УДК 517.958

# РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ [6]

**В. Л. Прядиев**

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail:pryad@mail.ru

**Аннотация.** Доказывается формула, связывающая размерность пространства решений задачи Штурма-Лиувилля на геометрическом графе Γ с размерностями пространств решений таких же задач на подграфах, получаемых из Γ выбрасыванием какой-либо точки, не являющейся граничной вершиной.

**Ключевые слова:** геометрический граф, задача Штурма-Лиувилля, размерность пространства решений.

## 1. Объект исследования

Всюду ниже $\Gamma$ – конечный и замкнутый геометрический граф, т. е. $\Gamma := \bigcup\limits_{e\in\mathcal{E}} e$, где $\mathcal{E}$ – конечный набор отрезков кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые ещё обладают свойством, что любые два отрезка кривых из $\mathcal{E}$ либо не пересекаются, либо пересекаются ровно в одной точке, причём являющейся их общим концом. Дополнительно о $\Gamma$ будем предполагать, что $\Gamma$, как множество в $\mathbb{R}^n$, является связным.

Для каждого ребра $e \in \mathcal{E}$ зафиксируем какую-либо его непрерывную параметризацию $\pi_e : [\alpha_e;\beta_e] \to e$ (здесь $\alpha_e$ и $\beta_e$ – некоторые вещественные числа, $\alpha_e < \beta_e$, а непрерывность $\pi_e$ понимается в смысле евклидовых метрик в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$). О $\pi_e$ также предполагается взаимная однозначность как сужения $\pi_e$ на $[\alpha_e;\beta_e)$, так и сужения $\pi_e$ на $(\alpha_e;\beta_e]$; тем самым не исключается случай $\pi_e(\alpha_e) = \pi_e(\beta_e)$, т. е. рёбра-петли. В соответствии с параметризацией рёбер вводится понятие производной для произвольной функции, определённой на $\Gamma \setminus \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ – множество вершин $\Gamma$, т. е. $\mathcal{V} := \bigcup\limits_{e\in\mathcal{E}} \partial e$; здесь $\partial e := \{\pi_e(\alpha_e);\pi_e(\beta_e)\}$. А именно, пусть комплекснозначная функция $y$ определена в некоторой окрестности[7] точки $x \in e\setminus\partial e$, т. е. $y\circ\pi_e$ определена в некоторой окрестности точки $\pi_e^{-1}(x) \in (\alpha_e;\beta_e)$; здесь и далее через $\pi_e^{-1}$ обозначено отображение, обратное к сужению $\pi_e$ на $(\alpha_e;\beta_e)$. Числа $y'(x) := (y\circ\pi_e)'(\pi_e^{-1}(x))$ и $y''(x) := (y\circ\pi_e)''(\pi_e^{-1}(x))$ будем называть соответственно первой и второй производной функции $y$ в точке $x$.

[6]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (госконтракты № П693 от 20.05.2010 г., № 02.740.11.0613 от 29.03.2010 г.).

[7]Окрестность в $\Gamma$ понимается в смысле индуцированной на $\Gamma$ из $\mathbb{R}^n$ евклидовой топологии.

Чтобы определить производные в вершинах $\Gamma$, нам понадобятся дополнительные построения (эти построения существенны только при наличии рёбер-петель). Половинками ребра $e$ назовём кривые $h := \{\pi_e(s)\,|\,\alpha_e \leqslant s \leqslant \gamma_e\}$ и $\eta := \{\pi_e(s)\,|\,\gamma_e \leqslant s \leqslant \beta_e\}$, где $\gamma_e := (\alpha_e + \beta_e)/2$. Будем при этом использовать следующие обозначения: $\pi_h := \pi_e\big|_{[\alpha_e;\gamma_e]}$, $\pi_\eta := \pi_e\big|_{[\gamma_e;\beta_e]}$, $\alpha_h := \alpha_e$, $\beta_h := \gamma_e$, $\alpha_\eta := \gamma_e$, $\beta_\eta := \beta_e$. Множество всех половинок рёбер $\Gamma$ обозначим через $\mathcal{H}$. Для любой вершины $v$ через $\mathcal{H}(v)$ обозначим $\{h \in \mathcal{H}\,|\,\partial h \ni v\}$. Если $h \in \mathcal{H}(v)$ (т. е. $\partial h \ni v$), то будем говорить, что $h$ примыкает к $v$.

Если теперь функция $y$ определена в некоторой окрестности вершины $v$, то производную функции $y$ в вершине $v$ вдоль кривой $h \in \mathcal{H}(v)$ в направлении от $v$ определим следующим образом:

$$y'_h(v) := \begin{cases} (y\circ \pi_h)'(\alpha_h) & , \text{ если } x = \pi_h(\alpha_h) \\ -(y\circ \pi_h)'(\beta_h) & , \text{ если } x = \pi_h(\beta_h) \end{cases}.$$

Далее, будем предполагать, что во множестве $\mathcal{V}$ вершин $\Gamma$ зафиксировано подмножество $\partial\Gamma$ такое, что множество $\Gamma\setminus\partial\Gamma$ связно. Точки из $\partial\Gamma$ будем называть граничными вершинами геометрического графа $\Gamma$, а точки из $J := \mathcal{V}\setminus\partial\Gamma$ – внутренними вершинами геометрического графа $\Gamma$.

В дальнейшем множество пар $(x,h)$ таких, что $x \in J$, а $h \in \mathcal{H}(x)$, будем обозначать через $\mathcal{P}$.

Формула

$$(Ly)(x) := \begin{cases} -\;\; y''(x) + q(x)y(x) & , \text{ если } x \in \Gamma\setminus\mathcal{V} \\ -\sum\limits_{h\in\mathcal{H}(x)} \alpha(x,h)y'_h(x) + q(x)y(x) & , \text{ если } x \in J \end{cases},$$

в которой отображения $q:\Gamma\to\mathbb{C}$ и $\alpha:\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ заданы, определяет дифференциальный оператор $L$, для которого будем рассматривать краевую задачу

$$\begin{cases} (Ly)(x) = 0 & (x \in \Gamma\setminus\partial\Gamma) \\ y(x) = 0 & (x \in \partial\Gamma) \end{cases}, \tag{1}$$

где $y$ – искомая комплекснозначная функция, непрерывная в вершинах $\Gamma$.

Вопрос о размерности $\pi$ пространства решений задачи (1) эквивалентен вопросу о геометрической кратности собственного значения соответствующей спектральной задачи. Последний изучался многими авторами (см., например, [1-4]). Было замечено, что значение $\pi$ зависит от расположения нулей решений задачи (1). Например, если у задачи (1) есть решение $y_0$ без нулей во внутренних вершинах и циклах $\Gamma$, то $\pi = 1$ (см., например, [1, теорема 3, из § 2 главы III], либо [2, теорема 3], либо [3, теорема 5.4], либо [4, теорема 10]). Также отмечалось влияние на значение $\pi$ т. н. "гладкого примыкания", когда все решения задачи (1) тождественно равны нулю на некотором ребре, примыкающем к некоторой граничной вершине (см., например, лемму 5.2 из [3] или,что то же самое, лемму пункта 5.4.5 из [5]).

В настоящей статье обобщаются результаты статьи [6] – с сохранением разработанного в ней подхода. Это позволяет усилить отмеченные результаты из [1-5].

## 2. Формулировка и доказательство основного результата

Пусть $c$ – некоторая точка из $\Gamma \setminus \partial\Gamma$, а $\ell$ – количество компонент связности множества $\Gamma \setminus \{c\}$ (не исключено, что $\ell = 1$ – такое возможно, если $c$ принадлежит некоторому циклу $\Gamma$ или если одновременно $c \in J$ и $|\mathcal{H}(c)| = 1$). Обозначим замыкания этих компонент связности через $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\ell$. Заметим, что каждое из множеств $\Gamma_j$ является графом. Будем считать, что

1) $\partial\Gamma_j = (\partial\Gamma \cap \Gamma_j) \cup \{c\}$;

2) множество всех внутренних вершин $\Gamma_j$ совпадает с $(J \cap \Gamma_j) \setminus \{c\}$;

3) параметризация геометрического графа $\Gamma_j$ наследуется от $\Gamma$, т. е., во-первых, если $e \in \mathcal{E}$ является ребром $\Gamma_j$, то его параметризация, как ребра $\Gamma_j$ равна $\pi_e$, и во-вторых, если $e \in \mathcal{E}$ и $c \in e \setminus \partial e$, то параметризацией $e_1 := \{\pi_e(s) \,|\, \alpha_e \leqslant s \leqslant \pi_e^{-1}(c)\}$, как ребра того единственного графа $\Gamma_j$, для которого $e_1$ является ребром, объявляется сужение $\pi_e$ на $[\alpha_e; \pi_e^{-1}(c)]$, а параметризацией $e_2 := \{\pi_e(s) \,|\, \pi_e^{-1}(c) \leqslant s \leqslant \beta_e\}$ – сужение $\pi_e$ на $[\pi_e^{-1}(c); \beta_e]$.

Рассмотрим теперь задачи

$$\begin{cases} (Ly)(x) = 0 & (x \in \Gamma_j \setminus \partial\Gamma_j) \\ y(x) = 0 & (x \in \partial\Gamma_j) \end{cases}, \tag{2}$$

$j = \overline{1, \ell}$. Далее, через $\pi_j$ обозначается размерность линейного пространства решений задачи (2).

Для каждого $j = \overline{1, \ell}$ посредством $\mathcal{H}_j(c)$ обозначим множество всех половинок рёбер геометрического графа $\Gamma_j$, примыкающих к $c$.

Приводимая ниже теорема показывает, что разность между $\pi$ и $\sum\limits_{j=1}^{\ell} \pi_j$ может принимать только значения $-1$, $0$ и $1$, а какое именно – зависит от выполнения двух условий:

**(А)** для любого $j = \overline{1, \ell}$ всякое решение задачи (2) удовлетворяет равенству

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_j(c)} \alpha(c, h) y_h'(c) = 0\,, \tag{3}$$

где в случае $c \notin J$ полагается, что $\alpha(c, h)$ равно 1 для обеих $h$, примыкающих к $c$,

**(Б)** всякое решение задачи (1) обращается в нуль в точке $c$.

Для любого утверждения $\mathcal{B}$ определим число

$$\mathrm{T}_{\mathcal{B}} := \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{B} \text{ истинно} \\ 0, & \text{если } \mathcal{B} \text{ ложно} \end{cases}.$$

**Теорема.** *Имеет место равенство* $\pi = \sum\limits_{j=1}^{\ell} \pi_j + \mathrm{T}_{(\mathrm{A})} - \mathrm{T}_{(\mathrm{Б})}$.

□ Обозначим через $Y$ линейное пространство всех решений задачи (1), а через $Y_0$ – линейное подпространство функций из $Y$, обращающихся в нуль в точке $c$. Отображение $y \mapsto y(c)$, рассматриваемое на $Y$, есть линейный функционал на $Y$, и $Y_0$ есть ядро этого функционала; поэтому $\dim Y_0 = \dim Y - 1 + \mathrm{T}_{(\mathrm{Б})}$, т. е. $\dim Y_0 = \pi - 1 + \mathrm{T}_{(\mathrm{Б})}$. Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\dim Y_0 = \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j + \mathrm{T}_{(\mathrm{A})} - 1\,. \tag{4}$$

Рассмотрим случай $\mathrm{T}_{(\mathrm{A})} = 0$, т. е. случай, когда для некоторого значения $k$ параметра $j$ задача (2) имеет решение, удовлетворяющее неравенству

$$\sum_{h\in\mathcal{H}_k(c)} \alpha(c,h)y_h'(c) \neq 0\,.$$

В этом случае (4) примет вид

$$\dim Y_0 = \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j - 1\,. \tag{5}$$

Допустим пока, что

$$\pi_k = 1 \quad \text{и} \quad \pi_j = 0 \quad (j \neq k)\,. \tag{6}$$

Пусть $y \in Y_0$. Тогда $y(c) = 0$, и значит, для любого $j$ сужение $y\big|_{\Gamma_j}$ есть решение задачи (2), откуда в силу (6) вытекает, во-первых, что

$$y\big|_{\Gamma_j} \equiv 0 \qquad (j \neq k)\,, \tag{7}$$

и во-вторых, существование $\beta \in \mathbb{C}$ такого, что

$$y\big|_{\Gamma_k} \equiv \beta\varphi\,, \tag{8}$$

где $\varphi$ – некоторое нетривиальное решение задачи (2) при $j = k$. Из (7) и (8) следует

$$0 = -\sum_{h\in\mathcal{H}(c)} \alpha(c,h)y_h'(c) + q(c)y(c) = -\beta \sum_{h\in\mathcal{H}_k(c)} \alpha(c,h)\varphi_h'(c)\,,$$

что ввиду $\sum\limits_{h\in\mathcal{H}_k(c)} \alpha(c,h)\varphi_h'(c) \neq 0$ влечёт $\beta = 0$. Объединяя теперь (7) и (8), получим $y \equiv 0$, что ввиду произвольности выбора $y$ означает, что $\dim Y_0 = 0$. Но тогда из (6) вытекает (5).

Теперь рассмотрим случай, когда (6) не выполняется. Пусть $I_1$ – множество всех тех $j$, для которых $\pi_j > 0$ и некоторое решение задачи (2) не удовлетворяет равенству (3). Пусть $I_2$ – множество всех тех $j$, для которых $\pi_j > 0$, но всякое решение задачи (2) удовлетворяет равенству (3). Наконец, пусть $I_3$ – множество всех тех $j = \overline{1,\ell}$, которые не вошли ни в $I_1$, ни в $I_2$. Множество $I_1$ непусто, так как $I_1 \ni k$. Для каждого $j \in I_1 \cup I_2$ в пространстве решений задачи (2) существует базис $\varphi_1^j, \ldots, \varphi_{\pi_j}^j$. При этом можно считать, что для $j \in I_1$ этот базис выбран так, что для функционала $\mu_j$, определённого формулой $\mu_j(\varphi) := \sum\limits_{h\in\mathcal{H}_j(c)} \alpha(c,h)\varphi_h'(c)$, выполнены равенства

$$\mu_j(\varphi_1^j) = 1, \quad \mu_j(\varphi_m^j) = 0 \quad (m = \overline{2,\pi_j})\,. \tag{9}$$

Рассмотрим функции:

$$v_1^j(x) = \begin{cases} \varphi_1^k(x) & , \text{ если } x \in \Gamma_k \\ -\varphi_1^j(x) & , \text{ если } x \in \Gamma_j \\ 0 & , \text{ если } x \in \Gamma \setminus (\Gamma_k \cup \Gamma_j) \end{cases} \qquad (j \in I_1 \setminus \{k\})\,, \tag{10}$$

$$v_m^j(x) = \begin{cases} \varphi_m^j(x) & , \text{ если } x \in \Gamma_j \\ 0 & , \text{ если } x \in \Gamma \setminus \Gamma_j \end{cases} \qquad (j \in I_1,\ m = \overline{2,\pi_j})\,, \tag{11}$$

$$v_m^j(x) = \begin{cases} \varphi_m^j(x) & , \text{ если } x \in \Gamma_j \\ 0 & , \text{ если } x \in \Gamma \setminus \Gamma_j \end{cases} \qquad (j \in I_2,\ m = \overline{1,\pi_j})\,. \tag{12}$$

Непосредственно проверяется, что эти функции являются нетривиальными решениями задачи (1), принадлежащими $Y_0$, и что их число равно $|I_1 \setminus \{k\}| + \sum\limits_{j\in I_1}(\pi_j - 1) + \sum\limits_{j\in I_2}\pi_j$, то есть $\sum\limits_{j=1}^{\ell}\pi_j - 1$. Покажем линейную независимость функций (10)–(12). Пусть

$$\sum_{j\in I_1\setminus\{k\}} D_1^j v_1^j(x) + \sum_{j\in I_1}\sum_{m=2}^{\pi_j} D_m^j v_m^j(x) + \sum_{j\in I_2}\sum_{m=1}^{\pi_j} D_m^j v_m^j(x) = 0 \qquad (x \in \Gamma)\,, \tag{13}$$

где $D_m^j$ – некоторые комплексные числа. Сужая это равенство на подграфы $\Gamma_j$ для $j \in I_2 \cup (I_1 \setminus \{k\})$, получим в силу (10)-(12), что

$$\sum_{m=1}^{\pi_j} D_m^j \varphi_m^j(x) = 0 \quad (x \in \Gamma_j)\,, \quad j \in I_2\,,$$

$$-D_1^j\varphi_1^j(x) + \sum_{m=2}^{\pi_j} D_m^j \varphi_m^j(x) = 0 \qquad (x \in \Gamma_j)\,, \qquad j \in I_1 \setminus \{k\}\,,$$

откуда, ввиду определения функций $\varphi_m^j$, вытекает, что

$$D_m^j = 0 \qquad (j \in I_2 \cup (I_1 \setminus \{k\})\,, \quad m = \overline{1,\pi_j})\,. \tag{14}$$

Из (14) и (13) следует тождество

$$\sum_{m=2}^{\pi_k} D_m^k \varphi_m^k(x) = 0 \qquad (x \in \Gamma_k)\,,$$

которое, ввиду линейной независимости функций $\varphi_m^k$, влечёт

$$D_m^k = 0 \quad (m = \overline{2, \pi_k}) \ ,$$

что вместе с (14) означает линейную независимость функций (10)–(12).

Для доказательства равенства (5) остаётся показать, что если $y \in Y_0$, то $y$ представима в виде линейной комбинации функций (10)–(12). Итак, пусть $y \in Y_0$. Тогда $y(c) = 0$, и значит, для любого $j = \overline{1, \ell}$ функция $y\big|_{\Gamma_j}$ есть решение задачи (2). Но тогда, во-первых, для любого $j \in I_3$ выполнено $y\big|_{\Gamma_j} \equiv 0$, и во-вторых, для любого $j \in I_2 \cup (I_1 \setminus \{k\})$ функция $y\big|_{\Gamma_j}$ представима в виде линейной комбинации функций $\varphi_1^j, \ldots, \varphi_{\pi_j}^j$, то есть для каждого $j \in I_2 \cup (I_1 \setminus \{k\})$ существует последовательность $\{\xi_m^j\}_{m=1}^{\pi_j}$ комплексных чисел, такая, что

$$y\big|_{\Gamma_j} = \sum_{m=1}^{\pi_j} \xi_m^j \varphi_m^j \ . \tag{15}$$

Рассмотрим на $\Gamma$ функцию

$$z = y - \sum_{j \in I_2} \sum_{m=1}^{\pi_j} \xi_m^j v_m^j - \sum_{j \in I_1 \setminus \{k\}} \left[ -\xi_1^j v_1^j + \sum_{m=2}^{\pi_j} \xi_m^j v_m^j \right] . \tag{16}$$

Если $z \equiv 0$ на $\Gamma$, то требуемое утверждение доказано. Поэтому рассмотрим случай, когда $z$ нетривиальна. В силу (16), $z$ есть решение задачи (1). Далее, ввиду (15) и (10)-(12), выполнено

$$z\big|_{\Gamma_j} \equiv 0 \qquad (j \neq k). \tag{17}$$

Значит, $z(c) = 0 = z_h'(c)$ для всех $h \in \mathcal{H}(c) \setminus \mathcal{H}_k(c)$, что влечёт

$$\mu_k(z) = q(c)z(c) - \sum_{j \neq k} \mu_j(z) = 0 \ . \tag{18}$$

Из (17) следует, что $z\big|_{\Gamma_k} \not\equiv 0$, поэтому (с учётом $z(c) = 0$) сужение $z\big|_{\Gamma_k}$ есть нетривиальное решение задачи (2) при $j = k$, причём линейно независимое, в силу (18), с $\varphi_1^k$. Значит, во-первых, $\pi_k > 1$, во-вторых,

$$z\big|_{\Gamma_k} = \sum_{m=1}^{\pi_k} \xi_m^k \varphi_m^k \tag{19}$$

при некоторых $\xi_1^k, \ldots, \xi_{\pi_k}^k$ из $\mathbb{C}$.

Из (18), (19) и (9) вытекает, что

$$0 = \mu_k(z) = \sum_{m=1}^{\pi_k} \xi_m^k \mu(\varphi_m^k) = \xi_1^k \ ,$$

то есть $\xi_1^k = 0$, и поэтому равенство (19) можно уточнить:

$$z\big|_{\Gamma_k} = \sum_{m=2}^{\pi_k} \xi_m^k \varphi_m^k .$$

А это равенство, в силу (11) (учитываем, что $k \in I_1$) и (17), равносильно равенству

$$z = \sum_{m=2}^{\pi_k} \xi_m^k v_m^k \,,$$

которое в совокупности с (16) доказывает представимость $y$ в виде линейной комбинации функций (10)–(12).

Таким образом, равенство (5) доказано и в случае, когда (6) не выполняется.

Итак, если $\mathrm{T}_{(\mathrm{A})} = 0$, то (4) выполняется. Пусть теперь $\mathrm{T}_{(\mathrm{A})} = 1$. Тогда (4) примет вид:

$$\dim Y_0 = \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j \ . \tag{20}$$

Пусть

$$\pi_j = 0 \quad (j = \overline{1,\ell}). \tag{21}$$

Пусть также $y \in Y_0$. Тогда для любого $j = \overline{1,\ell}$ функция $y\big|_{\Gamma_j}$ есть решение задачи (2), что ввиду (21) влечёт тривиальность $y\big|_{\Gamma_j}$ для всех $j = \overline{1,\ell}$, то есть тривиальность $y$. Значит, $\dim Y_0 = 0$, что в совокупности с (21) влечёт (20).

Теперь допустим, что (21) не выполняется, то есть $I_1 = \varnothing$, $I_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим функции (12), являющиеся, в силу своего определения, нетривиальными решениями задачи (1), принадлежащими $Y_0$. Число этих функций равно

$$\sum_{j\in I_2} \pi_j \left( = \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j \right),$$

и они линейно независимы (это установлено при рассмотрении случая $\mathrm{T}_{(\mathrm{A})} = 0$).

Остаётся доказать, таким образом, что всякая функция из $Y_0$ представима в виде линейной комбинации функций (12). Итак, пусть $y \in Y_0$. Тогда для любого $j = \overline{1,\ell}$ функция $y\big|_{\Gamma_j}$ есть решение задачи (2), что влечёт, во-первых, тривиальность $y\big|_{\Gamma_j}$ при $j \in I_3$, во-вторых, что для любого $j \in I_2$ существует последовательность $\{\xi_m^j\}_{m=1}^{\pi_j}$ комплексных чисел, такая, что выполнено (15), откуда в силу (12) вытекает равенство

$$y = \sum_{j\in I_2} \sum_{m=1}^{\pi_j} \xi_m^j v_m^j \,. \quad \blacksquare$$

**Замечание 1.** Выражение $(py')'(x)$, где $p$ – положительная непрерывная функция, после замены $t = \omega(x) := \int^{x} [p(s)]^{-1}\, ds$ принимает вид: $z''(t)/p(\omega^{-1}(t))$, где $z := y \circ \omega^{-1}$.

Поэтому утверждение доказанной теоремы сохраняет силу и в том случае, если в формуле оператора $L$ производную $y''$ заменить на $(py')'$.

**Замечание 2.** В конце первого раздела настоящей статьи были отмечены некоторые результаты из работ [1–5]. С учётом замечания 1, уже упомянутая лемма 5.2 из [3] есть частный случай доказанной выше теоремы 1. Что же касается утверждения "Если у задачи (1) есть решение $y_0$ без нулей во внутренних вершинах и циклах $\Gamma$, то $\pi = 1$", то оно следует из теоремы 1 индукцией по количеству $S$-зон[8] функции $y_0$. В самом деле, база индукции имеется – это следует, например, из теоремы Штурма о перемежаемости нулей для уравнения $Ly = 0$ (элементарное доказательство этой теоремы содержится в [1] – см. там теорему 1 главы III). Если же $S$-зон – хотя бы две, то, предполагая, что для меньшего количества $S$-зон доказываемое утверждение верно, рассмотрим крайнюю $S$-зону $\Gamma_0$ функции $y_0$, т. е. $S$-зону, которая пересекается ровно с одной из других $S$-зон $y_0$ (причём ровно в одной точке – т. к. у $y_0$ нет нулей в циклах $\Gamma$). Беря в качестве $c$ эту точку пересечения (в этом случае $\ell = 2$), будем иметь: $\pi_1 = 1 = \pi_2$ – в силу предположения индукции. Поэтому, так как ещё и $\mathrm{T}_{(\mathrm{A})} = 0$ (достаточно рассмотреть сужение $y_0$ на $\Gamma_0$ и учесть, что $y_0'(c) \neq 0$), то применение теоремы 1 даёт: $\pi = 2 - \mathrm{T}_{(\text{Б})}$. Применяя теперь уже упомянутую теорему Штурма к сужению $y_0$ и любого другого решения уравнения $Ly = 0$ на $\Gamma_0$, получим $\mathrm{T}_{(\text{Б})} = 1$, что и влечёт окончательно $\pi = 1.7$

## Литература


1. Пенкин О.М. Некоторые вопросы качественной теории краевых задач на графах / Дисс. канд. физ.-мат. наук. / Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1988. – 88 с.

2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. О теоремах сравнения для уравнений на графах // Дифференц. уравнения. – 1989. – 25;7. – С.1141-1150.

3. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 272 с.

4. Покорный Ю.В. О неосцилляции обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств на пространственных сетях // Дифференц. уравнения. – 2001. – 37;5. – С.661-672.

5. Pokornyi Yu.V., Pryadiev V.L. The qualitative Sturm-Liouville theory on spatial networks // J.Math.Sci. – 2004. – 119;6. – P.788-835.

6. Завгородний М.Г., аль-Обейд А., Прядиев В.Л. Геометрическая кратность собственных значений задачи Дирихле на графе / М.Г. Завгородний. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1992. – Деп. в ВИНИТИ 22.09.92, № 2821-В29.'– 8 с.


[8]Под $S$-зоной функции $y_0$ здесь понимается есть замыкание компоненты связности множества $\{x \in \Gamma \,|\, y_0(x) \neq 0\}$.

# RECURRENT FORMULA OF SOLUTION SPACE DIMENSION FOR STURM-LIOUVILLE's PROBLEM ON GEOMETRICAL GRAPH

**V. L. Pryadiev**

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:e-mail:pryad@mail.ru

**Abstract.** It is proved the formula connecting dimension of solutions space of Sturm-Liouville's problem on geometrical graph $\Gamma$ with dimensions of solution spaces of same problems on subgraphs which are obtained by exception of any point from $\Gamma$ which is not boundary vertex.

**Key words:** geometrical graph, Sturm-Liouville problem, dimension of solutions space.