

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 539.421

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-160-170

MSC 74R10, 74R20

оригинальное исследование

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ ПЛАСТИНЫ С КРАЕВОЙ ТРЕЩИНОЙ

Н. С. Астапов^{1,2} , В. Д. Кургузов^{1,2} 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,

²Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: nika@hydro.nsc.ru, kurguzov@hydro.nsc.ru

Аннотация. Прочность квадратной пластины с краевой трещиной при нормальном отрыве исследована в рамках подхода Нейбера – Новожилова с помощью модифицированной модели Леонова – Панасюка – Дагдейла, использующей дополнительный параметр – поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения). В качестве модели деформируемого твердого тела выбрана модель идеального упругопластического материала, имеющего предельное относительное удлинение. К такому классу материалов относятся, например, низколегированные стали, применяемые в конструкциях, работающих при температурах ниже порога хладноломкости. При наличии сингулярной особенности в поле напряжений в окрестности вершины трещины предлагается использовать двух-параметрический интегральный критерий прочности. Деформационный критерий разрушения формулируется в вершине реальной трещины, а силовой критерий для нормальных напряжений с учетом осреднения формулируется в вершине модельной трещины. Длины реальной и модельной трещин отличаются на длину зоны предразрушения. Подробно проанализированы определяющие уравнения аналитической модели в зависимости от характерного линейного размера структуры материала. Получены простые формулы для критической разрушающей нагрузки и длины зоны предразрушения. Построены диаграммы квазихрупкого разрушения структурированной пластины в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния.

Ключевые слова: критерии разрушения, структура материала, зона предразрушения, диаграмма разрушения, метод конечных элементов, компьютерное моделирование

Для цитирования: Астапов Н. С., Кургузов В. Д. 2022. Моделирование упругопластического разрушения пластины с краевой трещиной. Прикладная математика & Физика, 54(3): 160–170. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-160-170

SIMULATION OF ELASTOPLASTIC FRACTURE OF AN EDGE CRACKED PLATE

Nikolay Astapov^{1,2} , Vladimir Kurguzov^{1,2} 

Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko

¹Institute of Hydrodynamics SB RAS,

²Novosibirsk State University
Novosibirsk, 630090, Russia

E-mail: nika@hydro.nsc.ru, kurguzov@hydro.nsc.ru

Received June, 19, 2022

Abstract. The strength of a square plate with an edge crack at normal separation was studied within the framework of the Neuber – Novozhilov approach using a modified Leonov – Panasyuk – Dugdale model. The model employs an additional parameter, the diameter of the plastic zone (width of the pre-fracture zone). As a model of a deformable solid body, a model of an ideal elastoplastic material with a limiting relative elongation was chosen. This class of materials includes, for example, low-alloy steels used in structures operating at temperatures below the cold brittleness threshold. In the presence of a singular feature in the stress field at the vicinity of the crack tip, it is proposed to use a two-parameter discrete integral strength criterion. The deformation fracture criterion is formulated at the tip of a real crack, and the force criterion for normal stresses, taking into account averaging, is formulated at the tip of a model crack. The lengths of real and model cracks differ by the length of the pre-fracture zone. The constitutive equations of the analytical model are analyzed in detail depending on the characteristic linear size of the material structure. Simple formulas are obtained for the critical fracture load and the length of the pre-fracture zone. Diagrams of quasi-brittle fracture of a structured plate are constructed.

Keywords: fracture criteria, material structure, pre-fracture zone, fracture diagram, finite element method, computer simulation

For citation: Astapov Nikolay, Kurguzov Vladimir. 2022. Simulation of elastoplastic fracture of an edge cracked plate. Applied Mathematics & Physics, 54(3): 160–170 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-160-170

1. Введение. В обзоре экспериментальных работ [17] проводится физико-техническая классификация процессов разрушения и обсуждение причин возникновения трещин при изготовлении конструкции. Кроме того, в [17] отмечаются проблемы построения аналитических моделей процесса разрушения в рамках линейной механики разрушения. В работе [24] прочностные свойства конструкций исследовались с помощью когезионной модели. В работе [15] даны оценки трещиностойкости по границе раздела материалов. Отметим, что при использовании когезионной модели [15, 24] отсутствуют параметры, описывающие поперечник зоны предразрушения и структуру самой зоны предразрушения. В экспериментальной работе [21] по исследованию распространения трещины нормального отрыва в биматериале керамика-алюминий показано, что зона предразрушения для трещины на границе раздела сред, как правило, расположена только в одном более слабом материале и локализована в окрестности этой границы. Такое расслоение в результате лабораторного эксперимента наблюдалось в работе [25]. В результате численного моделирования методом конечных элементов в работе [14] также показано притягивание продвигающейся трещины к границе раздела сред.

В работе [19] при описании процесса разрушения учитываются пределы упругости составляющих композит материалов, но не учитывается их структура. Однако трещины часто оказываются межзеренными, и наличие периодической структуры существенно влияет на раскрытие трещин, которое изменяется постепенно геометрически упорядоченным образом [17]. В работе [13] показано, что критерии разрушения, учитывающие характерный размер структуры материала, позволяют «расширить область применения по сравнению с традиционными критериями», хотя «вопрос о том, как этот размер связан с составом, структурой и, возможно, с другими параметрами реального материала, до сих пор не изучен». Поэтому проблемы построения простых, пригодных для инженерных расчетов, аналитических моделей процесса разрушения композитов являются актуальными [3, 10]. В работе [10] обосновывается актуальность создания феноменологических моделей для прогнозирования разрушения слоистых материалов.

Настоящая работа является естественным продолжением и обобщением работ [1, 20, 22, 23] по исследованию распространения трещины в рамках модифицированной модели Леонова – Панасюка – Дагдейла (ЛПД). Учет характерного линейного размера материала позволил вывести простые, пригодные в инженерных приложениях, соотношения для критической нагрузки и критической длины зоны предразрушения, а также построить диаграммы разрушения.

2. Постановка задачи. Пусть в однородной структурированной квадратной пластине размером $w \times w$ имеется краевая трещина длины l_0 (рис. 1а). На краях пластины заданы растягивающие напряжения σ_∞ , поверхность трещины свободна от нагрузок, то есть реализуется первая мода разрушения. Материал пластины предполагается идеальным упругопластическим материалом с $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграммой одноосного деформирования, показанной на рис. 2. Здесь σ_Y – предел текучести, ε_0 – максимальная упругая деформация, ε_1 – предельная деформация до разрушения. Введем параметр $\bar{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$, характеризующий отношение предельной неупругой деформации к максимальной упругой. Величину $\bar{\varepsilon}_1$ можно трактовать как относительную длину площадки текучести (коротко: показатель пластичности). Материал пластины обладает определенной структурой, имеет квазихрупкий или квазивязкий тип разрушения, причем характерный линейный размер d структурного элемента (например, диаметр зерна) предполагается известным.

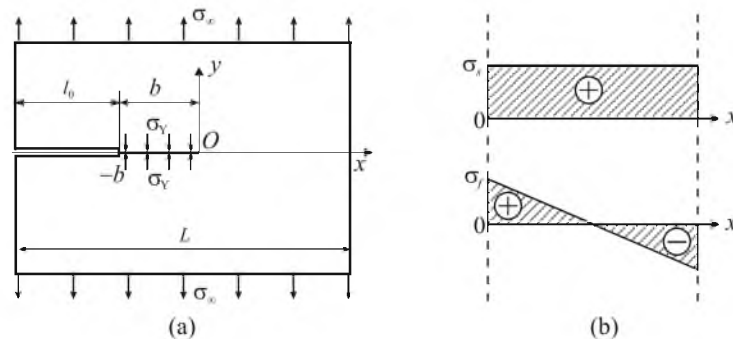


Рис. 1. Напряжение в пластине: а – пластина с краевой трещиной; б – эпюры номинальных напряжений при растяжении σ_s и изгибе σ_f

Fig. 1. Plate stress: a – edge cracked plate. b – diagrams of nominal stresses under tension σ_s and bending σ_f

3. Аналитическая модель разрушения пластины. Предположим, что краевая острая трещина нормального отрыва длиной l_0 (рис. 1а) распространяется прямолинейно в структурно-однородном материале. В модифицированной модели ЛПД [20] помимо реальной внутренней прямолинейной

трещины-разреза длиной l_0 вводится в рассмотрение модельная трещина-разрез длиной $l = l_0 + b$, где b – длина зоны предразрушения или пластической зоны, расположенной на продолжении реальной трещины (рис. 3). Длина зоны предразрушения b определяется в процессе решения задачи о разрушении, а поперечник a этой зоны отождествляется с поперечником зоны пластичности.

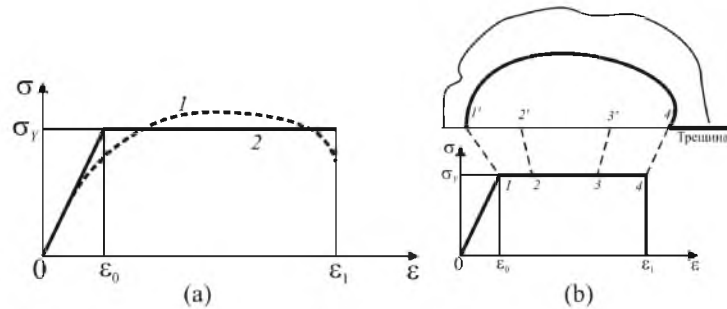


Рис. 2. Диаграммы деформирования материала: а – исходная диаграмма деформирования материала (кривая 1) и ее двухзвенная аппроксимация (кривая 2); б – соответствие точек 1-4 диаграммы деформирования точкам 1'-4' зоны предразрушения

Fig. 2. Stress-strain diagrams of material: a – initial material stress-strain diagram (curve 1) and its bilinear approximation (curve 2); b – correspondence of points 1-4 of the stress-strain diagram to points 1'-4' of the pre-fracture zone

Задача о разрушении имеет два линейных масштаба: 1) диаметр зерна d – постоянная величина, определяемая структурой материала; 2) длина зоны предразрушения b , которая зависит от длины реальной трещины и интенсивности нагружения. Подчеркнем, что при однократном нагружении материалов критическая длина зоны предразрушения b_c – вполне определенный параметр ($l_c = l_0 + b_c$ – критическая длина макротрещины). На рис. 3 показаны нормальные напряжения $\sigma_y = \sigma_Y$, действующие в модифицированной модели ЛПД [20] на продолжении трещины (а) и аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (б). Заметим, что в классической модели ЛПД [2, 4, 6, 16] поперечник пластической зоны $a = 0$. Напряжения пластического деформирования $\sigma_y = \sigma_Y$, действующие на берегах модельной трещины в зоне предразрушения, препятствуют раскрытию трещины и тем самым устраняют сингулярность поля напряжений в окрестности ее вершины.

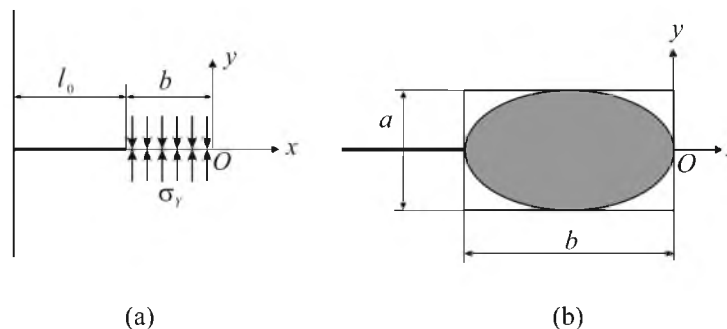


Рис. 3. Зона предразрушения: а – сжимающие напряжения, действующие в модели ЛПД на продолжении трещины; б – аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (плоское напряженное состояние)

Fig. 3. Pre-fracture zone: a – compressive stresses acting in the LPD model on the continuation of the crack; b – approximation of the plastic zone by a rectangular pre-fracture zone (plane stress)

Зона предразрушения занимает только часть зоны пластичности. Предполагается, что напряжения здесь распределяются равномерно и равняются пределу текучести материала σ_Y . Полная постановка задачи распределения напряжений и смещений трещины нормального отрыва для упругопластических материалов рассматривается в нелинейной механике разрушения. Такую нелинейную задачу можно существенно упростить, используя классические представления линейной механики разрушения, когда трещина нормального отрыва моделируется как двусторонний разрез, а нелинейность задачи возникает только при описании зоны предразрушения. После введения модельной (дополнительной) трещины – разреза задача может рассматриваться не как упругопластическая, а как упругая. Напомним, что согласно классической модели ЛПД пластический материал в зоне предразрушения, поперечник которой равен нулю, стягивает берега трещины.

Пусть в лабораторном эксперименте при испытании макрообразца на одноосное растяжение получена $(\sigma - \epsilon)$ -диаграмма деформирования, где σ и ϵ – напряжения и деформации соответственно. Примем простейшую аппроксимацию реальной $(\sigma - \epsilon)$ -диаграммы исследуемого материала, когда эта

диаграмма аппроксимируется двухзвенной ломаной. При такой аппроксимации исходный материал подменяется идеальным упругопластическим материалом, имеющим предельную деформацию. При достижении предельной деформации материал разрушается. На рис. 2а изображены исходная $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграмма (кривая 1) и ее двухзвенная аппроксимация (кривая 2). Параметры этой аппроксимации подбираются так, чтобы площади под кривыми 1 и 2 совпадали. Кривая 2 полностью определяется следующими параметрами: E – модуль Юнга, σ_Y – предел текучести при одноосном растяжении, ε_0 – максимальная упругая деформация, ε_1 – предельная деформация. Предел текучести и максимальная упругая деформация связаны соотношением $\sigma_Y = E\varepsilon_0$. Аппроксимацию $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграммы на участке можно трактовать как идеальную пластичность, а отношение $\bar{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$ как запас пластичности материала при монотонном нагружении.

В соответствии с предлагаемой модификацией модели ЛПД надо различать вершины реальной и модельной трещин. На рис. 2б приведена схема, качественно поясняющая взаимосвязь между точками 1, 2, 3, 4 на $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграмме и точками 1', 2', 3', 4' в зоне предразрушения, расположенными на продолжении реальной трещины слева от нее. Вне зоны предразрушения материал деформируется упруго, на границе этой зоны он начинает деформироваться неупруго, при этом точки зоны предразрушения находятся в области неупругого деформирования материала. В модели ЛПД предполагается, что на продолжении модельной трещины реализуется одноосное растяжение [2, 4], поскольку к берегам трещины-разреза приложены постоянные напряжения σ_Y , которые притягивают берега друг к другу и, следовательно, действуют на материал растягивающим образом. В докритическом состоянии материал в вершине реальной трещины претерпевает удлинение $\varepsilon < \varepsilon_1$, которое в критическом состоянии совпадает с критическим удлинением $\varepsilon = \varepsilon_1$ (см. в точке 4 на рис. 2б). Пластическая зона в окрестности вершины трещины приближенно показана на рис. 3б для случая плоского напряженного состояния.

Для построения модели разрушения структурированной квадратной пластины при нормальном отрыве воспользуемся интегральным критерием разрушения Нейбера – Новожилова [20]

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = \sigma_Y, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

$$2v(-b_c) = \delta_c, \quad x < 0. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_y(x, 0)$ – нормальные напряжения на продолжении трещины, σ_Y – предел текучести при одноосном растяжении, d – характерный линейный размер структуры материала, $2v(x)$ – раскрытие трещины, b_c – критическая длина зоны предразрушения. Через δ_c обозначено критическое раскрытие модельной трещины; при величине раскрытия равной критическому значению разрушается структура материала в вершине реальной трещины (граничной точке зоны предразрушения, то есть в точке 4' на рис. 2б). Длина зоны предразрушения составляет только часть длины зоны пластичности, если учесть длину интервала осреднения d . Силовой критерий (1) по терминологии Новожилова является необходимым: процесс разрушения материала начинается тогда, когда осредненные по интервалу d нормальные напряжения достигают предела текучести σ_Y . При выполнении деформационного критерия (2) происходит катастрофическое разрушение образца. По этой причине совокупность условий (1), (2) называют достаточным критерием разрушения [20].

Для применения интегрального критерия (1), (2) к обработке результатов численных или лабораторных экспериментов с образцами конечных размеров примем аналитическое выражение нормального напряжения $\sigma_y(x, 0)$ на продолжении трещины в виде [18]

$$\sigma_y(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} + \sigma_{nom}, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_{nom} = \sigma_s + \sigma_f$ – номинальные напряжения, иначе оценка регулярной части поля напряжений в окрестности вершины модельной трещины; σ_s и σ_f – номинальные напряжения при растяжении и изгибе соответственно (рис. 1б); $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$ – суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН); $K_{I\sigma}$ – КИН, порождаемый приложенными к пластине напряжениями σ_∞ ; K_{Ib} – КИН, порождаемый постоянными напряжениями σ_Y действующими в зоне предразрушения. Первое и второе слагаемые в соотношении (3) – сингулярная и регулярная части решения соответственно. Первое равенство (1) сдвоенного критерия контролирует достижение осредненными напряжениями на продолжении модельной трещины предела текучести σ_Y , а второе равенство (2) сдвоенного критерия описывает нормальный отрыв в вершине реальной трещины.

В приближении сопротивления материалов номинальные напряжения σ_s и σ_f можно представить в виде

$$\sigma_s = \sigma_\infty \frac{w}{w-l}, \quad \sigma_f = \sigma_\infty \frac{3wl}{(w-l)^2}, \quad (4)$$

где σ_∞ – напряжения, заданные на краях пластины. Выражение КИН $K_{I\sigma}$, обусловленного заданными условиями испытаний образцов с краевыми трещинами, можно представить в виде [9, 11]:

$$K_{I\sigma} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l} Y_s(\xi), \quad Y_s(\xi) = 1,12 - 0,23\xi + 10,55\xi^2 - 21,72\xi^3 + 30,39\xi^4, \quad (5)$$

где $\xi = l/w$. КИН K_{Ib} , обусловленный постоянными напряжениями σ_Y , действующими в зоне предразрушения, имеет универсальное представление. Для полуплоскости с краевой трещиной КИН K_{Ib} вычисляются следующим образом [9, 11]

$$K_{Ib} = -\sigma_Y \sqrt{\pi l} \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b}{l} \right). \quad (6)$$

Вычислим интеграл из равенства (1), учитывая выражение (3):

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = K_I \sqrt{\frac{2}{\pi d}} + \sigma_s + \sigma_f \left(1 - \frac{d}{w-l} \right). \quad (7)$$

Теперь критерий (1) с учетом (4), (7) запишется в виде

$$K_I \sqrt{\frac{2}{\pi d}} + Y_r \sigma_c = \sigma_Y, \quad (8)$$

где σ_c – критическое напряжение,

$$Y_r = \frac{w}{w-l_c} + \frac{3wl_c}{(w-l_c)^2} \left(1 - \frac{d}{w-l_c} \right). \quad (9)$$

Преобразуем (8), используя для КИН $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$ соотношения (5), (6):

$$\sqrt{\pi l_c} \left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] \sqrt{\frac{2}{\pi d}} = 1 - Y_r \bar{\sigma}_c. \quad (10)$$

Здесь $\bar{\sigma}_c = \sigma_c / \sigma_Y$ – безразмерное критическое напряжение, l_c – критическая длина трещины, b_c – критическая длина зоны предразрушения.

Для использования в расчетах уравнения (2) необходимо иметь аналитические выражения функции раскрытия трещины $2v(x)$ и критического раскрытия δ_c модельной трещины, при котором разрушается структура материала в вершине реальной трещины. Выражение для величины раскрытия модельной трещины $2v(x)$ представим в виде [4]

$$v(x) = \frac{\kappa + 1}{2G} K_I \sqrt{\frac{-2x}{\pi}}, \quad x \leq 0, \quad (11)$$

где κ – параметр вида напряженного состояния: $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния. Модуль сдвига материала G дается формулой $G = E/[2(1 + \nu)] = \sigma_Y/[2\varepsilon_0(1 + \nu)]$, так как для идеального упругопластического материала $E = \sigma_Y/\varepsilon_0$, где E – модуль Юнга, ε_0 – максимальное упругое относительное удлинение. Критическое раскрытие модельной трещины δ_c в соотношении (2) зависит от запаса пластичности $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ исследуемого материала и ширины зоны предразрушения a в вершине реальной трещины. Будем вычислять его по формуле

$$\delta_c = m(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)a, \quad (12)$$

где m – поправочный коэффициент. Конечно, границы реальных пластических зон в окрестности вершины трещины лишь приближенно похожи на конфигурации, изображенные в [2, 4]. При плоском напряженном состоянии с увеличением нагрузки узкая область пластических деформаций распространяется прямолинейно от вершины трещины по ее оси, принимая форму, похожую на узкий вытянутый прямоугольник. Такую форму пластической зоны, особенно при поперечном сдвиге, и преимущественное направление распространения трещины вдоль ее оси можно наблюдать как в численных, так и в лабораторных экспериментах. В связи с этим в работах [1, 23] для уточнения выражения поперечника зоны предразрушения обосновывается введение в соотношение (12) поправочного коэффициента m . Для определения величины этого коэффициента необходимо использовать непосредственно данные численного либо лабораторного эксперимента.

Полагаем, что поперечник a зоны предразрушения в соотношении (12) пропорционален удвоенному максимальному размеру пластической зоны для трещины нормального отрыва в идеально пластических телах [8]:

$$a = \frac{9(1 - \nu)}{2\sqrt{2}(2 + \pi)} \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2 = q(\nu) \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2. \quad (13)$$

Это оценка для плоской деформации. Для плоского напряженного состояния $q = \pi/4$ [8]. Например, при $\nu = 0,33$ получим $q = 0,415$ для плоской деформации и $q = 0,785$ для плоского напряженного состояния. Критическая величина раскрытия модельной трещины δ_c в соотношении (12) соответствует переходу материала в вершине реальной трещины в критическое состояние и его разрушению.

Подставляя выражения (11)–(13) в уравнение (2), получим уравнение

$$\frac{\kappa + 1}{2G} K_I \sqrt{\frac{2b_c}{\pi}} = m(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) q \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2. \quad (14)$$

Учитывая выражение $G = \sigma_Y / (2\varepsilon_0(1 + \nu))$ и используя для $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$ соотношения (5), (6), запишем уравнение (14) в виде

$$\sqrt{\pi l_c} \left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] \sqrt{\frac{2b_c}{\pi}} = \frac{mq\bar{\varepsilon}_1}{(\kappa + 1)(1 + \nu)} \left(\sqrt{\pi l_c} Y_s \bar{\sigma}_c \right)^2. \quad (15)$$

Теперь систему уравнений (10), (15), равносильную исходной системе уравнений (1), (2) при указанном выборе выражений для нормального напряжения $\sigma_y(x, 0)$, раскрытия трещины $2v(x)$ и КИН $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$, можно записать в виде

$$\left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] = (1 - Y_r \bar{\sigma}_c) \sqrt{\frac{d}{2l_c}}, \quad (16)$$

$$\left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] \sqrt{\frac{b_c}{l_c}} = \frac{\pi m p \bar{\varepsilon}_1 (Y_s \bar{\sigma}_c)^2}{2\sqrt{2}}, \quad (17)$$

где $p = 2q / [(\kappa + 1)(1 + \nu)]$. В частности, при плоском напряженном состоянии $p = q/2 = \pi/8$, при плоской деформации $p = q / [2(1 - \nu^2)] = 9 / [4\sqrt{2}(2 + \pi)(1 + \nu)]$. Таким образом, получена система двух уравнений (16), (17) с двумя неизвестными $\sqrt{b_c/l_c}$ и $\bar{\sigma}_c$. Исключая выражение в квадратных скобках из системы уравнений (16), (17), находим точное выражение для безразмерной критической длины зоны предразрушения

$$\sqrt{b_c} = \pi m p \bar{\varepsilon}_1 (Y_s \bar{\sigma}_c)^2 \sqrt{l_c} / [2(1 - Y_r \bar{\sigma}_c)], \quad (18)$$

где $\bar{l}_c = l_c/d$ – безразмерная критическая длина трещины.

Используя приближение $\arccos(1 - b_c/l_c) \approx \sqrt{2b_c/l_c}$, погрешность которого не превышает 5% при $0 \leq b_c/l_c \leq 0,55$, запишем систему уравнений (16), (17) в виде

$$Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \sqrt{2b_c} = \frac{1 - Y_r \bar{\sigma}_c}{\sqrt{2l_c}}, \quad (19)$$

$$\left(Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \sqrt{2b_c} \right) \sqrt{b_c} = \frac{\pi m p \bar{\varepsilon}_1 Y_s^2 \bar{\sigma}_c^2}{2\sqrt{2}}. \quad (20)$$

Заменяя в (19) $\sqrt{b_c}$ выражением (18), получим квадратное уравнение относительно $\bar{\sigma}_c$

$$\left(Y_r^2 + h Y_s^2 + \sqrt{2l_c} Y_s Y_r \right) \bar{\sigma}_c^2 - \left(2Y_r + \sqrt{2l_c} Y_s \right) \bar{\sigma}_c + 1 = 0,$$

где $h = 2l_c m p \bar{\varepsilon}_1$, из которого найдем два приближенных значения критической разрушающей нагрузки $\bar{\sigma}_c$:

$$\bar{\sigma}_{c\pm} = \left[Y_r + Y_s \sqrt{\frac{l_c}{2}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4mp\bar{\varepsilon}_1} \right) \right]^{-1}. \quad (21)$$

Величина $\bar{\sigma}_{c+}$, когда перед корнем выбирается знак «+», соответствует квазихрупкому разрушению ($b/l \ll 1$), величина $\bar{\sigma}_{c-}$ соответствует квазивязкому типу разрушения [23]. Формула (21) предлагаемой модели имеет смысл, если $\bar{\varepsilon}_1 \leq 1/(4mp)$ для однородного материала.

Из приближенного уравнения (19) получим выражение для $\sqrt{b_c}$:

$$\sqrt{b_c} = \pi \left[\left(Y_r + Y_s \sqrt{2l_c} \right) \bar{\sigma}_c - 1 \right] / \left(4\sqrt{l_c} \right), \quad (22)$$

а из уравнения (20) получим два значения критической длины зоны предразрушения

$$\sqrt{b_{c\pm}} = \pi m p \bar{\varepsilon}_1 Y_s \bar{\sigma}_c / \left[\sqrt{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4mp\bar{\varepsilon}_1} \right) \right], \quad (23)$$

причем квазихрупкому типу разрушения соответствует $\sqrt{b_{c+}}$, когда в равенстве (23) перед корнем выбирается знак «+», квазивязкому типу разрушения соответствует $\sqrt{b_{c-}}$. Интересно отметить, что, выбирая любое из приближенных выражений (22) или (23), получим из системы уравнений (19), (20) точно такое же выражение для критической разрушающей нагрузки, какое дается формулой (21). А исключая выражение в круглых скобках из приближенной системы уравнений (19), (20), получим для критической длины b_c зоны предразрушения такое же выражение (18), какое получено из точной системы уравнений (16), (17). Напомним, что уравнения (16), (19) так же, как исходное уравнение (1), выполняются для любых нагрузок вблизи граничных точек зоны пластичности (точка 1' на рисунке 2b). Поэтому для любых нагрузок σ_∞ , при которых возникает зона пластичности в окрестности вершины трещины, справедлива и формула (22), которая является следствием равенства (19). Однако уравнения (17) и (20) так же, как и уравнение (2), выполняются только для критических разрушающих нагрузок $\bar{\sigma}_c$. Кроме того, приближенные выражения (11) и (12) для раскрытия трещины $2v(x)$ и критического раскрытия δ_c вносят дополнительную погрешность в уравнения (17), (20), которые используются при выводе формул (18) и (23). Таким образом, получена одна формула (21) для критической разрушающей нагрузки и три различные формулы (18), (22), (23), выражающие критическую длину зоны предразрушения через критическую нагрузку. Результаты численного моделирования подтверждают применимость формулы (22) во всем диапазоне нагрузок.

В выражении критической нагрузки (21) возможен предельный переход при $\bar{\epsilon}_1 \rightarrow 0$, что позволяет рассматривать разрушение хрупких материалов (в таких материалах зона предразрушения отсутствует: $b = 0$). С использованием необходимого критерия разрушения (1) в случае хрупкого разрушения критические напряжения вычисляются по формуле

$$\bar{\sigma}_{c0} = \left(Y_r + Y_s \sqrt{\frac{2l_0}{d}} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Проанализируем выражение критической нагрузки (21) более подробно. Коэффициенты Y_s и Y_r даются формулами (5) и (9), характеризуют геометрию образца и полностью определяются шириной пластины w и длиной трещины l . Параметр $\bar{\epsilon}_1$ определяется по $(\sigma - \epsilon)$ -диаграмме деформирования материала пластины. Параметр p определяется коэффициентом Пуассона. Поэтому исследуем зависимость критической нагрузки от оставшихся двух параметров: характерного линейного размера структуры материала d и поправочного коэффициента m . Для любой длины трещины выполняются неравенства $\bar{\sigma}_{c0} \leq \bar{\sigma}_{c+} \leq \bar{\sigma}_{c-} \leq 1$, причём равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется лишь в том случае, когда подкоренное выражение в (21) равно нулю, то есть $4mp\bar{\epsilon}_1 = 1$. А равенства $\bar{\sigma}_{c0} = \bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-} = 1$ выполняются лишь для трещины нулевой длины.

При возрастании параметра d возрастает и $\bar{\sigma}_{c+}$ (квазихрупкий тип разрушения) и $\bar{\sigma}_{c-}$ (квазивязкий тип разрушения). Оказывается для любого $d = d_+ > 0$ можно так выбрать $d = d_-$, что для трещины любой длины критические нагрузки $\bar{\sigma}_{c+}$ и $\bar{\sigma}_{c-}$ совпадут, то есть $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) \equiv \bar{\sigma}_{c-}(d_-)$. В этом случае d_+ и d_- связаны соотношением

$$d_- = \left[\left(1 - \sqrt{1-t} \right)^2 / t \right]^2 d_+, \quad (25)$$

где $t = 4mp\bar{\epsilon}_1$. Наибольшее значение множителя $\left[\left(1 - \sqrt{1-t} \right)^2 / t \right]^2$ равно 1 и достигается при $t = 1$, тогда выполняются равенства $d = d_- = d_+$ и $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) = \bar{\sigma}_{c-}(d_-) = \left(Y_r + Y_s \sqrt{l/(2d)} \right)^{-1}$, что легко видеть из выражения (21). При возрастании параметра m возрастает и $\bar{\sigma}_{c+}$ (квазихрупкий тип разрушения), а $\bar{\sigma}_{c-}$ убывает. И равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется только тогда, когда $m = 1/(4p\bar{\epsilon}_1)$.

Рассмотрим процесс деформирования при монотонном нагружении $0 < \bar{\sigma}_\infty < 1$, где $\bar{\sigma}_\infty = \sigma_\infty/\sigma_Y$ — безразмерная внешняя нагрузка. Если необходимый критерий (1) не выполняется ($\bar{\sigma}_\infty < \bar{\sigma}_{c0}$), то нелинейные эффекты не проявляются, исходная длина трещины l_0 не меняется. В случае если в достаточном критерии (1), (2) условие (1) выполнено, а условие (2) — нет, имеет место докритическое состояние системы, при котором наблюдается устойчивое увеличение длины модельной трещины $l = l_0 + b$. Первое соотношение в достаточном критерии (1), (2) определяет движение вершины модельной трещины. Если оба условия (1), (2) выполнены, то система переходит в критическое состояние. Ближайшая к вершине трещины структура разрушается, поскольку длина зоны предразрушения достигает критического значения (18), (23). При $\bar{\sigma}_\infty = \bar{\sigma}_{c\pm}$ неустойчивость критического состояния нелинейной системы очевидна. Соотношение (2) определяют обрыв силовых связей в ближайшей к вершине реальной трещины структуре зоны предразрушения. Таким образом, критические нагрузки, вычисленные по необходимому (24) и достаточному (21) критериям разрушения, являются нижней и верхней оценками критических нагрузок рассматриваемой нелинейной системы.

По трем параметрам материала d , σ_Y и $\bar{\varepsilon}_1$ можно построить в широком диапазоне изменения длин трещин две критические кривые $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$ и $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ по формулам (24) и (21) (знак «+») соответственно. Совместим плоскости $(\bar{l}_0, \bar{\sigma}_0)$ и $(\bar{l}_c, \bar{\sigma}_c)$. На совмещенной плоскости «длина трещины – напряжение» $(\bar{l}, \bar{\sigma})$ построим диаграммы квазихрупкого разрушения пластины (рис. 4). Пусть задана интенсивность нагружения $\bar{\sigma}_\infty$. Тогда диаграмма квазихрупкого разрушения позволяет оценить состояние тела с трещиной. Две критические кривые $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$ и $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ (достаточный критерий представлен двумя кривыми: при плоской деформации и плоском напряженном состоянии) разделяют плоскость $(\bar{l}, \bar{\sigma})$ на три подобласти: область $\bar{\sigma} < \bar{\sigma}_0$, где отсутствуют повреждения; область $\bar{\sigma}_0 < \bar{\sigma} < \bar{\sigma}_c$, где имеет место накопление повреждений в материале зоны предразрушения; область $\bar{\sigma}_c < \bar{\sigma}$, где образец разрушается при монотонном нагружении. Для удобства практического приложения длина трещины l на рис. 4 отнесена к ширине пластины w . Вычисления были проведены при следующих значениях параметров: $d = 0,7$ мм, $\nu = 0,33$, $\bar{\varepsilon}_1 = 2,5$ при плоском напряженном состоянии, $\bar{\varepsilon}_1 = 4,0$ при плоской деформации.

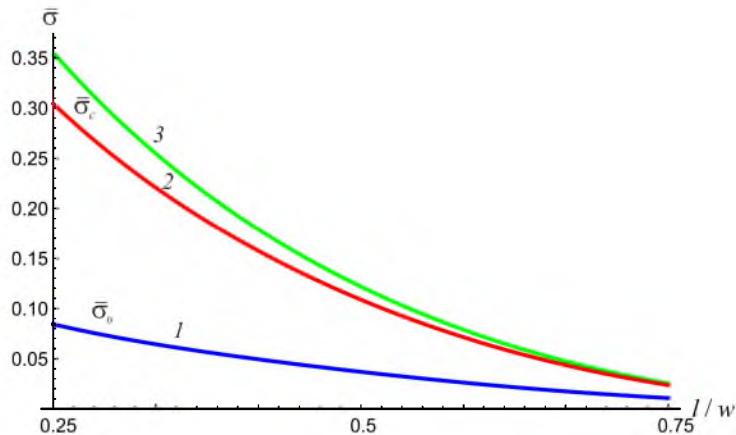


Рис. 4. Диаграммы квазихрупкого разрушения: кривая 1 – необходимый критерий (24); кривая 2 – достаточный критерий (21) (плоская деформация); кривая 3 – достаточный критерий (21) (плоское напряженное состояние)
Fig. 4. Diagrams of quasi-brittle fracture: curve 1 – necessary criterion (24); curve 2 – sufficient criterion (21) (plane strain); curve 3 – sufficient criterion (21) (plane stress)

4. Обсуждение результатов. Выбор параметра осреднения d необходимого критерия (1) в определенной мере субъективен [7]. Зона радиуса d , где напряженное состояние определяет момент инициации трещины, больше сингулярной, поэтому только значения коэффициента интенсивности напряжений K_I , как характеристики напряженно-деформированного состояния, теперь уже недостаточно. Будем рассматривать эту зону не как область, где реализуется процесс микроповреждений, пластических деформаций, микроразрушений, а как область, где напряженное состояние по известным решениям теории упругости за счет перераспределения внутренних усилий определяет момент разрушения. Размер осреднения d считается характеристикой материала и зависит от других характеристик материала: разрушающих напряжений для образца без трещины и характеристики трещиностойкости. Для относительно длинных трещин, принимая во внимание асимптотику поля напряжений в окрестности вершины трещины, можно получить оценку параметра d в виде

$$d = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_t} \right)^2,$$

где K_{Ic} – критический коэффициент интенсивности напряжений, σ_t – предел прочности материала на растяжение. Необходимость осреднения напряжений связывают с образованием зоны предразрушения, в которой происходит перераспределение напряжений и изменение физико-механических свойств материала. Размер этой зоны d сопоставим с размерами структурных составляющих материала и намного меньше размеров пластины, длины трещины и т. п. [12, 13]. Интегральный критерий Нейбера – Новожилова (1) относится к структурным критериям разрушения. Присутствие в критерии параметра осреднения d означает, что процесс разрушения обладает собственной структурой, которая в общем случае не обязательно связана со структурой материала.

5. Заключение. Полученные простые структурные формулы (18), (21)-(23) можно применять для прогнозирования критической разрушающей нагрузки $\bar{\sigma}_c = \sigma_c/\sigma_Y$ и оценки длины зоны предразрушения \bar{b}_c при нагружении по первой моде (нормальный отрыв) в структурированных материалах при плоском напряженном состоянии и при плоской деформации. Указанные формулы выражают величину нагрузки $\bar{\sigma}_c$ и длины зоны предразрушения \bar{b}_c через длину трещины l с использованием следующих четырех параметров: d – характерный линейный размер структуры материала, ε_0 и ε_1 – параметры

($\sigma - \varepsilon$)–диаграммы деформирования, m – поправочный коэффициент. Эти четыре параметра подбираются по результатам лабораторного эксперимента или численного моделирования.

Подробный анализ выражения (21) критической нагрузки $\bar{\sigma}_{c\pm}$ показал следующее. Для двух пластин, отличающихся лишь характерным линейным размером d структуры материала так, что выполняется равенство (25), критические нагрузки $\bar{\sigma}_{c+}$ (квазихрупкое разрушение) и $\bar{\sigma}_{c-}$ (квазивязкое разрушение) совпадают, то есть $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) \equiv \bar{\sigma}_{c-}(d_-)$ во всём диапазоне длин трещины. Для двух одинаковых пластин равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется тождественно лишь тогда, когда $4\pi r \bar{\varepsilon}_1 = 1$.

В целом рассматриваемую аналитическую модель можно использовать при исследовании разрушения конструкций из структурированных материалов с различными упругими свойствами. Это позволит уменьшить количество лабораторных или численных экспериментов, необходимых для оценки разрушающей нагрузки.

Список литературы

1. Астапов Н. С. 2014. Модифицированная модель зоны предразрушения квазихрупких структурированных материалов. *Физическая мезомеханика*, 17(1): 89–96.
2. Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. 2001. *Нелинейная механика разрушения*. Самара, Изд-во «Самарский университет». 632.
3. Глаголев В. В., Маркин А. А., Фурсаев А. А. 2018. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах адгезионного расслоения композита. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, (1): 100–109.
4. Матвиенко Ю. Г. 2006. *Модели и критерии механики разрушения*. М., Физматлит. 328.
5. Новопащин М. Д., Сукнев С. В. 2007. Градиентные критерии предельного состояния. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, 54(4): 316–335.
6. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З. 1988. *Основы механики разрушения материалов*. Киев, Наукова думка. 488.
7. Пестриков В. М., Морозов Е. М. 2012. *Механика разрушения*. СПб., ЦОП «Профессия». 552.
8. Райс Дж. 1975. *Математические методы в механике разрушений*. Разрушение. Т. 2. М., Мир. 204–335.
9. Саврук М. П. 1988. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. *Механика разрушения и прочность материалов*. Т. 2. Киев., Наукова думка. 619.
10. Смирнов С. В., Веретенникова И. А., Вичужанин Д. И. 2014. Моделирование расслоения при пластической деформации биметаллического материала, полученного сваркой взрывом. *Вычислительная механика сплошных сред*, 7(4): 398–411.
11. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений*. В 2-х томах. Под ред. Ю. Мураками. Т. 1. 1990. М., Мир. 448.
12. Сукнев С. В., Новопащин М. Д. 2000. Определение локальных механических свойств материалов. *Доклады академии наук*, 373(1): 48–50.
13. Сукнев С. В. 2011. Применение нелокальных и градиентных критериев для оценки разрушения геоматериалов в зонах концентрации растягивающих напряжений. *Физическая мезомеханика*, 14(2): 67–75.
14. Aluru K., Wen F.-L., Shen Y.-L. 2011. Direct simulation of fatigue failure in solder joints during cyclic shear. *Materials and Design*, 32: 1940–1947.
15. Chandra N. 2002. Evaluation of interfacial fracture toughness using cohesive zone model. *Compos. Part A: Appl. Sci. Manufact.*, 33: 1433–1447.
16. Dugdale D. S. 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8: 100–104.
17. Eaton N. F., Glover A. G., McGrath J. T. 1978. Aspects of fracture in the production and service of welded structures. *Fracture 1977: Advances in research on the strength and fracture, of materials*. Fourth intern. Conf. on fracture, June 1977, Univ. of Waterloo, Canada / D. M. R. Taplin, ed. New York: Pergamon. 1: 751–773.
18. Gross D., Seelig T. 2006. *Fracture Mechanics*. Berlin, Springer. 320.

19. Kim Y. J., Schwalbe K. H. 2001. Mismatch effect on plastic yield loads in idealised weldments II. Heat affected zone cracks. *Eng. Fract. Mech.*, 68: 183–199.
20. Kornev V. M., Kurguzov V. D. 2001. Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 42(2): 328–336.
21. Kruzic J. J., McNaney J. M., Cannon R. M., Ritchie R. O. 2004. Effects of plastic constraint on the cyclic and static fatigue behavior of metal/ceramic layered structures. *Mechanics of materials*, 36: 57–72.
22. Kurguzov V. D., Kornev V. M. 2013. Construction of diagrams of quasi-brittle and quasi-viscous material destruction on the basis of necessary and sufficient criteria. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 54(1): 179–195.
23. Kurguzov V. D., Astapov N. S., Astapov I. S. 2014. Fracture model for structured quasibrittle materials. *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, 55(6): 1055–1065.
24. Lin G., Meng X.-G., Cornec A., Schwalbe K.-H. 1999. The effect of strength mis-match on mechanical performance of weld joints. *Int. J. of Fracture*, 96: 37–54.
25. Pirondi A., Moroni F. 2009. An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metal joints. *Int. Journal of Adhesion & Adhesives*, 29: 796–805.

References

1. Astapov N. S. 2014. Modifitsirovannaya model' zony predrazrusheniya kvazikhрупких структуриrovannykh materialov [Modified model of the pre-fracture zone of quasi-brittle structured materials]. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 17(1): 89–96.
2. Astaf'ev V. I., Radaev Iu. N., Stepanova L. V. 2001. Nelineinaya mekhanika razrusheniya [Non-linear fracture mechanics]. Samara, Publ. «Samarskii universitet». 632.
3. Glagolev V. V., Markin A. A., Fursaev A. A. 2018. Modeling generation of a new material surfaces in the processes of adhesive delamination of a composite. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 1: 100–109 (in Russian).
4. Matvienko Yu. G. 2006. Modeli i kriterii mehaniki razrusheniya [Models and criteria of fracture mechanics]. Moskva, Fizmatlit. 328.
5. Novopashin M. D., Suknev S. V. 2007. Gradientnye kriterii predel'nogo sostoianiya [Gradient limit state criteria]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya*, 54(4): 316–335.
6. Panasiuk V. V., Andreikiv A. E., Parton V. Z. 1988. Osnovy mekhaniki razrusheniya materialov [Fundamentals of fracture mechanics of materials]. Kiev, Naukova dumka. 488.
7. Pestrikov V. M., Morozov E. M. 2012. Mekhanika razrusheniya. [Fracture mechanics]. SPb, Professia. 552.
8. Rice J. R. 1968. *Mathematical Methods in Fracture Mechanics*. Fracture. V. 2. New York, Academic Press. 204–335 (in Russian).
9. Savruk M. P. 1988. Koefitsienty intensivnosti naprjazhenij v telah s treshhinami. *Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov* [Stress intensity factor in the solids with cracks. Fracture mechanics and strength of materials]. V. 2. Kiev, Naukova Dumka. 619.
10. Smirnov S. V., Veretennikova I. A., Vichuzhanin D. I. 2014. Modelirovanie rassloeniya pri plasticheskoj deformacii bimetallicheskogo materiala, poluchennogo svarkoj vzryvom [Modeling of delamination in multilayer metals produced by explosive welding under plastic deformation]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred*. 7(4): 398–411.
11. Murakami Y. *Stress intensity factors handbook* (in 2 volumes). Oxford, Pergamon. 1986. 512.
12. Suknev S. V., Novopashin M. D. 2000. Opredelenie lokal'nykh mekhanicheskikh svoystv materialov [Determination of local mechanical properties of materials]. *Doklady akademii nauk*, 373(1): 48–50.
13. Suknev S. V. 2011. Primenenie nelokal'nykh i gradientnykh kriteriev dlia otsenki razrusheniya geomaterialov v zonakh kontsentratsii rastiagivaiushchikh napriazhenii [Application of non-local and gradient criteria for assessing the destruction of geomaterials in zones of tensile stress concentration]. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 14(2): 67–75.

14. Aluru K., Wen F.-L., Shen Y.-L. 2011. Direct simulation of fatigue failure in solder joints during cyclic shear. *Materials and Design*, 32: 1940–1947.
15. Chandra N. 2002. Evaluation of interfacial fracture toughness using cohesive zone model. *Compos. Part A: Appl. Sci. Manufact.*, 33: 1433–1447.
16. Dugdale D. S. 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8: 100–104.
17. Eaton N. F., Glover A. G., McGrath J. T. 1978. Aspects of fracture in the production and service of welded structures. *Fracture 1977: Advances in research on the strength and fracture, of materials. Fourth intern. Conf. on fracture, June 1977, Univ. of Waterloo, Canada / D. M. R. Taplin, ed. New York: Pergamon. 1: 751–773.*
18. Gross D., Seelig T. 2006. *Fracture Mechanics*. Berlin, Springer. 320.
19. Kim Y. J., Schwalbe K. H. 2001. Mismatch effect on plastic yield loads in idealised weldments II. Heat affected zone cracks. *Eng. Fract. Mech.*, 68: 183–199.
20. Kornev V. M., Kurguzov V. D. 2001. Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 42(2): 328–336.
21. Kruzic J. J., McNaney J. M., Cannon R. M., Ritchie R. O. 2004. Effects of plastic constraint on the cyclic and static fatigue behavior of metal/ceramic layered structures. *Mechanics of materials*, 36: 57–72.
22. Kurguzov V. D., Kornev V. M. 2013. Construction of diagrams of quasi-brittle and quasi-viscous material destruction on the basis of necessary and sufficient criteria. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 54(1): 179–195.
23. Kurguzov V. D., Astapov N. S., Astapov I. S. 2014. Fracture model for structured quasibrittle materials. *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, 55(6): 1055–1065.
24. Lin G., Meng X.-G., Cornec A., Schwalbe K.-H. 1999. The effect of strength mis-match on mechanical performance of weld joints. *Int. J. of Fracture*, 96: 37–54.
25. Pirondi A., Moroni F. 2009. An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metal joints. *Int. Journal of Adhesion & Adhesives*, 29: 796–805.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 30.04.2022

Поступила после рецензирования 12.06.2022

Принята к публикации 19.06.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Астапов Николай Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории механики разрушения материалов и конструкций, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, доцент кафедры высшей математики, Новосибирский государственный университет

Пр-т Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090, Россия

Кургузов Владимир Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории механики разрушения материалов и конструкций, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, профессор кафедры механики твердого тела, Новосибирский государственный университет

Пр-т Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nikolay Astapov – PhD, associate professor, senior researcher of Laboratory of Fracture Mechanics of Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, associate professor of the Department of Higher Mathematics of Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

Vladimir Kurguzov – PhD, professor, chief researcher of Laboratory of Fracture Mechanics of Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, professor of the Department of Solid Mechanics of Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia