Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 3, С. 62–77

УДК 517.98
DOI 10.46698/c3174-5520-8062-f

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ БЕССЕЛЯ#

А. Л. Джабраилов[1], **Э. Л. Шишкина**[2,3]

[1] Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова,
Россия, 364024, Грозный, ул. Шерипова, 32;
[2] Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1;
[3] Белгородский государственный национальный исследовательский
университет (НИУ «БелГУ»), Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
E-mail: ahmed_0065@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Аннотация. Цель данной статьи — ввести нормы в пространстве обобщенных бесселевых потенциалов на основе весовых интегралов Дирихле. Сначала мы определяем весовой интеграл Дирихле и показываем, что этот интеграл можно представить с помощью многомерного обобщенного сдвига. Далее мы показываем, что такая норма не подходит для введения функционального пространства произвольного дробного порядка гладкости. Затем мы вводим новую норму, связанную с ядром обобщенного потенциала Бесселя. Общая теория потенциала берет свое начало из теории электростатического и гравитационного потенциалов и уравнений Лапласа, волнового уравнения, уравнений Гельмгольца и Пуассона. Известно, что знаменитые потенциалы Рисса являются реализациями действительных отрицательных степеней оператора Лапласа и волновых операторов. Между тем большое внимание в теории потенциала уделяется потенциалу Бесселя, поскольку он порождает пространства дробной гладкости. Обобщение в статье достигается путем рассмотрения оператора Лапласа — Бесселя, построенного на основе сингулярного дифференциального оператора Бесселя. Теория сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя и неразрывно связанная с ней теория соответствующих весовых функциональных пространств, относятся к тем математическим направлениям, теоретическое и прикладное значение которых трудно переоценить.

Ключевые слова: оператор Бесселя, обобщенное пространство бесселевых потенциалов, весовой интеграл Дирихле.

AMS Subject Classification: 42B35, 42B20, 47B38, 46E30.

Образец цитирования: *Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л.* К теории пространств обобщенных потенциалов Бесселя // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 3.—С. 62–77. DOI: 10.46698/c3174-5520-8062-f.

1. Введение

Фундаментальная роль классических бесселевых потенциалов в общей теории функциональных пространств дробной гладкости и в ее приложениях к теории уравнений с частными производными хорошо известна [1, 2]. Классические потенциалы Бесселя строятся с использованием преобразования Фурье.

#Работа первого автора выполнена при поддержки Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание FEGS-2020-0001.

Целью данной статьи является развитие теории пространства обобщенных потенциалов Бесселя $\mathbf{B}_\gamma^\alpha$, построенного с использованием преобразования Ханкеля. Такое пространство было впервые введено Л. Н. Ляховым в [3] с использованием подхода Стейна — Лизоркина. В [3] введенные ранее Л. Н. Ляховым в [4, 5] B-гиперсингулярные интегралы и B-потенциалы Рисса были применены для построения нормы в $\mathbf{B}_\gamma^\alpha$. В этой статье мы используем другой подход для введения нормы в $\mathbf{B}_\gamma^\alpha$, основанный на работах Н. Ароншайна и К. Т. Смита [6–8]. Этот подход заключается во введении нормы в $\mathbf{B}_\gamma^\alpha$ на основе весовых интегралов Дирихле.

Пространства обобщенных бесселевых потенциалов произвольного порядка α необходимы для определения классов решений краевой задачи вида

$$Au = f \ \text{ в } \ D, \qquad B_i u = 0 \ \text{ на } \ \partial D,$$

где A — эллиптический оператор, содержащий дифференциальные операторы Бесселя $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$, в частности A может представлять собой оператор Лапласа — Бесселя $\Delta_\gamma = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}$.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ x_1 > 0, \ \ldots, \ x_n > 0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ является мультииндексом, состоящим из положительных фиксированных действительных чисел γ_i, $i = 1, \ldots, n$, и $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Пусть Ω — конечное или бесконечное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+ = \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}^n_+$, где $\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \{x{=}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$. Мы будем работать с классом функций $C^m(\Omega_+)$, состоящим из m раз дифференцируемых на Ω_+ функций. Обозначим через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i непрерывно продолжаются до $x_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Класс $C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ пусть состоит из всех функций из $C^m(\overline{\Omega}_+)$ таких, что $\frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x_i^{2k+1}}\Big|_{x_i=0} = 0$ для всех неотрицательных целых чисел $k \leqslant \frac{m-1}{2}$ (см. [9, с. 21]). В дальнейшем будем использовать обозначение C^m_{ev} для $C^m_{ev}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$. Положим $C^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+) = \bigcap C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$, где пересечение берется по всем конечным m и $C^\infty_{ev}(\overline{\mathbb{R}}_+) = C^\infty_{ev}$.

Пусть $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ пространство всех функций $f{\in}C^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ с конечным носителем. Будем использовать обозначения $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+) = \mathscr{D}_+(\overline{\Omega}_+)$ и $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}$.

Пусть $L_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+) = L_p^\gamma$, $1 \leqslant p < \infty$, состоит из всех измеримых функций на $\mathbb{R}^n_+$, четных по каждой из переменных x_i, $i = 1, \ldots, n$, таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^\gamma dx < \infty.$$

Здесь и далее $x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. Для любого $p \geqslant 1$ норма функции f в L_p^γ определяется

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)} = \|f\|_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Известно [9], что пространство L_p^γ — банахово.

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f{\in}L_1^\gamma(\mathbb{R}^n_+)$ определяется как

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)=\mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi)=\widehat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)x^\gamma dx,$$

где $\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)=\prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)$. Символ j_ν используется для обозначения нормированной функции Бесселя первого рода $j_\nu(x)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{x^\nu}J_\nu(x)$, где J_ν — функция Бесселя первого рода [10].

Пусть $f\in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+)$ функция ограниченной вариации в окрестности точки x непрерывности f. Тогда при $\gamma>0$ формула обращения преобразования имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma^{-1}\big[\widehat{f}(\xi)\big](x)=f(x)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\big(\frac{\gamma_j+1}{2}\big)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\,\xi^\gamma d\xi.$$

Преобразование Ханкеля сводит оператор Бесселя к умножению на квадрат соответствующего аргумента со знаком «минус» (см. [9]):

$$F_{\gamma_i}\big[(B_{\gamma_i})_{x_i}f\big](\xi)=-|\xi_i|^2F_{\gamma_i}[f](\xi), \tag{1}$$

где $(B_{\gamma_i})_{x_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ — оператор Бесселя, $i=1,\ldots,n$.

Из равенства Парсеваля для одномерного преобразования Ханкеля (см. [9, с. 20]) и того, что $f\in L_2^\gamma(\mathbb{R}^n_+)$ получаем, что $\mathbf{F}_\gamma f\in L_2^\gamma(\mathbb{R}^n_+)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\big|\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)\big|^2\xi^\gamma d\xi=2^{|\gamma|-n}\prod_{j=1}^n\Gamma^2\Big(\frac{\gamma_j+1}{2}\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\big|f(x)\big|^2x^\gamma dx. \tag{2}$$

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f)(x)={}^\gamma\mathbf{T}_x^y f(x)=({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}\ldots{}^{\gamma_n}T_{x_n}^{y_n}f)(x), \tag{3}$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}$, $i=1,\ldots,n$, действует по формуле

$$({}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}f)(x)=\frac{\Gamma\big(\frac{\gamma_i+1}{2}\big)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\big(\frac{\gamma_i}{2}\big)}\int\limits_0^\pi f\big(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+\tau_i^2-2x_iy_i\cos\varphi_i},x_{i+1},\ldots,x_n\big)\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\,d\varphi_i.$$

Далее будем использовать обозначение $C(\gamma)=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^n\frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma_i}{2})}$.

Обобщенная свертка, порожденная многомерным обобщенным сдвигом ${}^\gamma\mathbf{T}_x^y$, имеет вид

$$(f*g)_\gamma(x)=(f*g)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}f(y)({}^\gamma\mathbf{T}_x^y g)(x)\,y^\gamma dy. \tag{4}$$

Многомерный оператор Пуассона $\mathbf{P}_x^\gamma$ действует на суммируемую функцию f по формуле

$$\mathbf{P}_x^\gamma f(x)=C(\gamma)\int\limits_0^\pi\cdots\int\limits_0^\pi f(x_1\cos\alpha_1,\ldots,x_n\cos\alpha_n)\prod_{i=1}^n\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\,d\alpha_i. \tag{5}$$

3. Весовой интеграл Дирихле

Пусть $i = (i_1, \dots, i_m)$ — мультииндекс, состоящий из целых чисел от 1 до n, $|i| = i_1 + \dots + i_n$, $\xi^i = \prod_{k=1}^m \xi_{ik}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\mathbb{B}_i = (B_{\gamma_{i_m}})_{x_{i_m}} \dots (B_{\gamma_{i_1}})_{x_{i_1}}$, где $(B_{\gamma_{i_k}})_{x_{i_k}} = \frac{\partial^2}{\partial x_{i_k}^2} + \frac{\gamma_{i_k}}{x_{i_k}} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}$ — оператор Бесселя, $k = 1, \dots, m$. Для целого числа $\alpha \geqslant 0$ весовой интеграл Дирихле порядка α определим формулой

$$d_{\alpha,\gamma}(u) = \sum_{|i|=\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbb{B}_i u|^2 x^\gamma dx.$$

В образе преобразования Ханкеля (1) получим

$$d_{\alpha,\gamma}(u) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |\xi|^{4\alpha} \left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2 \xi^\gamma d\xi. \tag{6}$$

Формула (6) может быть использована для определения весового интеграла Дирихле d_α^γ для произвольного $\alpha \geqslant 0$.

Лемма 1. *Для $0 < \alpha < 1/2$ и функции $u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\mathbb{R}_+^n)$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} d_{\alpha,\gamma}(u) &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |\xi|^{4\alpha} \left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2 \xi^\gamma d\xi \\ &= \frac{1}{C(n,\gamma,\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left|u(y) - u(x)\right|^2 \left({}^\gamma\mathbf{T}_y^x \frac{1}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\right) x^\gamma y^\gamma dx dy, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$C(n,\gamma,\alpha) = \frac{2^{1-|\gamma|-4\alpha}\pi}{\sin(2\alpha\pi)\,\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} + 2\alpha\right) \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

$\lhd$ Для интеграла

$$\mathbf{I} = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\left|{}^\gamma\mathbf{T}_x^y u(x) - u(x)\right|^2}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}} x^\gamma y^\gamma dx dy$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{I} = C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^\pi & \frac{\left|u\left(\sqrt{x_1^2 - 2x_1 y_1 \cos\beta_1 + y_1^2}, \dots, \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\beta_1 + y_n^2}\right) - u(x)\right|^2}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}} \\ & \times \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\beta_i \, d\beta_i \, x^\gamma y^\gamma dx dy. \end{aligned}$$

Переходя к координатам

$$\begin{gathered} \widetilde{y}_1 = y_1 \cos\beta_1, \quad \widetilde{y}_2 = y_1 \sin\beta_1, \quad \widetilde{y}_3 = y_2 \cos\beta_2, \\ \widetilde{y}_4 = y_2 \sin\beta_2, \quad \dots, \quad \widetilde{y}_{2n-1} = y_n \cos\beta_n, \quad \widetilde{y}_{2n} = y_n \sin\beta_n, \end{gathered}$$

будем иметь

$$\mathbf{I}=C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\widetilde{\mathbb{R}}^{2n}_+}\frac{\left|u\big(\sqrt{(x_1-\widetilde{y}_1)^2+\widetilde{y}_2^2},\ldots,\sqrt{(x_n-\widetilde{y}_{2n-1})^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\,\big)-u(x)\right|^2}{|\widetilde{y}\,|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1}x^\gamma d\widetilde{y}dx$$

$$=C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\widetilde{\mathbb{R}}^{2n}_+}\frac{\left|u\Big(\sqrt{z_1^2+\widetilde{y}_2^2},\ldots,\sqrt{z_{2n-1}^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\Big)-u(x)\right|^2}{\big((x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_2^2+\ldots+(x_n-z_{2n-1})^2+\widetilde{y}_{2n}^2\big)^{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}}$$

$$\times\prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1}x^\gamma dz_1d\widetilde{y}_2\ldots dz_{2n-1}\widetilde{y}_{2n}\,dx,$$

где $\{\widetilde{y}_{2i-1}-x_i=z_{2i-1}, i=1,\ldots,n\}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}^{2n}_+=\{\widetilde{y}\in\mathbb{R}^{2n}:\widetilde{y}_{2i}>0, i=1,\ldots,n\}$. Полагая $z_{2i-1}=y_i\cos\beta_i$, $\widetilde{y}_{2i}=y_i\sin\beta_i$, $i=1,\ldots,n$, запишем

$$\mathbf{I}=C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_0^\pi\cdots\int\limits_0^\pi\frac{\left|u(y)-u(x)\right|^2}{\big(x_1^2-2x_1y_1\cos\beta_1+y_1^2+\ldots+x_n^2-2x_ny_n\cos\beta_1+y_n^2\big)^{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}}$$

$$\times\prod_{i=1}^n\sin^{\gamma_i-1}\beta_i\,d\beta_i\,x^\gamma y^\gamma dxdy=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|u(y)-u(x)\right|^2\left({}^\gamma\mathbf{T}^x_y\frac{1}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\right)x^\gamma y^\gamma dxdy.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|{}^\gamma\mathbf{T}^y_xu(x)-u(x)\right|^2}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}x^\gamma y^\gamma dxdy=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|u(y)-u(x)\right|^2\left({}^\gamma\mathbf{T}^x_y\frac{1}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\right)x^\gamma y^\gamma dxdy.\quad(8)$$

Для $0<\alpha<1/2$ по формуле Парсеваля для многомерного преобразования Ганкеля (2) с использованием формулы 3.170 из [11, с. 155], получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|{}^\gamma\mathbf{T}^y_xu(x)-u(x)\right|^2}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}x^\gamma y^\gamma dxdy=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{y^\gamma dy}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|{}^\gamma\mathbf{T}^y_xu(x)-u(x)\right|^2x^\gamma dx$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\big(\frac{\gamma_j+1}{2}\big)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{y^\gamma dy}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|(\mathbf{F}_\gamma)_x\big[{}^\gamma\mathbf{T}^y_xu(x)\big](\xi)-\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2\xi^\gamma d\xi$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\big(\frac{\gamma_j+1}{2}\big)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{y^\gamma dy}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|\mathbf{j}_\gamma(y;\xi)-1\right|^2\left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2\xi^\gamma d\xi$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\big(\frac{\gamma_j+1}{2}\big)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2\xi^\gamma d\xi\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|\mathbf{j}_\gamma(y;\xi)-1|^2}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}y^\gamma dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathscr{A}(\xi)\left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2\xi^\gamma d\xi,$$

где

$$\mathscr{A}(\xi)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\big(\frac{\gamma_j+1}{2}\big)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|\mathbf{j}_\gamma(y;\xi)-1|^2}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}y^\gamma dy.$$

Поскольку

$$\mathscr{A}(\xi)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|\mathbf{j}_\gamma(y;\xi)-1|^2}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\,y^\gamma dy=\left\{y=\frac{z}{|\xi|}\right\}$$

$$=|\xi|^{4\alpha}\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|\mathbf{j}_\gamma\left(z;\frac{\xi}{|\xi|}\right)-1\right|^2}{|z|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\,z^\gamma dz=C(n,\gamma,\alpha)|\xi|^{4\alpha},$$

где

$$C(n,\gamma,\alpha)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|\mathbf{j}_\gamma\left(z;\frac{\xi}{|\xi|}\right)-1\right|^2}{|z|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\,z^\gamma dz, \tag{9}$$

то мы видим, что $\mathscr{A}(\xi)$ однородная порядка 4α функция, инвариантная относительно ортогональных преобразований, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|{}^\gamma\mathbf{T}^y_x u(x)-u(x)\right|^2}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\,x^\gamma y^\gamma dxdy=C(n,\gamma,\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|\xi|^{4\alpha}\left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2\xi^\gamma d\xi. \tag{10}$$

Вычислим $C(n,\gamma,\alpha)$. Используя представление для $\mathbf{j}_\gamma$ вида $\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)=\mathbf{P}^\gamma_\xi\left[e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right]$ (см. [11, с. 137, формула 3.138]), где $\mathbf{P}^\gamma_\xi$ — оператор (5), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|\mathbf{j}_\gamma\left(z;\frac{\xi}{|\xi|}\right)-1\right|^2}{|z|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\,z^\gamma dz=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|\mathbf{P}^\gamma_\xi\left[e^{-i\left\langle z;\frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle}\right]-1\right|^2}{|z|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\,z^\gamma dz.$$

В последнем интеграле введем новые координаты:

$$\widetilde{x}_1=z_1\cos\alpha_1,\quad \widetilde{x}_2=z_1\sin\alpha_1,\quad \widetilde{x}_3=z_2\cos\alpha_2,$$
$$\widetilde{x}_4=z_2\sin\alpha_2,\quad \dots,\quad \widetilde{x}_{2n-1}=z_n\cos\alpha_n,\quad \widetilde{x}_{2n}=z_n\sin\alpha_n.$$

В этих координатах запишем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|\mathbf{j}_\gamma\left(z;\frac{\xi}{|\xi|}\right)-1\right|^2}{|z|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\,z^\gamma dz=C(\gamma)\int\limits_{\widetilde{\mathbb{R}}^{2n}_+}\left|e^{-i\left\langle\widetilde{x},\frac{\widetilde{\xi}'}{|\xi|}\right\rangle}-1\right|^2\prod_{i=1}^{n}\widetilde{x}_{2i}^{\,\gamma_i-1}d\widetilde{x},$$

где $\widetilde{x}=(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_{2n})\in\mathbb{R}^{2n}$, $\widetilde{x}_{2i}>0$; $i=\overline{1,n}$, $|\widetilde{x}|=|z|$, $\widetilde{\xi}'=(\xi_1,0,\xi_2,0,\dots,\xi_n,0)\in\mathbb{R}^{2n}$, $|\widetilde{\xi}'|=|\xi|$, $\widetilde{\mathbb{R}}^{2n}_+=\{x\in\mathbb{R}^{2n}\colon x_{2i}>0, i=1,\dots,n\}$. Теперь под интегралом в $C(n,\gamma,\alpha)$ функция типа «плоской волны». Выбирая интегрирование по $\widetilde{x}_1=p$, замечая, что $\left\langle\widetilde{x},\frac{\widetilde{\xi}'}{|\xi|}\right\rangle=p$, и обозначая $\widetilde{x}'=(\widetilde{x}_2,\dots,\widetilde{x}_{2n})$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|\mathbf{j}_\gamma\left(z;\frac{\xi}{|\xi|}\right)-1\right|^2}{|z|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\,z^\gamma dz=C(\gamma)\int\limits_{\widetilde{\mathbb{R}}^{2n}_+}\frac{|e^{-ip}-1|^2}{\left|p^2+|\widetilde{x}'|^2\right|^{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}}\prod_{i=1}^{n}\widetilde{x}_{2i}^{\,\gamma_i-1}dpd\widetilde{x}'$$

$$=\left\{\widetilde{x}'=pt\right\}=C(\gamma)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|e^{-ip}-1|^2}{|p|^{4\alpha+1}}\,dp\int\limits_{\substack{\mathbb{R}^{2n-1},\,t_{2i-1}>0,\\ i=1,\dots,n}}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}t_{2i-1}^{\,\gamma_i-1}\,dt}{(1+|t|^2)^{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{-ip}-1|^2}{|p|^{4\alpha+1}}\,dp = 2^{3-4\alpha}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 p}{p^{4\alpha+1}}\,dp = -4\cos(2\pi\alpha)\Gamma(-4\alpha),$$

то

$$\int\limits_{\substack{\mathbb{R}^{2n-1},\,t_{2i-1}>0,\\ i=1,\dots,n}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} t_{2i-1}^{\,\gamma_i-1}\,dt}{(1+|t|^2)^{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\rho^{n+|\gamma|-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}}\,d\rho \int\limits_{\widetilde{S}_1^+(2n-1)} \prod_{i=1}^{n}\theta_{2i-1}^{\,\gamma_i-1}\,dS$$

$$\times\ \frac{\Gamma\big(2\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\big)}{2\Gamma\big(\frac{n+|\gamma|}{2}+2\alpha\big)}\,\big|\widetilde{S}_1^+(2n-1)\big|_{|\gamma|-1}$$

при $t=\rho\theta$. Здесь $\widetilde{S}_1^+(2n-1)$ — часть единичной сферы с центром в начале координат в $\mathbb{R}^{2n-1}$ при $\widetilde{x}_{2i}>0$, $i=1,\dots,n$. Применяя формулу 107 из [11, с. 49], будем иметь

$$\int\limits_{\widetilde{S}_1^+(2n-1)} \prod_{i=1}^{n}\theta_{2i-1}^{\,\gamma_i-1}\,dS = \frac{\Gamma^{n-1}\big(\frac12\big)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\big(\frac{\gamma_i}{2}\big)}{2^{n-1}\Gamma\big(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\big)} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\big(\frac{\gamma_i}{2}\big)}{2^{n-1}\Gamma\big(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\big)} = \big|\widetilde{S}_1^+(2n-1)\big|_{|\gamma|-1}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\big|\mathbf{j}_\gamma\big(z;\frac{\xi}{|\xi|}\big)-1\big|^2}{|z|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\,z^\gamma dz = C(\gamma)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|e^{-ip}-1|^2}{|p|^{4\alpha+1}}\,dp \int\limits_{\substack{\mathbb{R}^{2n-1},\,t_{2i-1}>0,\\ i=1,\dots,n}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} t_{2i-1}^{\,\gamma_i-1}\,dt}{(1+|t|^2)^{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}}.$$

Наконец, используя формулу удвоения Лежандра и формулу отражения Эйлера для гамма-функции, упростим константу $C(n,\gamma,\alpha)$:

$$C(n,\gamma,\alpha) = \frac{2^{1-|\gamma|-4\alpha}\pi}{\sin(2\alpha\pi)\,\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma\big(\frac{n+|\gamma|}{2}+2\alpha\big)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\big(\frac{\gamma_i+1}{2}\big)}.$$

Принимая во внимание (8), (10) и вид постоянной $C(n,\gamma,\alpha)$, получаем утверждение леммы. $\rhd$

Константа $C(n,\gamma,\alpha)$ обладает свойствами

$$\lim_{\alpha\to 0+}\frac{1}{C(n,\gamma,\alpha)} = 0, \qquad \lim_{\alpha\to \frac12 -0}\frac{1}{C(n,\gamma,\alpha)} = 0.$$

Поэтому

$$d_{\alpha,\gamma}(u) = \sum_{|i|=\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbb{B}_i u|^2\,x^\gamma dx, \quad \text{если } \alpha \text{ целое;}$$

в остальных случаях

$$d_{\alpha,\gamma}(u) = \frac{1}{C(n,\gamma,\alpha-l)}\sum_{|i|=l}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\big|\mathbb{B}_i u(y) - \mathbb{B}_i u(x)\big|^2\left({}^\gamma\mathbf{T}_y^x\frac{1}{|y|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\right)x^\gamma y^\gamma,$$

где $l=[\alpha]$. Весовой интеграл Дирихле $d_{\alpha,\gamma}$ непрерывен по α и не зависит от ортогональных координат в $\mathbb{R}_+^n$.

4. Нахождение подходящей нормы для $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$

С практической и теоретической точек зрения важно установить, в каком пространстве и с какой нормой множество $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ плотно.

В [3] введено и рассмотрено пространство функций, связанных с умножением на $|x|^{-\alpha}$ в образах преобразования Ханкеля. Это пространство называется пространством B-потенциалов Рисса. Напомним, что в теории B-потенциала B-потенциал Рисса имеет вид [4]

$$(U^\alpha_\gamma f)(x) = u(x) = C_{n,\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y)\big({}^\gamma\mathbf{T}^y_x|x|^{\alpha-n-|\gamma|}\big)\, y^\gamma dy, \quad \alpha>0.$$

Для U^α_γ справедлив аналог теоремы Соболева (см. [4, теорема 1]). А именно, для $0<\alpha<\frac{n+|\gamma|}{p}$, $p>1$, оператор U^α_γ с плотностью $f\in L^\gamma_p$ ограничен из L^γ_p в L^γ_q, где $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n+|\gamma|}$. При $\alpha\geqslant\frac{n+|\gamma|}{p}$ потенциал U^α_γ можно определить в смысле весовых обобщенных функций. Как следствие этого факта в [3, теорема 5] было доказано, что $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ плотно в пространстве B-потенциалов Рисса только для $0<\alpha<\frac{n+|\gamma|}{p}$. Поэтому норму, основанную на B-потенциале Рисса, неудобно использовать в дифференциальных задачах, так как для этих задач нужны потенциалы сколь угодно высокого порядка.

Далее мы докажем, что, поскольку сходимость по норме не влечет поточечной сходимости подпоследовательности в пространствах с нормой $\sqrt{d_{\alpha,\gamma}}$, то $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ не является функциональным пространством при $\alpha\geqslant\frac{n+|\gamma|}{4}$.

Теорема 1. *Если $\alpha\geqslant\frac{n+|\gamma|}{4}$, то пространство $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$, нормированное $\sqrt{d_{\alpha,\gamma}}$, не является функциональным пространством относительно любого исключительного класса.*

$\lhd$ Пусть $u\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ и u тождественно равно 1 в некоторой окрестности нуля, принадлежащей $\mathbb{R}^n_+$. Пусть $u_\rho=u(x/\rho)$. Будем иметь

$$d_{\alpha,\gamma}(u_\rho)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|\xi|^{4\alpha}\left|\mathbf{F}_\gamma[u]\big(\xi/\rho\big)\right|^2\xi^\gamma d\xi=\{\xi/\rho=y\}$$

$$=\rho^{n+|\gamma|-4\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|y|^{4\alpha}\left|\mathbf{F}_\gamma[u](y)\right|^2 y^\gamma dy=\rho^{n+|\gamma|-4\alpha}\,d_{\alpha,\gamma}(u).$$

Следовательно, для $\alpha>\frac{n+|\gamma|}{4}$, получим

$$\lim_{\rho\to\infty}d_{\alpha,\gamma}(u_\rho)=0, \quad \text{но} \quad \lim_{\rho\to\infty}u_\rho(x)=1.$$

Это показывает, что рассматриваемое пространство не может быть функциональным пространством (поскольку в противном случае все $\mathbb{R}^n_+$ должно быть исключительным множеством).

Теперь рассмотрим случай $\alpha=\frac{n+|\gamma|}{4}$. Выбирая $\varepsilon\in(0,\alpha)$ и $v\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ для билинейной формы, соответствующей квадратичной форме $d_{\alpha,\gamma}(u)$, получаем

$$
\begin{aligned}
d_{\alpha,\gamma}(u_\rho, v) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\xi|^{4\alpha}\, \mathbf{F}_\gamma[u_\rho](\xi)\, \overline{\mathbf{F}_\gamma[v](\xi)}\, \xi^\gamma d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\xi|^{2\alpha+2\varepsilon}\, \mathbf{F}_\gamma[u_\rho](\xi)\, |\xi|^{2\alpha-2\varepsilon}\, \overline{\mathbf{F}_\gamma[v](\xi)}\, \xi^\gamma d\xi \\
&\leqslant \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\xi|^{4\alpha+4\varepsilon} \left|\mathbf{F}_\gamma[u_\rho](\xi)\right|^2 \xi^\gamma d\xi \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\xi|^{4\alpha-4\varepsilon} \left|\mathbf{F}_\gamma[v](\xi)\right|^2 \xi^\gamma d\xi \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{d_{\alpha+\varepsilon,\gamma}(u_\rho)}\, \sqrt{d_{\alpha-\varepsilon,\gamma}(v)}.
\end{aligned}
$$

Здесь мы использовали неравенство Коши — Буняковского. Так как $\lim_{\rho\to\infty} d_{\alpha+\varepsilon,\gamma}(u_\rho)=0$, то равенство $\lim_{\rho\to\infty} d_{\alpha,\gamma}(u_\rho, v) = 0$ выполняется для каждого $v \in \overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$. Мы рассматриваем гильбертово пространство, являющееся полным метрическим пространством относительно функции расстояния, индуцированной скалярным произведением $d_{\alpha,\gamma}(u, v)$. Это пространство является абстрактным пополнением $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ с нормой $\sqrt{d_{\alpha,\gamma}}$. Таким образом, u_ρ слабо сходится к 0 при $\rho \to \infty$ в этом гильбертовом пространстве, потому что $d_{\alpha,\gamma}(u_\rho)$ ограничена. Тогда существует последовательность $\rho_k \to \infty$ такая, что среднее арифметическое последовательности $\{u_{\rho_k}\}$ сильно сходится к 0 (см. [12]). Но из равенства $\lim_{\rho\to\infty} u_\rho(x) = 1$ следует, что последовательность средних арифметических везде поточечно сходится к 1. Так что пространство $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$, нормированное $\sqrt{d_{\alpha,\gamma}}$, не может быть функциональным пространством. $\rhd$

Одна из простейших норм на $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$, эквивалентная $\sqrt{d_{\alpha,\gamma}}$, имеет вид

$$
\|u\|^2_{\alpha,\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(1 + |\xi|^2\right)^\alpha \left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2 \xi^\gamma d\xi. \tag{11}
$$

Далее мы покажем, что норма (11) может быть представлена с помощью сверточных ядер, порождающих обобщенный потенциал Бесселя.

5. Класс обобщенных потенциалов Бесселя

В этом разделе мы получим специальное представление нормы (11), наиболее удобное для классов обобщенных потенциалов Бесселя. Обобщение пространств бесселевых потенциалов имеет богатую историю. В [13] для функций из пространства обобщенных бесселевых потенциалов, построенных на основе перестановочно инвариантных пространств, установлено эквивалентное описание конуса убывающих перестановок. В [14] для пространств обобщенных потенциалов Рисса и Бесселя установлены эквивалентные характеризации конусов убывающих перестановок.

Обобщенный потенциал Бесселя задается соотношением (см. [15, 16])

$$
u = (\mathbf{G}^\alpha_\gamma \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G^\gamma_\alpha(y) \left({}^\gamma\mathbf{T}^y_x \varphi(x)\right) y^\gamma dy, \tag{12}
$$

где

$$
G^\gamma_\alpha(x) = \mathbf{F}^{-1}_\gamma \Big[\left(1 + |\xi|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \Big](x) \tag{13}
$$

является обобщенным ядром Бесселя. Две формы оператора, обратного к (12), были построены в [16].

В [3] пространство $\mathbf{B}^\alpha_\gamma(L^\gamma_p)=\{u\colon u{=}\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi, \varphi\in L^\gamma_p\}$ с нормой $\|u\|_{\mathbf{B}^\alpha_\gamma(L^\gamma_p)}=\|\varphi\|_{L^\gamma_p}$ было введено с использованием B-гиперсингулярных интегралов.

В [15] было показано, что

$$G^\gamma_\alpha(x)=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|),\tag{14}$$

где $K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}$ — модифицированная функция Бесселя второго рода [10].

Поскольку G^γ_α интегрируема с весом x^γ (см. [15, 16]), ее преобразование Ханкеля существует для каждого ξ. Ядро G^γ_α является аналитическим при $\alpha>0$ как функция от α. Таким образом, из (13) путем аналитического продолжения получаем, что преобразование Ханкеля обобщенного ядра Бесселя для $\alpha>0$ равно

$$\mathbf{F}_\gamma[G^\gamma_\alpha](\xi)=\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}.\tag{15}$$

Кроме того, для ядра G^γ_α справедливы свойства $\int_{\mathbb{R}^n_+}G^\gamma_\alpha(x)x^\gamma dx=1$ и $(G^\gamma_\alpha*G^\gamma_\beta)_\gamma=G^\gamma_{\alpha+\beta}$, $\alpha>0$, $\beta>0$ (см. [15, 16]), где $(G^\gamma_\alpha*G^\gamma_\beta)_\gamma$ — это обобщенная свертка (4).

Чтобы получить непосредственное представление (11) для $0<\alpha<1/2$, сначала введем функцию

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha,\gamma}(|x|)&=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}\,K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|)\\&=\frac{2^{n-\alpha+2}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty t^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}-1}e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}\,dt.\end{aligned}\tag{16}$$

Тогда обобщенный потенциал Бесселя в (12) может быть представлен как оператор обобщенной свертки (4):

$$\left(\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi\right)(x)=\left(\frac{\omega_{\alpha,\gamma}(|x|)}{|x|^{n+|\gamma|-\alpha}}*\varphi\right)_\gamma,\quad \alpha>0.$$

Далее нам потребуется $\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)$ для $0<\alpha<1/2$. Асимптотические свойства модифицированной функции Бесселя K_ν гарантируют, что функция ядра $\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)$ экспоненциально убывает на бесконечности и обращается в константу в начале координат:

$$\begin{aligned}\lim_{|x|\to\infty}\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)&=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|+4\alpha}{2}+1}}{\Gamma(-2\alpha)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\lim_{|x|\to\infty}|x|^{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}K_{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}(|x|)\\&=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|+4\alpha}{2}+1}}{\Gamma(-2\alpha)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{|x|\to\infty}|x|^{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}-\frac{1}{2}}e^{-|x|}=0,\end{aligned}$$

$$\lim_{|x|\to 0}\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|+4\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(-2\alpha\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\lim_{|x|\to 0}|x|^{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}K_{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}(|x|)$$

$$=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|+4\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(-2\alpha\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\lim_{|x|\to 0}|x|^{\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}\right)}{2^{1-\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}}|x|^{-\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}}=\frac{2^{n+4\alpha}\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-2\alpha\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{|x|\to\infty}\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)=0,\quad \lim_{|x|\to 0}\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)=\frac{2^{n+4\alpha}\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-2\alpha\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}. \tag{17}$$

Теорема 2. *Норма $\|u\|_{\alpha,\gamma}$ допускает следующее представление:*

$$\begin{gathered}\|u\|^2_{\alpha,\gamma}=2^{|\gamma|-n+1}\prod_{i=1}^{n}\Gamma^2\Big(\frac{\gamma_i+1}{2}\Big)\\ \times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|{}^\gamma\mathbf{T}^y_x u(x)+u(y)\right|^2}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\big(\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)-\omega_{-4\alpha,\gamma}(0)\big)\,x^\gamma dx\,y^\gamma dy\\ -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|{}^\gamma\mathbf{T}^y_x u(x)-u(y)\right|^2}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\big(\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)+\omega_{-4\alpha,\gamma}(0)\big)\,x^\gamma dx\,y^\gamma dy\Bigg).\end{gathered} \tag{18}$$

$\lhd$ Пусть $\gamma_{n+1}\geqslant 0$ произвольное и

$$\mathbf{J}=\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|j_{\frac{\gamma_{n+1}-1}{2}}(z_0)u(x)-u(y)\right|^2}{\left[{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\,|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma'|+1+4\alpha}{2}}}\,x^\gamma dx\,y^\gamma dy\,z_0^{\gamma_{n+1}}dz_0,$$

где $j_\nu(x)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{x^\nu}J_\nu(x)$, J_ν — функция Бесселя первого рода. Действуя так же, как и при доказывании (8) и применяя (2) к интегралу по y, получим

$$\mathbf{J}=\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|j_{\frac{\gamma_{n+1}-1}{2}}(z_0)\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x u(x)-u(y)\right|^2}{\left[|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma'|+1+4\alpha}{2}}}\,x^\gamma dx\,y^\gamma dy\,z_0^{\gamma_{n+1}}dz_0$$

$$=\int\limits_0^\infty z_0^{\gamma_{n+1}}dz_0\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{x^\gamma dx}{\left[|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|j_{\frac{\gamma_{n+1}-1}{2}}(z_0)\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x u(x)-u(y)\right|^2 y^\gamma dy$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty dz_0\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{x^\gamma dx}{\left[|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|j_{\frac{\gamma_{n+1}-1}{2}}(z_0)\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)-1\right|^2\left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2\xi^\gamma d\xi.$$

Полагая $(x,z_0)=\widetilde{z}$, $\widetilde{\xi}=(\xi,1)$, $\gamma'=(\gamma,\gamma_{n+1})$, будем иметь

$$\mathbf{J}=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty z_0^{\gamma_{n+1}}dz_0\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\frac{x^\gamma dx}{\left[|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma'|+1+4\alpha}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left|j_{\frac{\gamma_{n+1}-1}{2}}(z_0)\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)-1\right|^2\left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2\xi^\gamma d\xi$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2\xi^\gamma d\xi\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\frac{\left|\mathbf{j}_{\gamma'}\left(\widetilde{z};\widetilde{\xi}\right)-1\right|^2}{|\widetilde{z}\,|^{n+|\gamma'|+1+4\alpha}}\,\widetilde{z}^{\,\gamma'}d\widetilde{z}=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\mathscr{B}(\xi)\left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2\xi^\gamma d\xi.$$

Производя замену переменных $\widetilde{z}=z/|\widetilde{\xi}|$, получим

$$\mathscr{B}(\xi)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\frac{|\mathbf{j}_{\gamma'}(\widetilde{z};\widetilde{\xi})-1|^2}{|\widetilde{z}\,|^{n+|\gamma'|+1+4\alpha}}\,\widetilde{z}^{\,\gamma'}d\widetilde{z}$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\left(1+|\xi|\right)^{4\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\frac{\left|\mathbf{j}_{\gamma'}\left(z;\frac{\widetilde{\xi}}{|\widetilde{\xi}\,|}\right)-1\right|^2}{|z|^{n+|\gamma'|+1+4\alpha}}\,z^{\gamma'}dz$$

и

$$\mathbf{J}=D(n,\gamma',\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left(1+|\xi|\right)^{4\alpha}\left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2\xi^\gamma d\xi.$$

Из (9) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\frac{\left|\mathbf{j}_{\gamma'}\left(z;\frac{\widetilde{\xi}}{|\widetilde{\xi}|}\right)-1\right|^2}{|z|^{n+|\gamma'|+1+4\alpha}}\,z^{\gamma'}dz=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n+1}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}{2^{n+1-|\gamma'|}}\,C(n+1,\gamma',\alpha)$$

и

$$D(n,\gamma',\alpha)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{\gamma_{n+1}+1}{2}\right)}{2^{1-\gamma_{n+1}}}\,C(n+1,\gamma',\alpha),$$

где

$$C(n+1,\gamma',\alpha)=\frac{2^{1-|\gamma'|-4\alpha}\pi}{\sin(2\alpha\pi)\,\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|+1}{2}+2\alpha\right)\prod\limits_{i=1}^{n+1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

Значит, для произвольного $\gamma_{n+1}\geqslant 0$, получим

$$\|u\|_{\alpha,\gamma}^2=\frac{1}{D(n,\gamma',\alpha)}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\frac{\left|j_{\frac{\gamma_{n+1}-1}{2}}(z_0)u(x)-u(y)\right|^2}{\left[{}^\gamma\mathbf{T}_x^y\,|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}\,x^\gamma dx\,y^\gamma dy\,z_0^{\gamma_{n+1}}dz_0.$$

Переходя к $\gamma_{n+1}=0$ и полагая

$$E(n,\gamma,\alpha)=D(n,\gamma',\alpha)\Big|_{\gamma_{n+1}=0}=\frac{\pi\sqrt{\pi}\,2^{-|\gamma|-4\alpha}}{\sin(2\alpha\pi)\,\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)},$$

запишем

$$\|u\|^2_{\alpha,\gamma}=\frac{1}{E(n,\gamma,\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|e^{iz_0}u(x)-u(y)\right|^2}{\left[{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\,|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}\,x^\gamma dx\,y^\gamma dydz_0$$

$$=\frac{1}{E(n,\gamma,\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|e^{\frac{iz_0}{2}}u(x)-e^{-\frac{iz_0}{2}}u(y)\right|^2}{\left[{}^\gamma\mathbf{T}^y_x\,|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}\,x^\gamma dx\,y^\gamma dydz_0$$

$$=\frac{1}{E(n,\gamma,\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|{}^\gamma\mathbf{T}^y_x u(x)-u(y)|^2\cos^2\frac{z_0}{2}}{\left[|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}\,x^\gamma dx\,y^\gamma dydz_0$$

$$+\frac{1}{E(n,\gamma,\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|{}^\gamma\mathbf{T}^y_x u(x)+u(y)\right|^2\sin^2\frac{z_0}{2}}{\left[|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}\,x^\gamma dx\,y^\gamma dydz_0.$$

Используя `Wolfram Mathematica` и (17), мы получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{z_0}{2}\,dz_0}{\left[|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{1-n-4\alpha}\,\Gamma(-2\alpha)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha+1}{2}\right)}\left(\omega_{-4\alpha,\gamma}(0)+\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)\right),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{z_0}{2}dz_0}{\left[|x|^2+z_0^2\right]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{1-n-4\alpha}\,\Gamma(-2\alpha)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha+1}{2}\right)}\left(\omega_{-4\alpha,\gamma}(0)-\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)\right).$$

Поскольку

$$\frac{1}{E(n,\gamma,\alpha)}\,\frac{\sqrt{\pi}\,2^{1-n-4\alpha}\,\Gamma(-2\alpha)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha+1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin(2\alpha\pi)\,\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\pi\sqrt{\pi}\,2^{-|\gamma|-4\alpha}}\;\frac{\sqrt{\pi}\,2^{1-n-4\alpha}\,\Gamma(-2\alpha)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha+1}{2}\right)}$$

$$=-\frac{2^{|\gamma|-n+1}}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma^2\Big(\frac{\gamma_i+1}{2}\Big),$$

запишем

$$\|u\|^2_{\alpha,\gamma}=2^{|\gamma|-n+1}\prod_{i=1}^{n}\Gamma^2\Big(\frac{\gamma_i+1}{2}\Big)$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\left|{}^\gamma\mathbf{T}^y_x u(x)+u(y)\right|^2}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\left(\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)-\omega_{-4\alpha,\gamma}(0)\right)x^\gamma dx\,y^\gamma dy\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|{}^\gamma\mathbf{T}^y_x u(x)-u(y)|^2}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}}\left(\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)+\omega_{-4\alpha,\gamma}(0)\right)x^\gamma dx\,y^\gamma dy\right),$$

таким образом, справедливость представления (18) была продемонстрирована. ▷

6. Заключение

В заключении отметим, что возможны два подхода к определению класса обобщенных потенциалов Бесселя $\mathbf{B}_\gamma^\alpha(L_p^\gamma)$ порядка α в $\mathbb{R}_+^n$. Первый состоит в том, что $u \in \mathbf{B}_\gamma^\alpha(L_p^\gamma)$, если u является обобщенной сверткой $(G_\alpha^\gamma * \varphi)_\gamma$ для некоторого $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$. Этот подход был представлен в [3], где использовались B-гиперсингулярные интегралы. Второй подход заключается во введении в $\mathbf{B}_\gamma^\alpha(L_p^\gamma)$ нормы

$$\|u\|_{\alpha,\gamma}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(1+|\xi|^2\right)^\alpha \left|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)\right|^2 \xi^\gamma d\xi,$$

которая может быть записана с использованием ядра свертки, порождающего обобщенный потенциал Бесселя. Это выражение показывает, что квадратичная интерполяция между $\|u\|_{\alpha,\gamma}$ и $\|u\|_{\beta,\gamma}$ дает $\|u\|_{\delta,\gamma}$, где δ — интерполированный порядок $\alpha(l-t)+\beta t$. Норма $\|u\|_{\alpha,\gamma}$ наиболее удобна для изучения класса обобщенных потенциалов Бесселя в $\mathbb{R}_+^n$.

Литература

1. *Stein E. M.* Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.—Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1970.—304 p.—(Princeton Math. Ser. Vol. 30).
2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.—456 с.
3. *Ляхов Л. Н., Половинкина М. В.* Пространство весовых потенциалов Бесселя // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сб. статей. Тр. МИАН.— М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», 2005.—Т. 250.—С. 192–197.
4. *Ляхов Л. Н.* Обращение B-потенциалов Рисса // Докл. АН СССР.—1991.—Т. 321, № 3.—С. 466–469.
5. *Ляхов Л. Н.* Об одном классе гиперсингулярных интегралов // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 315, № 2.—С. 291–296.
6. *Aronszajn N., Smith K. T.* Functional spaces and functional completion // Ann. de l'Inst. Fourier.—1956.—Vol. 6.—P. 125–185.
7. *Aronszajn N., Smith K. T.* Characterization of positive reproducing kernels. Applications to Green's functions // Amer. J. Math.—1957.—Vol. 79, № 3.—P. 611–622. DOI: 10.2307/2372565.
8. *Aronszajn N., Smith K. T.* Theory of Bessel potentials. I // Ann. de l'Inst. Fourier.—1961.—Vol. 11.—P. 385–475.
9. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи.— М.: Наука–Физматлит, 1997.—204 с.
10. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций.—М.: Изд-во инсотр. лит-ры, 1949.—728 с.
11. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics.—Cambridge: Acad. Press, 2020.—592 p.
12. *Banach S., Saks S.* Sur la convergence forte dans les champs L^p // Stud. Math.—1930.—Vol. 2.—P. 51–57.
13. *Гольдман М. Л.* Конус перестановок для обобщенных бесселевых потенциалов // Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных. Сб. статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Станислава Ивановича Похожаева. Тр. МИАН.—М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2008.—Т. 260—С. 151–163.
14. *Гольдман М. Л.* Перестановочно-инвариантные оболочки обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Докл. АН.—2008.—Т. 423, № 1.—С. 14–18.
15. *Ekincioglu I., Shishkina E. L., Keskin C.* Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation // Integral Transforms and Special Functions.—2021.—Vol. 32, № 12.—P. 932–947. DOI: 10.1080/10652469.2020.1867983.
16. *Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E.* Two forms of an inverse operator to the generalized Bessel potential // Axioms.—2021.—Vol. 10, № 3.—P. 1–20. DOI: 10.3390/axioms10030232.

Статья поступила 8 января 2022 г.

Джабраилов Ахмед Лечаевич
Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова,
старший преподаватель
РОССИЯ, 364024, Грозный, ул. Шерипова, 32
E-mail: ahmed_0065@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-8208-3695

Шишкина Элина Леонидовна
Воронежский Государственный Университет,
профессор
РОССИЯ, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1;
Белгородский государственный национальный
исследовательский университет (НИУ «БелГУ»),
профессор
РОССИЯ, Белгород, 308015, ул. Победы, 85
E-mail: ilina_dico@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-4083-1207

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 3, P. 62–77

ON THE THEORY OF SPACES OF GENERALIZED BESSEL POTENTIALS

Dzhabrailov, A. L.[1] and Shishkina, E. L.[2,3]

[1] Kadyrov Chechen State University, 32 Sheripova St., Grozny 364024, Russia;
[2] Voronezh State University, 1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia;
[3] Belgorod State National Research University (BelGU), 85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia

E-mail: ahmed_0065@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Abstract. The purpose of the article is to introduce norms in the space of generalized Bessel potentials based on the weighted Dirichlet integrals. First, we define weighted Dirichlet integral and show that this integral can be represented using multidimensional generalised translation. Next, we demonstrate that this norm does not allow to define function spaces of arbitrary fractional order of smoothness. The potential theory originates from the theory of electrostatic and gravitational potentials and the Laplace, wave, Helmholtz, and Poisson equations. The famous Riesz potentials are known to be realizations of the real negative powers of the Laplace and wave operators. In the meantime, a lot of attention in the potential theory is given to the Bessel potential. Generalization in the article is achieved by considering the Laplace-Bessel operator which is constructed on the basis of the singular Bessel differential operator. The theory of singular differential equations containing the Bessel operator and the theory of the corresponding weighted function spaces belong to those mathematical areas, the theoretical and applied significance of which can hardly be overestimated.

Key words: Bessel operator, generalized Bessel potentials space, weighted Dirichlet integral.

AMS Subject Classification: 42B35, 42B20, 47B38, 46E30.

For citation: *Dzhabrailov, A. L. and Shishkina, E. L.* On the Theory of Spaces of Generalized Bessel Potentials, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 62–77 (in Russian). DOI: 10.46698/c3174-5520-8062-f.

References

1. *Stein, E. M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton Mathematical Series*, vol. 30, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1970, 304 p.
2. *Nikol'skii, S. M. Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*, Berlin, Heidelberg, Springer, 1975, 420 p.
3. *Lyakhov, L. N. and Polovinkina, M. V.* The Space of Weighted Bessel Potentials, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2005, vol. 250, pp. 178–182.
4. *Lyakhov, L. N.* Inversion of Riesz B-Potentials, *Doklady Mathematics*, 1992, vol. 44, no. 3, pp. 717–720.
5. *Lyakhov, L. N.* On a Class of Hypersingular Integrals, *Doklady Mathematics*, 1991, vol. 42, no. 3, pp. 765–769.
6. *Aronszajn, N. and Smith, K. T.* Functional Spaces and Functional Completion, *Annales de l'Institut Fourier*, 1956, vol. 6, pp. 125–185.
7. *Aronszajn, N. and Smith, K. T.* Characterization of Positive Reproducing Kernels. Applications to Green's Functions, *American Journal of Mathematics*, 1957, vol. 79, no. 3, pp. 611–622. DOI: 10.2307/2372565.
8. *Aronszajn, N. and Smith, K. T.* Theory of Bessel Potentials, *Annales de l'Institut Fourier*, 1961, vol. 11, pp. 385–475.
9. *Kipriyanov, I. A. Singulyarnye ellipticheskiye krayevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary Value Problems], Moscow, Nauka, 1997, 204 p. (in Russian).
10. *Watson, G. N. Teoriya besselevykh funktsiy* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions], Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1949, 728 p. (in Russian).
11. *Shishkina, E. L. and Sitnik, S. M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics*, Cambridge, Academic Press, 2020, 592 p.
12. *Banach, S. and Saks, S.* Sur la Convergence Forte dans les Champs L^p, *Studia Mathematica*, 1930, vol. 2, pp. 51–57.
13. *Goldman, M. L.* The Cone of Rearrangements for Generalized Bessel Potentials, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 260, pp. 144–156. DOI: 10.1134/S0081543808010100.
14. *Goldman, M. L.* Rearrangement Invariant Envelopes of Generalized Bessel and Riesz Potentials, *Doklady Mathematics*, 2008, vol. 78, no. 3, pp. 814–818. DOI: 10.1134/S1064562408060033.
15. *Ekincioglu, I., Shishkina, E. L. and Keskin, C.* Generalized Bessel Potential and its Application to Non-Homogeneous Singular Screened Poisson Equation, *Integral Transforms and Special Functions*, 2021, vol. 32, no. 12, pp. 932–947. DOI: 10.1080/10652469.2020.1867983.
16. *Dzhabrailov, A., Luchko, Y. and Shishkina, E.* Two Forms of an Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential, *Axioms*, 2021, vol. 10, no. 3, pp. 1–20. DOI: 10.3390/axioms10030232.

Received January 8, 2022

Akhmed L. Dzhabrailov
Kadyrov Chechen State University,
32 Sheripova St., Grozny 364024, Russia,
Senior Lecturer
E-mail: `ahmed_0065@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0001-8208-3695

Elina L. Shishkina
Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia,
Professor;

Belgorod State National Research University (BelGU),
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia,
Professor
E-mail: `ilina_dico@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0003-4083-1207