УДК: 533.72

ОСОБЕННОСТИ ГРАВИТАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОЙ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ[2)]

Н.Н.Миронова

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: mironovanadya@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача о влиянии форм-фактора (отношения полуосей) и нагрева поверхности твёрдой аэрозольной частицы сфероидальной формы на силу и скорость её движения в поле силы тяжести. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может существенно отличаться от температуры окружающей её среды. Численные оценки показали, что нагрев поверхности частицы существенно влияет на силу сопротивления и скорость гравитационного падения.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, гравитационное движение, нагретая частица, сфероид.

Самым распространенным видом движения аэрозольных частиц является гравитационное движение, т.е. движение под действием силы тяжести за счёт разности удельных весов частицы и окружающей среды [1, 2]. На нём основаны такие технологические процессы как флотация, седиментация, получение псевдосжиженных слоёв и т.п. В частности, гранулометрический анализ аэродисперсных систем посредством седиментации является одним из самых практичных и широко применяемых методов дисперсионного анализа. Скорость седиментации частиц можно существенно корректировать за счёт нагрева их поверхности (например, с помощью лазера), поскольку коэффициенты молекулярного переноса (вязкость, теплопроводность) и плотность газообразной среды существенно зависят от температуры. В связи с этим, представляет как теоретический, так и практический интерес гравитационное движение нагретых частиц в вязких газообразных средах.

Рассмотрим особенности описания движения неравномерно нагретой твёрдой аэрозольной частицы сфероидальной формы. Нагрев поверхности частицы может быть обусловлен, например, протеканием в объёме частицы и на её поверхности химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.п. Поэтому под неравномерно нагретой аэрозольной частицей будет пониматься такая, внутри которой действуют источники (стоки) тепла, неоднородно распределенные в её объёме. Отношение этих тепловых источников к объёму частицы называется объёмной плотностью тепловых источников и обозначается функцией $q_p(x, y, z)$. Считается, что эта функция задана. Наличие источников тепла внутри

[2]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 - 2013 годы (Государственный контракт № П29 от 25 марта 2010 г.)

частицы приводит к тому, что средняя температура её поверхности может существенно отличаться от температуры окружающей газообразной среды вдали от неё. Возникающее при этом повышение температуры поверхности частицы оказывает влияние на теплофизические характеристики газообразной среды (вязкость, теплопроводность, плотность) и тем самым может существенно повлиять на распределение полей скорости и давления в её окрестности и, в конечном итоге, на действующую на неё силу и скорость её движения.

Среднее расстояние между частицами, у значительной части, встречающихся на практике аэродисперсных систем намного больше характерного размера частиц. В таких условиях учёт влияния аэрозоля на развитие физического процесса можно проводить, основываясь на знание законов динамики движения и тепло- и массообмена с бесконечной окружающей средой отдельных частиц. Поэтому изучение закономерностей движения отдельных частиц в вязких средах является важной актуальной задачей. Кроме того, важно отметить, что исследование движения отдельных частиц в неподвижной среде является составной частью изучения их поведения в произвольном потоке.

Рассмотрим движение твёрдой неравномерно нагретой аэрозольной частицы сфероидальной формы (сплюснутый сфероид) в вязкой газообразной среде в поле силы тяжести. Описывать движение будем в сфероидальной системе координат τ, η, ϕ, при этом целесообразно ввести систему координат, связанную с центром масс движущейся частицы. В этом случае задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком газа со скоростью $\boldsymbol{U}_\infty$ ($\boldsymbol{U}_\infty || \, Oz$), которая подлежит определению из условий задачи.

В такой системе отсчёта, в которой нагретая частица неподвижна, а внешняя среда (газ) движется (как целое) в сторону, противоположную направлению фактического движения частицы, со скоростью $\boldsymbol{U}_\infty = -\boldsymbol{U}_p$ ($\boldsymbol{U}_p$ – скорость дрейфа нагретой частицы относительно лабораторной системы координат).

При этом распределение поля скорости U_g, давления P_g и температур вне T_g и внутри T_p нагретой частицы описывается следующей системой газодинамических уравнений [1,2]:

$$\frac{\partial P_g}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left\{\mu_g\left(\frac{\partial U_k}{\partial x^j} + \frac{\partial U_j}{\partial x^k} - \frac{2}{3}\delta_k^j \frac{\partial U_m}{\partial x^m}\right)\right\} + F_k, \quad m,\ k,\ j = 1,\ 2,\ 3, \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}(\rho_g \boldsymbol{U}_g) = 0\,, \qquad (2)$$

$$\mathrm{div}\,(\lambda_g \nabla T_g) = 0\,, \qquad (3)$$

$$\mathrm{div}\,(\lambda_p \nabla T_p) = -q_p \qquad (4)$$

с граничными условиями

$$\lim_{\tau\to\tau_0} U_\tau\,(\tau,\eta) = 0\,, \quad \lim_{\tau\to\tau_0} U_\eta\,(\tau,\eta) = 0\,, \quad \lim_{\tau\to\tau_0} T_p(\tau) = \lim_{\tau\to\tau_0} T_g(\tau)\,,$$

$$\lambda_g(\nabla T_g \boldsymbol{e}_\tau) = \lambda_p(\nabla T_p \boldsymbol{e}_\tau) + \sigma_0\sigma_1(T_g^4 - T_\infty^4) \quad (\tau = \tau_0)\,, \qquad (5)$$

$$\lim_{\tau\to\infty} U_\tau(\tau,\eta) = U_\infty \cos\eta,\ \lim_{\tau\to\infty} U_\eta(\tau,\eta) = -U_\infty \sin\eta,\ \lim_{\tau\to\infty} T_g(\tau) = T_\infty,\ \lim_{\tau\to\infty} P_g(\tau) = P_\infty\,, \tag{6}$$

$$\lim_{\tau\to 0} T_p(\tau) \neq \infty\,, \tag{7}$$

где (x_1, x_2, x_3) – декартовы координаты, U_τ и U_η – радиальная и тангенциальная компоненты массовой скорости U_g в сфероидальной системе координат, U_∞ – величина скорости набегающего потока, σ_0 – интегральная степень черноты, σ_1 – постоянная Стефана-Больцмана, F_k – компоненты вектора гравитационных сил F_{mg} ($\boldsymbol{U}_g$ и F_{mg} должны быть так связаны, чтобы полная сила, действующая на частицу, равнялась нулю). Здесь поверхность $\tau = \tau_0$ совпадает с поверхностью частицы.

На поверхности частицы (5) учтено условие прилипания для компонент массовой скорости, равенство температур и непрерывность потоков тепла. В качестве граничных условий на бесконечности приняты условия (6). В граничном условии (7) отражена конечность физических величин. При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, что ось z совпадает с осью симметрии сфероида.

Наличие больших относительных перепадов температуры между поверхностью частицы и областью вдали от неё приводит к необходимости учитывать зависимость от температуры динамической вязкости μ_g, теплопроводности λ_g и плотности ρ_g

$$\mu_g = \mu_{g\infty} t_g^\beta\,, \qquad \lambda_g = \lambda_{g\infty} t_g^\alpha\,, \qquad \lambda_p = \lambda_{p\infty} t_p^\omega\,, \qquad \rho_g = \rho_{g\infty} t_g\,,$$

где $\mu_{g\infty} = \mu_g(T_{g\infty})$, $\lambda_{g\infty} = \lambda_g(T_{g\infty})$, $\lambda_{p\infty} = \lambda_p(T_{p\infty})$, $\rho_{g\infty} = \rho_g(T_{g\infty})$, $t_k = T_k/T_{g\infty}$ $(k = g,\, p)$ – безразмерная температура. Здесь и далее индекс g указывает на газообразную среду, индекс p – на принадлежность частице, а индекс ∞ означает параметры газообразной среды на бесконечности, т.е. вдали от частицы.

Для нахождения силы, действующей со стороны окружающей среды на нагретую твёрдую аэрозольную частицу, и скорости её движения в гравитационном поле необходимо знать распределение температуры как вне частицы, так и внутри неё.

Распределение температуры вне и внутри неравномерно нагретой сфероидальной частицы будем искать в виде разложения по малому параметру ξ [3, 4]:

$$t_g = t_{g0} + \xi t_{g1} + \dots\,, \qquad t_p = t_{p0} + \xi t_{p1} + \ \dots\,, \tag{8}$$

где $\xi = \mathrm{Re}_\infty = \rho_{g\infty} U_\infty a/\mu_{g\infty}$, $t_g = T_g/T_\infty$.

Учитывая, что коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газообразной среды, т.е. $\lambda_p \gg \lambda_g$, в коэффициенте динамической вязкости можно пренебречь зависимостью по углу η в системе частица-газ и считать $\mu_g(t_g) \approx \mu_g(t_{g0})$. Это означает, что при нахождении полей температур t_g и t_p в разложении (8) нам достаточно ограничиться нулевыми приближениями. Подставляя (8) в (3)-(4) и ограничившись нулевыми приближениями получаем следующие выражения для t_{g0} и t_{p0}:

$$t_{g0}(\lambda) = (1 + \gamma\,\mathrm{arcctg}\,\lambda)^{(1+\alpha)^{-1}}\,, \tag{9}$$

$$t_{p0}(\lambda) = \left(B_0 + \delta\gamma \operatorname{arcctg}\lambda + \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f_0 \operatorname{arcctg}\lambda \, d\lambda - \operatorname{arcctg}\lambda \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f_0 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \qquad (10)$$

где $\lambda = \operatorname{sh}\tau$, $\lambda_0 = \operatorname{sh}\tau_0$, $\delta = \lambda_g/\lambda_p$, $f_0 = -\dfrac{1+\gamma}{2\lambda_{p\infty}T_\infty}\displaystyle\int_{-1}^{1} c^2(\lambda^2+x^2)q_p\,dx$, $x = \cos\eta$, $\gamma = \dfrac{(T_S/T_\infty)^{1+\alpha}-1}{\operatorname{arcctg}\,\lambda_0}$ — безразмерный параметр, характеризующий нагрев поверхности сфероида; T_S – средняя температура поверхности сфероида.

Постоянные интегрирования B_0 и γ, входящие в (9) – (10), определяются из линеаризованных по ξ граничных условий на поверхности частицы (5).

Из формулы (9) следует, что температура окружающего частицу газа изменяется с расстоянием от поверхности частицы, следовательно, и динамическая вязкость также является функцией расстояния. Подставляя (9) в выражение для динамической вязкости получаем $\mu_g = \mu_{g\infty}t_{g0}^{\beta}$.

Общее решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса имеет вид:

$$U_\tau(\tau,\eta) = \frac{U_\infty}{c\ \operatorname{ch}\tau\, H_\tau}\left[A_1G_1(\operatorname{sh}\tau) + c^2G_2(\operatorname{sh}\tau) + DG_4(\operatorname{sh}\tau)\right]\cos\eta\,, \qquad (11)$$

$$U_\eta(\tau,\eta) = -\frac{U_\infty}{2\,c\,H_\tau}\left[A_1G_6(\operatorname{sh}\tau) + c^2G_7(\operatorname{sh}\tau) + DG_8(\operatorname{sh}\tau)\right]\sin\eta\,, \qquad (12)$$

где

$$G_6 = \frac{dG_1}{d\lambda} + \frac{\Gamma_0}{1+\lambda^2}\frac{G_1}{(1+\alpha)t_{g0}^{1+\alpha}}\,, \qquad G_7 = \frac{dG_2}{d\lambda} + \frac{\Gamma_0}{1+\lambda^2}\frac{G_2}{(1+\alpha)t_{g0}^{1+\alpha}}\,,$$

$$G_8 = \frac{dG_4}{d\lambda} + \frac{\Gamma_0}{1+\lambda^2}\frac{G_4}{(1+\alpha)t_{g0}^{1+\alpha}}\,.$$

Постоянные интегрирования A_1 и D, входящие в (11), (12), определяются из граничных условий на поверхности частицы (5) и имеют вид:

$$A_1 = c^2\frac{G_2(\lambda_0)G_4'(\lambda_0) - G_2'(\lambda_0)G_4(\lambda_0)}{G_1'(\lambda_0)G_4(\lambda_0) - G_1(\lambda_0)G_4'(\lambda_0)}\,, \qquad D = c^2\frac{G_2'(\lambda_0)G_1(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)G_1'(\lambda_0)}{G_1'(\lambda_0)G_4(\lambda_0) - G_1(\lambda_0)G_4'(\lambda_0)}\,. \qquad (13)$$

Общая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и в сфероидальной системе координат находится по формуле:

$$\boldsymbol{F} = -4\pi\,\frac{\mu_{g\infty}U_\infty}{c}\,D\boldsymbol{n}_z\,, \qquad (14)$$

где $\boldsymbol{n}_z$ – единичный вектор в направлении оси Oz.

Подставляя в (14) определяемый равенством (13) коэффициент D, получаем выражение для силы сопротивления неравномерно нагретого сфероида

$$\boldsymbol{F} = -4\pi\mu_{g\infty}U_\infty\ c\ \frac{G_2'(\lambda_0)G_1(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)G_1'(\lambda_0)}{G_1'(\lambda_0)G_4(\lambda_0) - G_1(\lambda_0)G_4'(\lambda_0)}\,\boldsymbol{n}_z\,. \qquad (15)$$

Обычно в выражение для силы сопротивления сфероида вводят поправочный множитель, учитывающий её отличие от силы сопротивления сферы с радиусом, равным экваториальному радиусу сфероида ($R = a$). Представим выражение для силы (15) в виде

$$\boldsymbol{F} = 6\pi a \mu_{g\infty} U_\infty K_\mu \boldsymbol{n}_z\,, \tag{16}$$

где K_μ – поправка к закону Стокса, которая, в случае произвольных перепадов температуры между поверхностью частицы и областью вдали от неё, определяется соотношением

$$K_\mu = \frac{2}{3\sqrt{1+\lambda_0^2}} \cdot \frac{G_2(\lambda_0)G_1'(\lambda_0) - G_2'(\lambda_0)G_1(\lambda_0)}{G_1'(\lambda_0)G_4(\lambda_0) - G_1(\lambda_0)G_4'(\lambda_0)}\,,$$

где значения функций G_1, G_2, G_4 берутся при средней температуре поверхности сфероида T_S и $\lambda = \lambda_0$. Средняя температура поверхности сфероида T_S определяется из решения трансцендентного уравнения, получаемого при линеаризации граничного условия (5). Кроме того среднюю температуру поверхности сфероида можно выразить через плотность тепловых источников q_p неравномерно распределенных в объеме частицы:

$$\frac{t_S^{1+\alpha} - 1}{\operatorname{arcctg}\lambda_0} - (t_S^4 - 1)\,\frac{1+\alpha}{\lambda_{g\infty}}\,(1+\lambda_0^2)h_0\sigma_0\sigma_1 T_\infty^3 = \frac{1+\alpha}{4\pi c\lambda_{g\infty}T_\infty}\int_V q_p\,dV\,, \tag{17}$$

где $h_0 = \dfrac{c}{2}\left(1 + \dfrac{\lambda_0^2}{2\sqrt{1+\lambda_0^2}}\,\ln\dfrac{\sqrt{1+\lambda_0^2}+1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}-1}\right)$, а интегрирование ведётся по всему объёму частицы.

Сфероидальная частица, падающая под действием силы тяжести, приобретает постоянную скорость $\boldsymbol{U}_p$, как только действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами. Учитывая, что $\boldsymbol{U}_\infty = -\boldsymbol{U}_p$, получаем выражение для скорости установившегося падения твёрдой неравномерно нагретой частицы сфероидальной формы в поле силы тяжести

$$\boldsymbol{U}_p = \frac{2}{9}\,\frac{(\rho_p - \rho_g)}{\mu_{g\infty}K_\mu}\,abg\,\boldsymbol{n}_z\,. \tag{18}$$

Полученные выражения (16) и (18) позволяют оценить силу, действующую на неравномерно нагретый сфероид, и скорость его осаждения с учётом зависимости плотности газообразной среды и коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) от температуры при произвольных относительных перепадах температуры между поверхностью частицы и области вдали от неё. Формулы (16) и (18) справедливы и когда относительный перепад температуры мал. В этом случае $\gamma,\ \alpha,\ \beta$ стремятся к нулю и (16), (18) переходят в соответствующие выражения, отвечающие малым относительным перепадам температуры [5]:

$$\boldsymbol{F}^* = 6\pi a \mu_{g\infty} U_\infty K_\mu^* \boldsymbol{n}_z\,, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{U}_p^* = \frac{2}{9}\,\frac{(\rho_p - \rho_g)}{\mu_{g\infty} K_\mu^*}\, abg\, \boldsymbol{n}_z\,, \tag{20}$$

где

$$K_\mu^* = \frac{4}{3\sqrt{1+\lambda_0^2}}\,\left[\lambda_0 + (1-\lambda_0^2)\operatorname{arcctg}\lambda_0\right]^{-1}\,.$$

Таким образом, зная распределение плотности тепловых источников в объёме частицы q_p, из уравнения (17) можем найти T_S, а затем по формулам (16) и (18) рассчитать соответственно силу вязкого сопротивления и скорость гравитационного падения твёрдой неравномерно нагретой сфероидальной частицы.

Заметим, что при решении задачи о движении неравномерно нагретого сфероида в поле силы тяжести, природа тепловых источников, расположенных внутри частицы, не конкретизировалась. Таким образом, полученные выражения для силы вязкого сопротивления (16) и скорости гравитационного падения (18) носят наиболее общий характер.

Чтобы оценить какой вклад в силу и скорость гравитационного падения оказывают нагрев поверхности частицы и форм-фактор необходимо конкретизировать природу тепловых источников неоднородно распределённых в её объеме. В качестве примера рассмотрим наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как чёрное тело [6], т.е. нагрев частицы происходит за счёт поглощения электромагнитного излучения. Если на частицу падает поток электромагнитного излучения, то функция q_p в общем случае может быть рассчитана по теории Ми [6]. Поскольку изучение электродинамической стороны задачи выходит за рамки данной работы, то для проведения численных оценок мы как раз и ограничимся наиболее простым случаем. Когда частица поглощает излучение как чёрное тело, поглощение излучения происходит в тонком слое толщиной $\delta\tau \ll \tau_0$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной $\delta\tau$ определяется с помощью формулы [6]:

$$q_p = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{ch}\tau\cos\eta}{c(\operatorname{ch}^2\tau - \sin^2\eta)\delta\tau}\; I_0\,, & \dfrac{\pi}{2} \le \eta \le \pi, \quad \tau_0 - \delta\tau \le \tau \le \tau_0\,, \\ 0\,, & 0 \le \eta \le \dfrac{\pi}{2}\,, \end{cases} \tag{21}$$

где I_0 – интенсивность падающего излучения.

Зная распределение плотности тепловых источников (19) находим, что

$$\int_V q_p\, dV = \pi a^2 I_0 \tag{22}$$

и, подставляя (20) в (17), получаем уравнение, определяющее связь между средней температурой поверхности частицы и интенсивностью падающего излучения:

$$\frac{t_S^{1+\alpha}-1}{\operatorname{arcctg}\lambda_0} - (t_S^4 - 1)\,\frac{1+\alpha}{\lambda_{g\infty}}\,(1+\lambda_0^2)h_0\sigma_0\sigma_1\, T_\infty^3 = \frac{(1+\alpha)a^2}{4c\lambda_{g\infty}T_\infty}\; I_0\,. \tag{23}$$

Таким образом, задавая интенсивность падающего излучения, мы можем оценить среднюю температуру поверхности частицы.

Нами было установлено, что нагрев поверхности (интенсивность падающего излучения) аэрозольной частицы оказывает значительное воздействие на силу вязкого сопротивления и скорость её гравитационного падения. При этом, чем более поверхность частицы отличается от сферической, тем более заметно проявляется влияние форм-фактора (отношения полуосей сфероида).

В предельном случае при $b \to a$ формулы для силы (16) и скорости (18) переходят в соответствующие выражения для сферы. Отметим также, что все полученные в данной статье формулы относятся к сплюснутому сфероиду. Однако, их можно преобразовать для случая вытянутого сфероида. Для этого в полученных соотношениях следует заменить λ на $i\lambda$ и c на $-ic$.

Литература

1. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель. – М.: Мир, 1960.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Л.Д. Ландау. – - М.: Наука, 1986.

3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1967.

4. Найфе А. Введение в методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1984.

5. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / С. Бретшнайдер. – М-Л.: Химия, 1966.

6. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К. Борен. – М.: Мир, 1986.

GRAVITATIONAL MOVEMENT PECULIARITIES OF SOLID NON-UNIFORMLY HEATED AEROSOL PARTICLE OF THE SPHEROIDAL FORM

N.N. Mironova

Belgorod state university,
Studencheskaya st., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: mironovanadya@mail.ru

Abstract. The problem connected with the influence of the form-factor (ratio of semi-axles) existence and the surface heating of solid aerosol particle of spheroidal form on the force and its velocity in gravity field is analyzed. It is supposed that the average temperature of particle surface may be essentially differed from the surrounding temperature. Numerical estimates have shown that the heating of particle surface gives essential influence on the resistance force and the velocity of gravitational falling.

Key words: Stokes' equation, gravitational movement, heated particle, spheroid.