КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК УДК 517.925

СИММЕТРИЧНОСТЬ СПЕКТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматриваются линейные гамильтоновы системы с произвольным числом степеней свободы. Доказывается, что спектр генератора каждой такой системы расположен центрально симметричным образом относительно нуля в комплексной плоскости.

Ключевые слова: спектр, линейные гамильтоновы системы, центральная симметрия.

Будем рассматривать линейные гамильтоновы системы с $n \in \mathbb{N}$ степенями свободы. Это означает, что их фазовое пространство векторов $\langle \mathsf{P}, \mathsf{Q} \rangle$ представляет собой область в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, то есть $\mathsf{P} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{Q} \in \mathbb{R}^n$, и гамильтониан H каждой из таких систем является квадратичной формой

$$H = \frac{1}{2}(\mathcal{A}\mathsf{P}, \mathsf{P}) + (\mathcal{B}\mathsf{P}, \mathsf{Q}) + \frac{1}{2}(\mathcal{C}\mathsf{Q}, \mathsf{Q})\,, \tag{1}$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – $n \times n$-матрицы такие, что $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$, $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}$ и $\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{C}) \leqslant 1$ (в противном случае, система имеет меньшее число степеней свободы).

Гамильтонова система, порождаемая гамильтонианом H, представляет собой линейную систему $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для вектор-функций $\langle \mathsf{P}(t), \mathsf{Q}(t) \rangle$ от $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{\mathsf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathsf{Q}}\,, \qquad \dot{\mathsf{Q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathsf{P}} \tag{2}$$

(здесь каждое уравнение является n-мерным вектором в $\mathbb{R}^n$), и поэтому

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathsf{P}} \\ \dot{\mathsf{Q}} \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} \mathsf{P} \\ \mathsf{Q} \end{pmatrix}\,, \tag{3}$$

где матрица $\mathcal{G}$ – генератор группы сдвигов по t имеет вид

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B} & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B}^T \end{pmatrix}\,. \tag{4}$$

В настоящем сообщении мы устанавливаем замечательное свойство матриц такого вида, которое сформулировано в следующем утверждении.

Теорема. *Спектр матрицы $\mathcal{G}$ симметричен на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ относительно $0 \in \mathbb{C}$.*

□ Пусть $P(\lambda) = \det(\mathcal{G} - \lambda \cdot \mathbf{1})$ – полином, определяющий точки λ спектра матрицы $\mathcal{G}$, которые являются его нулями,

$$P(\lambda) = 0\,. \tag{5}$$

В силу совпадения детерминантов у взаимно транспонированных матриц, спектральное уравнение (5) эквивалентно следующему

$$\det(\mathcal{G}^T - \lambda \cdot \mathbf{1}) = 0\,, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{G}^T = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & \mathcal{A} \\ -\mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}.$$

Пусть $2n \times 2n$-матрица $\mathcal{U}$ имеет блочную структуру

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{I}$ – $n \times n$-матрица. Она обладает свойствами $\mathcal{U}^T = -\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^2 = -\mathbf{1}$. Кроме того, для любой $2n \times 2n$-матрицы

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{11} & \mathcal{V}_{12} \\ \mathcal{V}_{21} & \mathcal{V}_{22} \end{pmatrix},$$

состоящей из блоков – $n \times n$-матриц $\mathcal{V}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, выполняется

$$\mathcal{U}\mathcal{V}\mathcal{U} = \begin{pmatrix} -\mathcal{V}_{22} & \mathcal{V}_{21} \\ \mathcal{V}_{12} & -\mathcal{V}_{11} \end{pmatrix}.$$

Тогда, ввиду инвариантности значения детерминанта относительно циклической перестановки сомножителей под знаком функционала $\det(\cdot)$ и чётности размерности матрицы $\mathcal{G}^T$, имеем

$$\det(\mathcal{G}^T - \lambda \cdot \mathbf{1}) = \det \mathcal{U}^2(\mathcal{G}^T - \lambda \cdot \mathbf{1}) = \det \mathcal{U}(\mathcal{G}^T - \lambda \cdot \mathbf{1})\mathcal{U} =$$

$$= \det(\mathcal{U}\mathcal{G}^T\mathcal{U} + \lambda \cdot \mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} -\mathcal{B} + \lambda \cdot \mathbf{1} & -\mathcal{C} \\ -\mathcal{A} & \mathcal{B}^T + \lambda \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} = P(-\lambda)\,.$$

Отсюда следует, что каждое решение уравнения (5) является решением уравнения $P(-\lambda) = 0$. ■

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966.

SPECTRUM SYMMETRY OF LINEAR HAMILTONIAN SYSTEMS

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. Linear hamiltonian systems with arbitrary number of freedom degree are studied. It is proved that the generator spectrum of each such a system is situated by symmetrical way relative to zero on complex plane.

Key words: spectrum, linear hamiltonian system, central symmetry.