УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmp210105**

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ПОМПЕЮ И НЕКОТОРЫХ ЕГО ОБОБЩЕНИЯХ

А.П. Солдатов[1–3]**,**
[1]ФИЦ «Информатика и управления» РАН, г. Москва, Российская Федерация;
[2]Московский центр фундаментальной и прикладной математики, г. Москва, Российская Федерация;
[3]Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Российская Федерация

Даны оценки классического интеграла Помпею, рассматриваемого на всей комплексной плоскости с особыми точками $z = 0$ и $z = \infty$, в семействах различных весовых пространств. Этот интеграл играет ключевую роль в теории обобщенных аналитических функций И.Н. Векуа, которая широко используется при моделировании различных процессов – трансзвуковых течений газа, состояний безмоментного напряженного равновесия выпуклых оболочек и многих других. Более точно, описываются весовые порядки λ, для которых этот оператор ограничен из весового пространстве L^p_λ функций, суммируемых с p-ой степенью, в весовое пространство $C^\mu_{\lambda+1}$ гельдеровых функций. Аналогичные оценки получены также для более общих интегралов с разностным ядром. Указаны приложения этих результатов к эллиптическим системам первого порядка на плоскости, которые, в частности, включают математические модели плоской теории упругости (система Ламе) в общем анизотропном случае и играют центральную роль в теории обобщенных аналитических функций И.Н. Векуа.

Ключевые слова: интеграл Помпею; весовые пространства Гельдера и Лебега; обобщенные интегралы Помпею; интегралы с разностными ядрами; математические модели теории упругости.

Посвящается Сергею Григорьевичу Пяткову
в связи с его 65-летием

1. Интеграл Помпею

Хорошо известно, сколь важную роль в приложениях играет теория обобщенных аналитических функций, созданная И.Н. Векуа [1]. Она имеет глубокие связи со многими разделами анализа, геометрии и механики, включая квазиконформные отображения, теорию поверхностей, теорию оболочек, газовую динамику. В частности, она широко используется при моделировании трансзвуковых течений газа, состояний безмоментного напряженного равновесия выпуклых оболочек и многих других процессов. В этой теории ключевую роль играет интеграл Помпею

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(t)d_2t}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

где d_2t означает элемент площади.

Если функция

$$\varphi \in L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C}),\ 1 < q < 2 < p, \tag{1.2}$$

то применяя неравенство Гельдера к подинтегральному выражению в областях $\{t,\ |t-z|\leq 1\}$ и $\{t,\ |t-z|\geq 1\}$, убеждаемся, что интеграл (1.1) существует и справедлива оценка

$$|T\varphi|_{0,\mathbb{C}} \leq M(|\varphi|_{L^p}+|\varphi|_{L^q}), \tag{1.3}$$

где постоянная M зависит только от p и q. Здесь и ниже $|\varphi|_{0,G}$ означает sup – норму функции φ, заданной в некоторой области G. Аналогичное обозначение

$$\{\varphi\}_{\mu,G}=\sup_{z_1\neq z_2}\frac{|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|}{|z_1-z_2|^{\mu}}$$

введем для полунормы функций, удовлетворяющих на G условию Гельдера с показателем $\mu,\ 0<\mu<1$. Класс ограниченных функций этого типа составляет пространство Гельдера $C^{\mu}(G)$, которое банахово относительно нормы $|\varphi|=|\varphi|_0+\{\varphi\}_{\mu}$.

Если функция φ непрерывна и имеет компактный носитель, то функция $T\varphi$ также непрерывна и стремится к нулю на бесконечности. В силу (1.3) и соображений плотности это свойство сохраняется и в общем случае функций (1.2).

Как отмечено в [1, теорема 1.36], в предположении (1.2) функция $T\varphi$ допускает обобщенные производные, которые выражаются по формуле

$$\frac{\partial(T\varphi)}{\partial x}=\varphi-S\varphi, \quad \frac{\partial(T\varphi)}{\partial y}=-i\varphi-iS\varphi \tag{1.4}$$

с двумерным сингулярным интегралом

$$(S\varphi)(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{\varphi(t)d_2t}{(t-z)^2}, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{1.5}$$

Согласно теореме Кальдерона – Зигмунда [2] этот интеграл существует почти всюду и определяет оператор S, ограниченный в пространствах L^p и L^q. В частности, с учетом (1.3) функция $T\varphi$ принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(G)$ в каждой ограниченной области G. На основании теоремы вложения С.Л. Соболева [3]

$$W^{1,p}(G)\subseteq C^{\mu}(G), \quad \mu=1-2/p, \tag{1.6}$$

отсюда следует, что функция $T\varphi$ удовлетворяет условию Гельдера в области G. Поскольку $|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|\leq 2|\varphi|_0\leq 2|\varphi|_0|z_1-z_2|^{\mu}$ при $|z_1-z_2|\geq 1$, в действительности $T\varphi\in C^{\mu}(\mathbb{C})$ с соответствующей оценкой

$$|T\varphi|_{C^{\mu}}\leq M(|\varphi|_{L^p}+|\varphi|_{L^q}), \tag{1.7}$$

где постоянная M зависит только от p и q.

Элементарное доказательство этой оценки, не использующее (1.4) и теорему Кальдерона, приведено в [1, теорема 1.24]. Заметим, что для специальных областей G вложение (1.6) можно дополнить следующей оценкой, установленной в [4, стр. 110].

Лемма 1. *Пусть функция φ задана в квадрате G комплексной плоскости и ее обобщенные частные производные принадлежат $L^p(G)$, $p>2$. Тогда*

$$\{\varphi\}_{\mu,G}\leq M|\varphi'|_{L^p(G)},$$

где $\mu=1-2/p$, $M=2/\mu$ и φ' означает градиент φ.

Если в дополнение к (1.2) функция φ принадлежит классу $C^\mu(G),\ 0<\mu<1$, в некоторой области G, то в этой области функция $T\varphi$ непрерывно дифференцируема и для любого компакта $K\subseteq G$ имеет место оценка

$$|T\varphi|_{C^{1,\mu}(K)}\le M(|\varphi|_{L^p}+|\varphi|_{L^q}+|\varphi|_{C^\mu(G)}), \tag{1.8}$$

где постоянная M зависит только от μ, p,q и K.

В самом деле, эта оценка очевидна в случае, когда $\varphi=0$ в окрестности компакта K. Поэтому не ограничивая общности можно считать, что $\varphi\in C^\mu(\mathbb{C})$ и обращается в нуль при $|z|\ge R$. В этом случае по теореме Корна– Жиро [5] сингулярный интеграл (1.5) существует в каждой точке z и определяет функцию $S\varphi\in C^\mu(\mathbb{C})$ с соответствующей оценкой $|S\varphi|_{C^\mu}\le M|\varphi|_{C^\mu}$, где постоянная M зависит только от μ и R. Совместно с (1.3), (1.4) отсюда следует (1.8).

В определение класса C^μ входит условие ограниченности функции φ. Если это условие отбросить, то $\varphi(z)$ может быть неограниченной и вести себя как $O(|z|^\mu)$ при $z\to\infty$. Примером служит функция $\varphi(z)=|z|^\mu$, для которой $\{\varphi\}_{\mu,\mathbb{C}}=1$. В этой связи введем класс $\widetilde{C}^\mu(\mathbb{C})$ функций φ, для которых

$$\{\varphi\}_{\mu,\mathbb{C}}<\infty,\quad \varphi(0)=0. \tag{1.9}$$

Функции $\varphi\in C^\mu(\mathbb{C})$ могут осциллировать на ∞, оставаясь ограниченными. В противоположность этому обозначим $C^\mu_*(\mathbb{C})$ пространство функций φ, которые вместе с $\varphi(1/z)$ принадлежат $C^\mu(B)$ в единичном круге $B=\{|z|\le 1\}$ (конечно, при дополнительном требовании непрерывности φ в точках единичной окружности). Очевидно, эти функции имеют предел $\varphi(\infty)=\lim\varphi(z)$ на бесконечности и $\varphi(z)-\varphi(\infty)=O(|z|^{-\mu})$ при $z\to\infty$.

В монографии [1] пространство C^μ_* обозначалось тем же символом C^μ, поскольку пространство $C^\mu(G)$ для неограниченных множеств G у него не использовалось. В этой монографии И.Н. Векуа описал условие на функцию φ, обеспечивающее принадлежность $T\varphi$ классу C^μ_* в терминах весового пространство $L^{p,\nu}(\mathbb{C}),\ \nu>0$.

По определению это пространство состоит из всех функций φ, для которых

$$\varphi(z),\ \varphi_\nu(z)=|z|^{-\nu}\varphi(1/z)\in L^p(B)$$

в единичном круге B. Очевидно, относительно соответствующей нормы

$$|\varphi|=\left(\int\limits_B|\varphi(t)|^pd_2t+\int\limits_{B'}|\varphi(t)|^p|t|^{p\nu-4}|d_2t\right)^{1/p}, \tag{1.10}$$

где $B'=\{|z|\ge 1\}$, это пространство банахово и при $\nu=4/p$ совпадает с L^p.

Лемма 2. *Если $1<q<2<p$ и $pq\nu>2(p+q)$, то имеет место вложение $L^{p,\nu}\subseteq L^p\cap L^q$. В частности, $L^{p,2}\subseteq L^p\cap L^q$ при $p'<q<2$, где $1/p'=1-1/p$.*

Доказательство. Положим $1<q<2$ и запишем

$$|\varphi(t)|^q=\left(|\varphi(t)|^p|t|^{p\nu-4}\right)^{1/p_0}\left(|t|^{4-p\nu}\right)^{1/p_0},\quad p_0=\frac{p}{q}.$$

Тогда на основании неравенства Гельдера

$$\int\limits_{B'} |\varphi(t)|^q d_2 t \leq \left(\int\limits_{B'} |t|^{p\nu-4} |\varphi(t)|^p d_2 t \right)^{1/p_0} \left(\int\limits_{B'} |t|^{p_0'(4-p\nu)/p_0} d_2 t \right)^{1/p_0'},$$

где $1/p_0' = 1 - 1/p_0$. Очевидно, второй множитель в правой части этого неравенства будет конечен при $p_0'(p\nu - 4) > -2p_0$. Остается заметить, что это неравенство равносильно $pq\nu > 2(p+q)$. $\square$

Из леммы следует, что для $\varphi \in L^{p,2}$ функция $T\varphi$ принадлежит классу $C^\mu(\mathbb{C})$ и обращается в нуль на бесконечности. В действительности имеет место следующий результат (см. теоремы 1.24, 1.25 в монографии [1]).

Теорема 1. *Оператор T ограничен $L^{p,2} \to C^\mu_*$, $\mu = 1 - 2/p$. В частности, для $\varphi \in L^{p,2}$ функция $(T\varphi)(z) = O(|z|^{-\mu})$ при $z \to \infty$.*

2. Оценки в весовых пространствах

Основная цель настоящей заметки – распространить теорему 1 на семейства весовых пространств. Эти пространства строятся исходя из соответствующего основного пространства X_0 функций $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, где символ X принимает значения $L^p, C, C^\mu, C^{1,\mu}$, которое определяется следующим образом.

1) L_0^p, $p \geq 1$, является L^p- пространством относительно меры $|t|^{-2} d_2 t$ с соответствующей нормой

$$|\varphi| = \left(\int\limits_{\mathbb{C}} |\varphi(t)|^p |t|^{-2} d_2 t \right)^{1/p};$$

2) C_0 есть пространство непрерывных и ограниченных функций $\varphi(z)$, $z \neq 0$, снабженное sup $-$ нормой $|\varphi|_0$;

3) C_0^μ, $0 < \mu < 1$, является пространством Гельдера с конечной нормой

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + \{|z|^\mu \varphi(z)\}_\mu;$$

4) $C_0^{1,\mu}$ есть пространство непрерывно дифференцируемых функций $\varphi \in C_0^\mu$, весовой градиент $\varphi^{(1)}(z) = z\varphi'(z)$ которых принадлежит C_0^μ, с соответствующей нормой

$$|\varphi| = |\varphi|_{C_0^\mu} + |\varphi^{(1)}|_{C_0^\mu}.$$

Очевидно, все так определенные пространства X_0 однородны относительно операций растяжения и инволюции

$$(\varphi \circ \delta)(t) = \varphi(\delta t),\ \delta > 0, \quad \varphi^*(t) = \varphi(1/t), \tag{2.1}$$

т.е эти операторы ограничены в X_0 равномерно по δ. Более точно, имеют место соотношения

$$|\varphi \circ \delta|_{X_0} = |\varphi|_{X_0}, \quad |\varphi^*|_{X_0} \leq 3|\varphi|_{X_0}, \tag{2.2}$$

причем в случае $X = L^p, C$ неравенство здесь можно заменить равенством $|\varphi^*|_{X_0} = |\varphi|_{X_0}$. В случае $X = C^\mu$ это неравенство вытекает из оценки

$$\{\varphi\}_\mu \leq \max(2|\varphi|_0, \{\varphi\}'_\mu]),$$

где $\{\varphi\}'_\mu$ определяется верхней гранью по всем z_1, z_2, для которых $1/2 \le |z_1|/|z_2| \le 2$. В случае $X = C^{1,\mu}$ нужно принять во внимание, что $(\varphi \circ \delta)^{(1)} = \varphi^{(1)}) \circ \delta$ и $(\varphi^*)^{(1)} = -(\varphi^{(1)})^*$.

В случаях 2) – 3) определению пространств X_0 можно придать другую трактовку. С этой целью каждой функции φ на полуоси поставим в соответствие двустороннюю последовательность φ_k, $k = 0, \pm 1, \dots$ функций в кольце $K = \{1/2 \le |z| \le 2\}$ по формуле

$$\varphi_k(z) = \varphi(2^k z),\ z \in K,\ k = 0, \pm 1, \dots . \tag{2.3}$$

Лемма 3. *Пусть K означает кольцо $1/2 \le |z| \le 2$. Тогда в обозначениях (2.3) для каждого из случаев $X = C, C^\mu, C^{1,\mu}$ равенство*

$$|\varphi| = \sup_{k=0,\pm 1,\dots} |\varphi_k|_{X(K)}$$

определяет в пространстве X_0 эквивалентную норму.

В одну сторону утверждение леммы является следствием оценки (2.2). Противоположное утверждение для $X = C$ очевидно, а для $X = C^\mu$ и $X = C^{1,\mu}$ доказывается непосредственно.

Заметим, что аналогично этой лемме пространство L^p_0 может быть определено эквивалентной нормой

$$|\varphi| = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi_k|^p_{L^p(K)} \right)^{1/p}.$$

В этой связи удобно ввести пространство $X_0 = \widetilde{L}^p_0$ с помощью нормы

$$|\varphi| = \sup_k |\varphi_k|_{L^p(K)}. \tag{2.4}$$

Ясно, что по отношению к этому банаховому пространству имеют место вложения

$$L^p_0 \subseteq \widetilde{L}^p_0, \quad C_0 \subseteq \widetilde{L}^p_0 \tag{2.5}$$

с произвольным $p \ge 1$.

Исходя из X_0, весовое пространство $X_\lambda = X_\lambda(\mathbb{C}; 0, \infty)$, отвечающее паре $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ вещественных чисел, строится следующим образом. Введем весовую функцию

$$\rho_\lambda(z) = \begin{cases} |z|^{\lambda_0}, & |z| \le 1, \\ |z|^{\lambda_1}, & |z| \ge 1. \end{cases}$$

При $\lambda_0 = \lambda_1 = \nu$ пару λ отождествляем с ν, так что в этом случае $\rho_\lambda(z) = |z|^\nu$. Тогда по определению пространство X_λ состоит из функций $\varphi = \rho_\lambda \varphi_0$, $\varphi_0 \in X_0$, которое снабжается перенесенной нормой $|\varphi| = |\varphi_0|_{X_0}$.

Из определения видно, что пространство L^p_λ определяется нормой

$$|\varphi| = \left(\int_B |\varphi(t)|^p |t|^{-p\lambda_0 - 2} d_2 t + \int_{B'} |\varphi(t)|^p |t|^{-p\lambda_1 - 2} d_2 t \right)^{1/p},$$

так что с учетом (1.9), (1.10)

$$L^p(\mathbb{C}) = L^p_{-2/p}, \quad L^{p,\nu}(\mathbb{C}) = L^p_{-2/p,\, 2/p-\nu} \quad \widetilde{C}^\mu(\mathbb{C}) = C^\mu_\mu, \tag{2.6}$$

где, напомним, число $\alpha \in \mathbb{R}$ отождествляется с парой (α, α). В частности, семейства L^p_λ и C^μ_λ можно определять исходя из L^p и C_μ, полагая, соответственно, $L^p_\lambda = \rho_{\lambda+2/p} L^p$, $C^\mu_\lambda = \rho_{\lambda-\mu} \widetilde{C}^\mu$.

При $\lambda = \mu$ пространство $C^\mu_\mu(\mathbb{C}; 0, \infty)$ совпадает с классом $\widetilde{C}^\mu$ всех функций φ, которые удовлетворяют условию Гельдера $|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq C|z_1 -_2|^\mu$ и обращаются в точке $z = 0$ в нуль. Поэтому в этом случае $C^\mu_\lambda = \rho_{\lambda-\mu} \widetilde{C}^\mu$.

Легко видеть , что семейство весовых пространств X_λ монотонно убывает (в смысле вложения) по параметру λ_0 и возрастает по λ_1. При фиксированном λ пространства C^μ_λ и $\widetilde{L}^p_\lambda$ монотонно убывают по, соответственно, μ и p. Ясно также, что все пространства X_λ вложены в $\widetilde{L}^p_\lambda$.

Естественным образом определяются весовые пространства $X_\lambda(B, 0)$ и $X_\lambda(B', \infty)$ с одной особой точкой по отношению к весовой функции $\rho_\lambda(z) = |z|^\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что

$$\widetilde{L}^p_\lambda(B, 0) \subseteq L^{p_0}(B), \quad \lambda \geq -2/p_0,\ 1 \leq p_0 \leq p, \tag{2.7a}$$

$$\widetilde{L}^p_\lambda(B', \infty) \subseteq L^{p_1}(B'), \quad \lambda \leq -2/p_1,\ 1 \leq p_1 \leq p. \tag{2.7b}$$

Первое вложение вытекает из цепочки

$$\widetilde{L}^p_\lambda(B, 0) \subseteq \widetilde{L}^{p_0}_\lambda(B, 0) \subseteq L^{p_0}_\lambda(B, 0) \subseteq L^{p_0}_{-2/p_0}(B, 0) = L^{p_0}(B),$$

второе доказывается аналогично.

При $0 < \lambda < 1$ удобно ввести пространство $C^\mu_{(\lambda)}(B, 0)$ всех функций $\varphi \in C(B)$, для которых $\varphi(z) - \varphi(0) \in C^\mu_\lambda(B, 0)$, снабженное соответствующей нормой. В частности, $C^\mu_{(\mu)}(B, 0) = C^\mu(B)$. При $\lambda \leq 0$ для единообразия полагаем $C^\mu_{(\lambda)}(B, 0) = C^\mu_\lambda(B, 0)$. Аналогичным образом при $-1 < \lambda < 0$ вводится и пространство $C^\mu_{(\lambda)}(B', \infty)$ условием $\varphi(z) - \varphi(\infty) \in C^\mu_\lambda(B', \infty)$, полагая для единообразия $C^\mu_{(\lambda)}(B', \infty) = C^\mu_\lambda(B', \infty)$ при $\lambda \geq 0$.

В случае двух особых точек пространство $X_\lambda(\mathbb{C}; 0, \infty)$ можно определить условиями $\varphi \in X_{\lambda_0}(B, 0)$ и $\varphi \in X_{\lambda_1}(B', \infty)$ (с дополнительным требованием непрерывности на окружности $|z| = R$ в случае $X = C$ и $X = C^\mu$). Аналогичный смысл имеет и пространство $X_{(\lambda)}(\mathbb{C}; 0, \infty)$. В частности, при $\lambda_0 = -\lambda_1 = \mu$ последнее пространство совпадает с $C^\mu_*(\mathbb{C})$.

Более подробно эти пространства введены и детально описаны (в более общей ситуации функций, заданных на множествах $G \subseteq \mathbb{R}^k$) в работе [6]. В частности, пространство $X_\lambda(\mathbb{C}, F)$ можно ввести для любого конечного множества F, содержащего бесконечно удаленную точку ∞, При этом под λ понимается семейство вещественных чисел $\lambda_\tau, \tau \in F$.

Обратимся к оператору T, определяемому интегралом (1.1) с плотностью $\varphi \in \widetilde{L}^p_\lambda(\mathbb{C}; 0, \infty),\ p > 2$,, где $-2 < \lambda_0 < 0$ и $\lambda_1 < -1$. При $z \neq 0$ подинтегральное выражение с этой плотностью принадлежит $\widetilde{L}^1_{\lambda_0, \lambda_1 - 1}(\mathbb{C}; 0, \infty)$, так что в соответствии с (2.7) оно суммируемо на всей плоскости.

Теорема 2. *Пусть $p > 2,\ -2 < \lambda_0 < 0,\ \lambda_0 \neq -1$ и $-2 < \lambda_1 < -1$.*
Тогда оператор T ограничен

$$\widetilde{L}^p_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_0+1), \lambda_1+1}, \quad C^\mu_\lambda \to C^{1,\mu}_{(\lambda_0+1), \lambda_1+1}, \tag{2.8}$$

где $\mu = 1 - 2/p$ *для первой пары пространств и* $0 < \mu < 1$ *для второй пары. В частности, для тех же значений* μ *оператор* T *ограничен* $L^p_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}$ *и* $C_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}$.

Доказательство. проведем для случаев $-1 < \lambda_0 < 0$ и $-2 < \lambda_0 < -1$ отдельно.

а) Пусть $-1 < \lambda_0 < 0$. Рассмотрим первую пару пространств в (2.8) и покажем сначала, что для любого круга $B = \{|t| \le R\}$ оператор T ограничен $\widetilde{L}^p_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_0+1)}(B, 0)$, где $\mu = 1 - 2/p$. При $z = 0$ подинтегральное выражение в (1.1) принадлежит $\widetilde{L}^p_{\lambda-1}$ и, следовательно, суммируемо. Поэтому достаточно доказать, что оператор

$$(T_0\varphi)(z) = z^{-1}[(T\varphi)(z) - (T\varphi)(0)] = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(t)d_2t}{t(t-z)}, \quad z \in B, \tag{2.9}$$

ограничен $\widetilde{L}^p_\lambda \to C^\mu_{\lambda_0}(B, 0)$, т.е. справедлива оценка

$$|T_0\varphi|_{C^\mu_{\lambda_0}(B,0)} \le M|\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}. \tag{2.10}$$

Очевидно, этот факт равносилен тому, что оператор

$$(\widetilde{T}_0\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|t|^{\lambda_0}}{|z|^{\lambda_0}}\frac{\varphi(t)d_2t}{t(t-z)},$$

ограничен $\widetilde{L}^p_{0,\lambda_1} \to C^\mu_0(B, 0)$. Поскольку $\widetilde{L}^p_{0,\lambda_1} \subseteq \widetilde{L}^p_0$, не ограничивая общности можно считать $\lambda_1 = 0$. Таким образом, дело сводится к ограниченности оператора $\widetilde{T}_0 :\ \widetilde{L}^p_0(\mathbb{C}) \to C^\mu_0(\mathbb{C})$.

Пусть $\varphi \in \widetilde{L}^p_0$, рассмотрим функцию $\widetilde{T}_0\varphi$ в кольце $K = \{1/2 \le |z| \le 2\}$. Утверждается, что она принадлежит классу $C^\mu(K)$, $\mu = 1 - 2/p$, с соответствующей оценкой

$$|\widetilde{T}_0\varphi|_{C^\mu(K)} \le M|\varphi|_{L^p_0}. \tag{2.11}$$

С этой целью введем гладкую функцию χ, равную 1 в кольце $1/2 \le |z| \le 2$ и нулю вне кольца $1/4 \le |z| \le 4$. Согласно (2.9) функция

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} |t|^{\lambda_0-1}\varphi(t), & 0 < |t| \le 1, \\ |t|^{\lambda_0-2}\varphi(t), & |t| \ge 1, \end{cases}$$

суммируема на плоскости, так что имеем очевидные оценки

$$|\widetilde{T}_0[(1-\chi)\varphi)|_{C^\mu(K)} \le M_0|(1-\chi)\widetilde{\varphi}|_{L^1} \le \widetilde{M}_0|\varphi|_{\widetilde{L}^p_0}, \tag{2.12}$$

где учтено, что функцию $\widetilde{T}_0[(1-\chi)\varphi]$ в кольце K можно дифференцировать под знаком интеграла. С другой стороны, на основании (1.7) справедлива оценка

$$|\widetilde{T}_0(\chi\varphi)|_{C^\mu(K)} \le M_1|\chi\varphi|_{L^p} \le \widetilde{M}_1|\varphi|_{\widetilde{L}^p_0}. \tag{2.13}$$

В результате приходим к справедливости (2.11).

Из выражения (2.9) видно, что операторы T_0 и $\widetilde{T}_0$ коммутируют с операторами растяжения в (2.1). Поэтому на основании (2.2), (2.4) и леммы 3 отсюда приходим к ограниченности оператора $\widetilde{T}_0 : \ \widetilde{L}^p_0 \to C^\mu_0$ и, следовательно, к оценке (2.10) для оператора (2.9). Тем самым ограниченность оператора $T : \ \widetilde{L}^p_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_0+1)}(B,0)$ установлена.

Остается доказать, что оператор T ограничен $\widetilde{L}^p_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_1+1)}(B',\infty)$, где $B' = \{|z| \geq R_1\}$. Воспользуемся инволюцией (2.1), которая в соответствии с (2.2) осуществляет изоморфизм $\widetilde{L}^p_\lambda \to \widetilde{L}^p_{-\lambda}$. Поэтому дело сводится к доказательству оценки

$$|(T\varphi)^*|_{C^\mu_{-\lambda_1-1}(B,0)} \leq M|\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}, \tag{2.14}$$

где B есть круг радиуса $R = 1/R_1$. В обозначениях (2.9) можем записать

$$(T\varphi)^*(z) = z(T_0\widetilde{\varphi})(z), \quad \widetilde{\varphi}(t) = -\varphi^*(t)/\bar{t}^2. \tag{2.15}$$

Очевидно, функция $\widetilde{\varphi}$ принадлежит $\widetilde{L}^p_{\lambda'}$ с весовым порядком $\lambda' = -\lambda - 2$ и допускает оценку

$$|\widetilde{\varphi}|_{\widetilde{L}^p_{\lambda'}} \leq C|\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}. \tag{2.16}$$

Поскольку $-1 < \lambda'_0 < 0, \ -2 < \lambda'_1 < -1$, к функции $T_0\widetilde{\varphi}$ можем применить оценку (2.10), из которой совместно с (2.15), (2.16) следует и оценка (2.12). Таким образом, утверждение теоремы для первой пары пространств в (2.8) установлено.

Доказательство для второй пары пространств совершенно аналогично, нужно лишь во всех рассуждениях символ $\widetilde{L}^p$ заменить на C^μ. Исключение составляют лишь оценки (2.12), (2.13), которые заменяется, соответственно, на

$$|\widetilde{T}_0[(1-\chi)\varphi)|_{C^{1,\mu}(K)} \leq M_0|(1-\chi)\widetilde{\varphi}|_{L^1} \leq \widetilde{M}_0|\varphi|_{C^\mu_0}, \tag{2.12$'$}$$

$$|\widetilde{T}_0(\chi\varphi)|_{C^{1,\mu}(K)} \leq M_1|\chi\varphi|_{C^\mu} \leq \widetilde{M}_1|\varphi|_{C^\mu_0}. \tag{2.13$'$}$$

Справедливость первой оценки в (2.13$'$) является непосредственным следствием (1.8).

b) Пусть $-2 < \lambda_0 < -1$. Как и в случае a) рассмотрим сначала первую пару пространств в (2.8) и покажем, что оператор T ограничен $\widetilde{L}^p_\lambda \to C^\mu_{\lambda_0+1}(B,0)$, т.е. допускает оценку

$$|T\varphi|_{C^\mu_{\lambda_0}(B,0)} \leq M|\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}. \tag{2.17}$$

Очевидно, достаточно доказать, что оператор

$$(T_1\varphi)(z) = z^{-1}(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(t)d_2t}{z(t-z)}, \quad z \in B,$$

ограничен $\widetilde{L}^p_\lambda \to C^\mu_{\lambda_0}(B,0)$, что устанавливается совершенно аналогично случаю a).

Покажем далее, что оператор оператор T ограничен $\widetilde{L}^p_\lambda \to C^\mu_{\lambda_1+1}(B',\infty)$, что сводится к доказательству оценки (2.14). Аналогично (2.15) можем записать

$$(T\varphi)^*(z) = z(T\widetilde{\varphi})(z), \quad \widetilde{\varphi}(t) = -\varphi^*(t)/(|t|^2\bar{t}). \tag{2.18}$$

Очевидно, функция $\widetilde{\varphi}$ принадлежит $\widetilde{L}^p_{\lambda'}$ с весовым порядком $\lambda' = -\lambda - 3$ и допускает оценку (2.16). Поскольку $-2 < \lambda'_k < -1, \ k = 0, 1$, к функции $T\widetilde{\varphi}$ можем применить оценку (2.17), из которой совместно с (2.18), (2.16) следует и оценка (2.14).

Тем самым утверждение теоремы для первой пары пространств в (2.8) полностью установлено. Для второй пары это утверждение доказывается совершенно аналогично случаю а). □

Согласно (2.6) пространству $L^{p,2}$ отвечает весовой порядок $\lambda_0 = -2/p,\ \lambda_1 = 2/p - 2$. Поэтому в этом случае теорема 2 утверждает, что оператор T ограничен $L^{2,p} \to C^{\mu}_{(\mu),-\mu}$ с $\mu = 1 - 2/p$, что согласуется с теоремой 1.

Теорема 2 сохраняет свою силу и по отношению к весовым пространствам с произвольным набором конечных точек $\tau_1, \dots, \tau_n$, доказательство осуществляется с помощью соответствующей локализации. Например, ее утверждение для первой пары в (2.8) выглядит следующим образом. Пусть $-2 < \lambda_j < 0,\ \lambda_j \neq -1$ и $-2 < \lambda_\infty < -1$. Тогда оператор T ограничен

$$\widetilde{L}^p_\lambda \to C^{\mu}_{(\lambda_1+1),\dots,(\lambda_n+1),\lambda_\infty+1}(\mathbb{C};\ \tau_1, \dots, \tau_n, \infty).$$

Случай единственной точки ∞ не исключается. В этом случае (2.8) для первой пары пространств переходит в $\widetilde{L}^p_\lambda(\mathbb{C}, \infty) \to C^{\mu}_{\lambda+1}(\mathbb{C}, \infty)$, где $-2 < \lambda < -1$ и $\mu = 1 - 2/p$.

В качестве следствия теоремы отметим следующее предложение.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 оператор T осуществляет изоморфизм банаховых пространств $C^{\mu}_{\lambda} \to C^{1,\mu}_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}$, причем обратным к нему служит оператор дифференцирования*

$$\varphi \to \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}.$$

Доказательство. По отношению к C^{μ}_{λ} пространство $C^{1,\mu}_{\lambda}(\mathbb{C}; 0, \infty)$ можно определять условиями $\varphi \in C^{\mu}_{\lambda},\ \varphi' \in C^{\mu}_{\lambda-1}$. В частности, частные производные как операторы ограничены $C^{1,\mu}_{(\lambda+1)} \to C^{\mu}_{\lambda}$.

Пусть λ удовлетворяет условиям теоремы 2, так что функции $\varphi \in C^{1,\mu}_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}$ исчезают на бесконечности. Если $\partial\varphi/\partial\bar{z} = 0$, то функция $\varphi(z)$ аналитична при $z \neq 0$, в точке $z = 0$ допускает слабую особенность и исчезает на бесконечности. Следовательно, эта функция аналитична на всей плоскости и по теореме Лиувилля тождественно равна нулю.

С другой стороны, в силу (1.4)

$$\frac{\partial(T\varphi)}{\partial \bar{z}} = \varphi. \tag{2.19}$$

Отсюда утверждение теоремы получается непосредственно. □

3. Обобщенный оператор Помпею

Естественным обобщением (1.1) служит интеграл

$$(I\varphi)(z) = \int_{\mathbb{C}} Q(t, t - z)\varphi(t) d_2 t, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

где функция $Q(z, \xi)$ переменных $z, \xi = \xi_1 + i\xi_2$ нечетна и однородна степени -1 по ξ. В дальнейшем предполагается, что по этой переменной она бесконечно дифференцируема, а по переменной t принадлежит классу $C^{\nu}_0(\mathbb{C}, ; 0, \infty)$ $0 < \nu < 1$, равномерно по

$|\xi| = 1$. Следуя [6], класс таких функций обозначим $C_0^{\nu(0)}$. Очевидно, частные производные функции Q по ξ_1, ξ_2 порядка k однородны степени $-1-k$. Обозначим $C_0^{\nu(n)}$ класс функций $Q \in C_0^{\nu(0)}$, частные производные которых до порядка n включительно принадлежат $C_0^\nu(\mathbb{C}; 0, \infty),\ 0 < \nu < 1$, равномерно по $|\xi| = 1$.

Аналогично п. 1 убеждаемся, что в предположении (1.2) имеет место оценка (1.3), причем функция $I\varphi$ непрерывна и исчезает на бесконечности.

Как установлено в [6], для пространства $C^{1,\mu}(\mathbb{C}; 0, \infty)$ аналог теоремы 2 справедлив и для оператора I.

Теорема 4. *Пусть* $Q \in C_0^{\nu(2)},\ 0 < \nu < 1$, *и* $-2 < \lambda_0 < 0,\ \lambda_0 \neq -1,\ -2 < \lambda_1 < -1$. *Тогда* $0 < \mu < \nu$ *оператор* I *ограничен* $C_\lambda^\mu \to C^{1,\mu}_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}$.

Строго говоря [6, теорема 3.11.3], эта теорема установлена для неограниченных кусочно гладких областей D в предположении $Q \in C_0^{\nu(3)}$. Это более сильное условие на Q связано с гладкостью границы области D и в случае $D = \mathbb{C}$ в нем нет необходимости. Из теоремы 4, в частности, следует и утверждение теоремы 2 для второй пары в (2.8).

Пусть выполнены условия теоремы 4 и функция $\varphi \in L^p_\lambda(\mathbb{C}; 0, 1)$. Тогда как установлено в [6], функция $I\varphi$ допускает обобщенные производные, которые выражаются по формуле

$$\frac{\partial(I\varphi)}{\partial x_k} = -\sigma_k\varphi - S_k\varphi, \quad x_1 = x,\ x_2 = y, \tag{3.2}$$

с двумерным сингулярным интегралом

$$(S_k\varphi)(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial Q}{\partial \xi_k}(t, t-z)\varphi(t) d_2 t, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

и коэффициентами

$$\sigma_k(z) = \int\limits_{|\xi|=1} \xi_k Q(z, \xi) d_1\xi, \quad k = 1, 2.$$

В силу принятых предположений относительно Q эти коэффициенты принадлежат классу $C_0^\nu((\mathbb{C}; 0, \infty)$. Заметим, что для $Q(t, \xi) = -(\pi\xi)^{-1}$ эта формула переходит в (1.4), (1.5).

Поскольку $\widetilde{L}^p_\lambda \subseteq L^p_{\lambda'}$ при $\lambda_0' < \lambda_0,\ \lambda_1' > \lambda_1$, формула (3.2) справедлива и в случае $\varphi \in \widetilde{L}^p_\lambda(\mathbb{C}; 0, 1)$.

Теорема 5. *В условиях теоремы 4 оператор* I *ограничен* $\widetilde{L}^p_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1},\ \mu = 1-2/p$. *В частности, он ограничен* $L^p_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1},\ \mu = 1-2/p$, *и* $C_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}$, $0 < \mu < 1$.

Доказательство. Как показано в [6, теорема 4.7.2], сингулярные операторы S_k ограничены в пространстве $L^p_\lambda(\mathbb{C}; 0, \infty)$. Из доказательства этой теоремы видно, что данный факт справедлив и по отношению к пространству $\widetilde{L}^p_\lambda(\mathbb{C}; 0, \infty)$. Таким образом, для функции $\psi = I\varphi$ имеем оценки

$$|\psi'|_{\widetilde{L}^p_\lambda} \leq M|\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}. \tag{3.4}$$

В частности, на основании леммы 1 функция ψ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\mu = 1 - 2/p$ на любом компактном подмножестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

По условию $\lambda_1 < -1$, в частности, $\lambda_1 < -2/p$ и найдется такое $1 < q < 2$, что $\lambda_1 < -2/q$. Поэтому на основании (2.7b) имеем вложение

$$L^p_{\lambda_1}(B', \infty) \subseteq L^p(B') \cap L^q(B'),$$

так что

$$\lim_{z\to\infty} \psi(z) = 0. \tag{3.5}$$

Если $-1 < \lambda_0 < 0$ и $2 < p_0 \le p$ подобрано по условию $\lambda_0 \ge -2/p_0$, то на основании (2.7a) функция $\psi \in L^{p_0}(B)$ и, следовательно, непрерывна в точке $z = 0$, т.е.

$$\lim_{z\to 0} \psi(z) = \psi(0). \tag{3.6}$$

В соответствии с определением (2.3), (2.4) нормы пространства $\widetilde{L}^p_0$ оценку (3.4) можем записать в форме

$$\sup_{k\ge 0} \left[2^{\lambda_0 k} |(\psi')_{-k}|_{L^p(K)}\right] + \sup_{k\ge 0} \left[2^{-\lambda_1 k} |(\psi')_k|_{L^p(K)}\right] \le M_1 |\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda},$$

где здесь и ниже под M с индексами понимаются различные положительные постоянные, не зависящие от φ. С учетом очевидного равенства $(\psi')_s = 2^{-s}(\psi_s)'$ эту оценку можем представить в форме

$$\sup_{k\ge 0} \left[2^{(\lambda_0+1)k} |(\psi_{-k})'|_{L^p(K)}\right] + \sup_{k\ge 0} \left[2^{-(\lambda_1+1)k} |(\psi_k)'|_{L^p(K)}\right] \le M_1 |\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим в кольце $K = \{1/2 \le |z| \le 2$ замкнутые подобласти, выделяемые неравенством $\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$, где $\theta_2 - \theta_1 = 3/2$. При отображении $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ они переходят в квадрат со сторона $3/2$. Поэтому лемма 1 сохраняет свою силу и для областей G этого типа, а, значит, и для всего кольца K. Поэтому (3.7) переходит в оценку

$$\sup_{k\ge 0} \left[2^{(\lambda_0+1)k} \{\psi_{-k}\}_{\mu,K}\right] + \sup_{k\ge 0} \left[2^{-(\lambda_1+1)k} \{\psi_k\}_{\mu,K}\right] \le M_2 |\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}. \tag{3.8}$$

Поскольку при $1 \le |z| \le 2$ обе точки $z, z/2$ принадлежат K и $|z - z/2| \le 1$, отсюда

$$|\psi_{-k}(z) - \psi_{-k-1}(z)| \le 2^{-(\lambda_0+1)k} M_2 |\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda},\ k \ge 0, \tag{3.9}$$

$$|\psi_k(z) - \psi_{k+1}(z)| \le 2^{(\lambda_1+1)(k+1)} M_2 |\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda},\ k \ge 0. \tag{3.10}$$

Суммируя неравенства (3.10) для $k = m, m+1, \dots k = m+s-1$, приходим к неравенству

$$|\psi_m(z) - \psi_{m+s}(z)| \le 2^{(\lambda_1+1)(m+1)} \frac{M_2}{1 - 2^{\lambda_1+1}} |\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}, \quad 1 \le |z| \le 2.$$

Согласно (3.6) в этом неравенстве можем перейти к пределу при $s \to \infty$, что приводит к оценке

$$\sup_{k\ge 0} 2^{-(\lambda_1+1)k} |\psi_k|_{0,K} \le M_3 |\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}. \tag{3.11}$$

Обратимся к неравенству (3.9), которое рассмотрим для случаев $-1 < \lambda_0 < 0$ и $-2 < \lambda_0 < -1$ отдельно. В первом случае с учетом (3.6) для функции $\widetilde{\psi}(z) = \psi(z) - \psi(0)$ совершенно аналогично предыдущему получим оценку

$$\sup_{k\geq 0} 2^{(\lambda_0+1)k}|\widetilde{\psi}_{-k}|_{0,K} \leq M_4|\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}. \tag{3.12a}$$

Во втором случае будем иметь неравенство

$$|\psi_{-m}(z) - \psi(z)| \leq 2^{-(\lambda_0+1)(m+1)}\frac{M_2}{1-2^{\lambda_0+1}}|\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}, \quad 1 \leq |z| \leq 2,$$

что приводит к оценке

$$\sup_{k\geq 0} 2^{(\lambda_0+1)k}|\psi_{-k}|_{0,K} + |\psi|_{0,K} \leq M_5|\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}.$$

Обьединяя ее с очевидной оценкой

$$|\psi|_{0,K} \leq M_6|\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda},$$

для оператора $\psi = I\varphi$, получим аналогичную (3.12a) оценку

$$\sup_{k\geq 0} 2^{(\lambda_0+1)k}|\psi_{-k)}|_{0,K} \leq M_7|\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}. \tag{3.12b}$$

В свою очередь оценки (3.12) и (3.9) в соответствии с леммой 2 означают, что функция ψ принадлежит пространству $C^\mu_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}(\mathbb{C}; 0, \infty)$ с соответствующей оценкой

$$|\psi|_{C^\mu_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}} \leq M|\varphi|_{\widetilde{L}^p_\lambda}$$

для ее нормы. $\square$

Интеграл (3.1) играет важную роль [7, 8] в теории эллиптических систем первого порядка. Рассмотрим простейшую систему этого типа

$$\frac{\partial u}{\partial y} - A\frac{\partial u}{\partial x} = f, \tag{3.13}$$

где постоянная комплексная $l \times l-$ матрица A не имеет вещественных собственных значений и u, f являются вектор- функциями. Условимся с каждым ненулевым комплексным числом $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ связывать обратимую матрицу $\xi_A = \xi_1 1 + \xi_2 A$, где 1 означает единичную матрицу. В этих обозначениях рассмотрим интеграл

$$(T\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}} (t-z)_A^{-1}\varphi(t)d_2t, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.14}$$

который по отношению к системе (3.13) ту же играет роль, что и интеграл (1.1) по отношению к системе Коши – Римана, и потому обозначается тем же символом. Этот интеграл является частным случаем (3.1) и к нему можно применить теорему 4. Формула (3.2) для этого интеграла принимает аналогичную (1.4) форму:

$$\frac{\partial(T\varphi)}{\partial x} = -\sigma_1\varphi + S\varphi, \quad \frac{\partial(T\varphi)}{\partial y} = -\sigma_2\varphi + AS\varphi, \tag{3.15}$$

с двумерным сингулярным интегралом

$$(S\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}}(t-z)_A^{-2}\varphi(t)d_2t, \quad z\in\mathbb{C}.$$

и матричными коэффициентами

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\xi_k\xi_A^{-1}d_1\xi, \quad k=1,2.$$

В частности,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - A\frac{\partial}{\partial x}\right)(T\varphi) = E\varphi \tag{3.16}$$

с коэффициентом $E=-\sigma_2+A\sigma_1$. Последний можно рассматривать как значение $E=h(A)$ скалярной аналитической функции

$$h(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}(\xi_2-u\xi_1)(\xi_1+u\xi_2)^{-1}d_1\xi, \quad \operatorname{Im}\zeta\neq 0,$$

от матрицы A. Нетрудно видеть, что $h(\pm i)=\pm i$ и все производные функции $h(\zeta)$ в точках $\pm i$ обращаются в нуль. Поэтому функция $h(\zeta)\equiv\pm i$ при $\pm\operatorname{Im}\zeta>0$. В частности, матрица E обратима, причем $E=1$ $(E=-1)$, если все собственные значения матрицы A лежат в верхней (нижней) полуплоскости.

Пусть l_1 (l_2) есть число собственных значений матрицы A в верхней (нижней) полуплоскости. Тогда если матрицу A привести к жордановой форме

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} J_1 & 0\\ 0 & J_2\end{pmatrix},$$

где собственные значения жордановой матрицы $J_1\in\mathbb{C}^{l_1\times l_1}$ $(J_2\in\mathbb{C}^{l_2\times l_2})$ лежат в верхней (нижней) полуплоскости, то то аналогичным образом

$$B^{-1}EB = \begin{pmatrix} 1_{l_1} & 0\\ 0 & -1_{l_2}\end{pmatrix},$$

где 1_s означает единичную $s\times s$ матрицу.

Формула (3.16) показывает, что теорема 5 сохраняет свою силу и для оператора (3.14). Заметим, что равенство (2.19) также можно записать в форме (3.16) с $A=i$, если в определении (1.1) множитель $-1/\pi$ заменить на $1/(2\pi i)$. Отметим попутно, что в работе [7] допущена опечатка – множитель $1/\pi i$ в определении (3.6) оператора I^1 нужно заменить на $1/(2\pi i)$.

Литература

1. Векуа, И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа. – М.: Наука, 1988.
2. Стейн, И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1972.
3. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1968.
4. Adams, R.A. Sobolev Spaces / R.A. Adams. – New York: Academic Press, 1975.

5. Берс, Л. Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. – М.: Мир, 1966.
6. Солдатов, А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи / А.П. Солдатов // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2017. – Т. 63. – С. 1–189.
7. Кошанов, Б. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости / Б. Кошанов, А.П. Солдатов // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 12. – С. 1666–1681.
8. Солдатов, А.П. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами / А.П. Солдатов, О.В. Чернова. – М.: ВИНИТИ РАН, 2018.

Александр Павлович Солдатов, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, ФИЦ «Информатика и управления» РАН, (г. Москва, Российская Федерация); Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва, Российская Федерация); Белгородский государственный национальный исследовательский университет (г. Белгород, Российская Федерация), soldatov48@gmail.com.

Поступила в редакцию 31 августа 2020 г.

MSC 45P05, 45H05, 44A15 **DOI: 10.14529/mmp210105**

ON THE POMPEIU INTEGRAL AND ITS GENERALIZATIONS

A.P. Soldatov[1–3],
[1]Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS, Moscow, Russian Federation;
[2]Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation;
[3]Belgorod State University, Belgorod, Russian Federation,
E-mail: soldatov48@gmail.com

Estimates of the classical Pompeiu integral defined on the whole complex plane with the singular points $z = 0$ and $z = \infty$ in the scale of weighted Holder and Lebegue spaces are given. This integral plays the key role in the theory of generalized analytic functions by I.N. Vekua, which is widely used in modeling different processes including transonic gas flows, momentless tense states of equilibrium of convex shells and many others. More exactly, the weighted exponents λ for which this operator is bounded as an operator from a weighted space L^p_λ of functions summable to the p-th power in the weighted space $C^\mu_{\lambda+1}$ of Hölder functions. Similar estimates in these spaces for integrals with difference kernels are also established. Applications of these results to first order elliptic systems on the plane which includes mathematical models of plane elasticity theory (the Lame system) in the general anisotropic case and play the central role in the theory of generalized analytic functions by I.N. Vekua.

Keywords: Pompeiu integral; weighted Hölder and Sobolev spaces; generalized Pompeiu integral; integrals with difference kernels; mathematical models of elasticity theory.

References

1. Vekua I.N. *Generalized Analytic Functions.* Pergamon, Oxford, 1962.
2. Stein E.M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton, Princeton University Press, 1970.
3. Sobolev S L. *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics.* Providence, Mathematical Society, 1963.
4. Adams R.A. *Sobolev Spaces.* New York, Academic Press, 1975.
5. Bers L., John F., Schechter M. *Partial Differential Equations.* New York, Interscience, 1964.
6. Soldatov A.P. Singular Integral Operators and Elliptic Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 245, no. 6, pp. 695–891.
7. Koshanov B.D., , Soldatov A.P. Boundary Value Problem with Normal Derivatives for a Higher-Order Elliptic Equation on the Plane. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1–16.
8. Soldatov A.P., Chernova O.V. The Riemann–Hilbert Problem for First Order Elliptic Systems on the Plane with Constant Elder Coefficients. *Itogi nauki i tekhniki, Sovremennaya matematika i prilozheniya*, Moscow, VINITY RAN, 2018. (in Russian)

Received August 31, 2020