свойства уравнения Мальмстена.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда задача*

$$v'(t) = Av(t), \qquad v(0) = u_0$$

равномерно корректна и соответствующая C_0*-полугруппа* $T(t)$ *представима в виде*

$$T(t) = \frac{(m+2)^{-2\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)t^{\nu+1}} \quad \times$$

$$\times \quad \int_0^\infty \tau^{((m+2)(\nu+1)+m+k-1)/2}e^{-\tau^{m+2}/(m+2)^2t}Y_{k,l}^m(\tau)d\tau\,. \tag{29}$$

□ В работе [6] приведена формула

$$T(t)=\frac{1}{2^k\Gamma(k/2+1/2)t^{(k+1)/2}}\int_0^\infty s^k e^{-s^2/4t}Y_k(s)\,ds\,, \tag{30}$$

связывающая ОФБ $Y_k(t)$, $k>0$ и порождаемую ею полугруппу $T(t)$. Из (30) и соотношения (15) следует вышеуказанное представление (29). ■

Наряду с весовыми задачами Коши рассмотрим весовую задачу Дирихле, т.е., задачу отыскания решения уравнения Мальмстена

$$w''(t)+\frac{p}{t}w'(t)+\frac{q}{t^2}w(t)=-t^rAw(t), \tag{31}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(t^{(p-1+\mu(r+2))/2}w(t)\right)=u_0,\quad \sup_{t\geq 0}\|t^{(p-1+\mu(r+2))/2}w(t)\|\leq M \tag{32}$$

с некоторой постоянной $M>0$, где параметр $\mu=\dfrac{\sqrt{(p-1)^2-4q}}{r+2}\geq 0$

Теорема 9. *Пусть $\mu>0$, $r>-2$ и выполнены условия теоремы 5, при этом в неравенстве (20) постоянная $\omega=0$. Тогда функция*

$$w(t)=\frac{2^{2(1+\mu-\nu)}t^{(1-p+\mu(m+2))/2}}{(m+2)^{1-2\nu}(r+2)^{2\mu}B(\mu,1-\nu)}\quad\times$$

$$\times\quad\int_0^\infty y^{(k-1+m+(m+2)(1-\nu))/2}\left(\left(\frac{2}{r+2}\right)^2t^{r+2}+\left(\frac{2}{m+2}\right)^2y^{m+2}\right)^{\nu-\mu-1}Z_{kl}^m(y)u_0dy \tag{33}$$

является единственным решением задачи (31), (32).

□ Подстановкой $w(t)=t^{(1-p-\mu(r+2))/2}W(\tau)$, $\tau=\frac{2}{r+2}t^{(r+2)/2}$ задача (31), (32) сводится к задаче

$$W''(\tau)+\frac{1-2\mu}{\tau}W'(\tau)=-AW(\tau)\,, \tag{34}$$

$$W(0)=u_0,\quad \sup_{\tau\geq 0}\|W(\tau)\|\leq M. \tag{35}$$

Если $\mu>0$, то $1-2\mu<1$ и из (34), (35) следует (см. [9]) представление (33) и единственность решения задачи (31), (32). ■

Замечание 4. При $p<1$, $k<1$ и $m=l=q=r=0$ задача (31), (32) превращается в задачу (4), (5) работы [9].

Замечание 5. Уравнение Мальмстена (4) в случае $m<-2$ с помощью замены переменной $t=1/x$ сводится к уже рассмотренному уравнению Мальмстена вида

$$\hat{u}''(x)+\frac{2-k}{x}\hat{u}'(x)+\frac{l}{x^2}\hat{u}(x)=x^{-m-4}A\hat{u}(x)\,,$$

где $\hat{u}(x)=u(1/x)$. Осталось только заметить, что $-m-4>-2$ при $m<-2$.

Замечание 6. В случае, когда $m = -2$ уравнение Мальмстена (4) превращается в уравнение

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = \frac{1}{t^2}(A - lI)u(t)\,, \tag{36}$$

которое заменой $t = e^x$ сводится к уравнению

$$\tilde{u}''(x) + (k-1)\tilde{u}'(x) = (A - lI)\tilde{u}(x)\,,$$

где $\tilde{u}(x) = u(e^x)$. Для этого уравнения корректна, например, задача Коши с условиями

$$\tilde{u}(0) = u_0\,, \qquad \tilde{u}'(0) = u_1$$

в предположении что $A \in G_0$, а, следовательно, и $A - lI \in G_0$.

Литература

1. Глушак А.В. О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42;5. – С.583-589.

2. Глушак А.В. Задача Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с генератором проинтегрированной косинус-оператор-функции // Научные Ведомости БелГУ. Сер. Физико-математические науки. – 2007. – 6(37);13. – С.3-8.

3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М.: Физматгиз, 1963.

4. Глушак А.В., Покручин О.А. Весовые задачи Коши для абстрактного уравнения Мальмстена // Научные Ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2010. – 23(94);21. – С.68-74.

5. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – М.: Иностранная литература, 1949.

6. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя -// ДАН. – 1997. – 352;5. – С.587-589.

7. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. – 1955. – 36;2. – С.299-310.

8. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов, сер. математика. – 6. – С.55-56.

9. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта // Дифференц. уравнения. – 1999. – 35;1. – С.128-130.

ABOUT PROPERTIES OF WEIGHTED CAUCHY PROBLEM FOR ABSTRACT MALMSTEN EQUATION

A.V. Glushak, O.A. Pokruchin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:Glushak@bsu.edu.ru, pokru4in.oleg@yandex.ru

Abstract. Formulas connecting the solution of weight Cauchy problems of abstract differential Malmsten equation with operator Bessel function and integrated cosine operator function are found.

Key words: weight Cauchy problem, the integrated cosine operator function, the Bessel operator function.