УДК 517.977

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

В.В. Флоринский

Белгородский государственный университет, 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14,
e-mail: flor@bsu.edu.ru

Построен итерационный процесс для решения задачи быстродействия с канонической системой, а также для некоторых систем с некратным вещественным спектром. Показана близость значений якобиана степени непрерывного отображения и степени якобиана этого отображения в некоторой окрестности неподвижной точки.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, метод итерации, сходимость итерационного процесса, якобиан.

В современной теории оптимального управления одно из центральных мест занимает проблема быстродействия, в частности, линейная проблема быстродействия. Поскольку время быстродействия является наиболее естественным критерием оптимальности, задачи на быстродействие стали одним из наиболее распространенных объектов применения различных методов оптимального управления. В последнее время существенное развитие теории линейного быстродействия было достигнуто на основе изучения ее связи с классической проблемой моментов. Одним из центральных пунктов в таком подходе стало исследование задачи быстродействия для канонической управляемой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, & |u| \le 1, \\ \dot{x}_i = x_{i-1}, & i = 2,\dots,n, \\ x(0) = x, & x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min. \end{cases} \tag{1}$$

В.И. Коробовым и Г.М. Скляром в [1] показано, что решение данной задачи эквивалентно степенной проблеме моментов на минимально возможном отрезке (min-проблеме моментов), это позволило впервые получить аналитическое решение задачи (1) для системы произвольного порядка n. В [1,2] даны методы нахождения времени быстродействия Θ, моментов переключения $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ управления $u(t)$ (точки разрыва функции $u(t)$) и рода управления $\widetilde{u} = \pm 1$ – управления на конечном промежутке $[T_{n-1}, \Theta]$. В этих же работах показано, что нахождение моментов переключения $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ оптимального по быстродействию управления $u(t)$ сводится к решению нелинейных алгебраических систем

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} T_j^k + \frac{(-1)^{n+1}}{2} T_n^k = \frac{(-1)^{n+k+1} k! x_k \widetilde{u}}{2}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{2}$$

здесь $T_n = \Theta$ – время быстродействия, а $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – координаты начальной точки $x(0)$.

Аналитический метод решения систем (2), предложенный В.И. Коробовым и Г.М. Скляром в [1], основан на введении некоторой системы специальных полиномов, называемых каноническими переменными.

В настоящей работе рассмотрим численное решение систем (2) методом простой итерации.

Обозначим правые части уравнений (2) через

$$g_k = \frac{(-1)^{n+k+1} k! x_k \widetilde{u}}{2}, \qquad k = \overline{1,n}, \tag{3}$$

тогда уравнения (2) могут быть записаны в виде:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} T_j^k + \frac{(-1)^{n+1}}{2} T_n^k - g_k = 0, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Приведем полученную систему к виду, удобному для итерации, для чего умножим каждое из уравнений (4) на $(-1)^k a_k$, где a_k $(k = \overline{1,n})$ – некоторые ненулевые постоянные. Запишем уравнения (4) в виде:

$$T_k^k = T_k^k + (-1)^k a_k \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} T_j^k + (-1)^{n+1} \frac{T_n^k}{2} - g_k \right), \qquad k = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение векторы

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F(T) = \begin{pmatrix} T_1 - a_1 \left(T_1 - T_2 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2} T_n - g_1 \right) \\ \left(T_2^2 + a_2 \left(T_1^2 - T_2^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2} T_n^2 - g_2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(T_n^n + (-1)^n a_n \left(T_1^n - T_2^n + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2} T_n^n - g_n \right) \right)^{\frac{1}{n}} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (5) можно записать в виде векторного уравнения

$$T = F(T). \tag{6}$$

Наличие рода управления $\widetilde{u} = \pm 1$, входящего в g_k, показывает, что векторное уравнение (6) задает две системы для $\widetilde{u} = -1$ и $\widetilde{u} = +1$ (по этой же причине уравнения (2) задают также две системы).

Так как решение задачи быстродействия (1) существует, и $T_1, T_2, \ldots, T_n$ – моменты переключения управления $u(t)$, переводящего точку $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в начало координат за время T_n, то вектор $T^* = (T_1^*, T_2^*, \ldots, T_n^*)$, координаты которого удовлетворяют неравенствам

$$0 \le T_1^* \le T_2^* \le \ldots \le T_n^*, \tag{7}$$

является решением одного из уравнений (6). Таким образом, вектор T^* является неподвижной точкой отображения $F(T)$, то есть $T^* = F(T^*)$.

Для нахождения вектора T^* построим итерационную схему:

$$T^{(p+1)} = F(T^{(p)}), \qquad p = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Если этот итерационный процесс сходится для одного из уравнений (6) к вектору, компоненты которого удовлетворяют неравенствам (7), то эти компоненты являются моментами переключения оптимального по быстродействию управления $u(t)$ задачи (1).

Постоянные величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$, входящие в правые части уравнений (5) подбирают таким образом, чтобы итерационный процесс (8) сходился для одного из уравнений (6).

Как известно, итерационный процесс (8) сходится, если норма якобиана отображения $F(T)$ меньше 1, то есть, если

$$\left\| \frac{DF}{DT} \right\| < 1,$$

но уже при $n = 3$ ни при каких $a_1, a_2, \ldots, a_n$ это неравенство не выполняется. Однако можно так подобрать постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что норма степени якобиана будет удовлетворять неравенству:

$$\left\| \left(\frac{DF}{DT} \right)^m \right\| < 1. \qquad (9)$$

Как показали результаты численного эксперимента, во всех случаях, когда норма степени якобиана удовлетворяла неравенству (9), итерационный процесс (8) сходился.

Докажем следующее утверждение.

Если отображение $F(T)$ и его якобиан $\frac{DF}{DT}$ непрерывны, то в некоторой окрестности неподвижной точки T^* этого отображения якобиан степени отображения $\frac{DF^m}{DT}$ незначительно отличается от степени якобиана $\left(\frac{DF}{DT} \right)^m$ этого отображения, то есть

$$\frac{DF^m}{DT} = \left(\frac{DF}{DT} \right)^m + r.$$

Действительно, так как $F^m(T) = F(F(\ldots F(T)\ldots))$, то

$$\frac{DF^m}{DT} = \frac{DF(F(\ldots F(T)\ldots))}{DT} = \frac{DF(F^{m-1}(T))}{DT} \frac{DF(F^{m-2}(T))}{DT} \cdots \frac{DF(F(T))}{DT} \frac{DF(T)}{DT}.$$

Положим $T = T^* + \tau$, тогда получим:

$$\frac{DF^m(T^* + \tau)}{DT} = \frac{DF(F^{m-1}(T^* + \tau))}{DT} \frac{DF(F^{m-2}(T^* + \tau))}{DT} \cdots \frac{DF(F(T^* + \tau))}{DT} \frac{DF(T^* + \tau)}{DT}.$$

В силу непрерывности отображения $F(T)$, последнее равенство можно переписать в виде:

$$\frac{DF^m(T^* + \tau)}{DT} = \frac{DF(F^{m-1}(T^*) + r_1)}{DT} \frac{DF(F^{m-2}(T^*) + r_2)}{DT} \cdots \frac{DF(F(T^*) + r_{m-2})}{DT} \frac{DF(T^* + \tau)}{DT}.$$

Так как T^* – неподвижная точка отображения $F(T)$, то

$$F^{m-1}(T^*) = F^{m-2}(T^*) = \ldots = F(T^*) = T^*.$$

Тогда

$$\frac{DF^m(T^*+\tau)}{DT} = \frac{DF(T^*+r_1)}{DT}\frac{DF(T^*+r_2)}{DT}\cdots\frac{DF(T^*+r_{m-2})}{DT}\frac{DF(T^*+\tau)}{DT}.$$

Откуда, в силу непрерывности якобиана $\frac{DF}{DT}$, можно записать:

$$\frac{DF^m(T^*+\tau)}{DT} = \left(\frac{DF}{DT}\right)^m + r,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, получили: *для того, чтобы отображение было сжимающим, достаточно, чтобы норма некоторой степени якобиана этого отображения была меньше единицы.*

Рассмотрим пример итерационного решения задачи (1).

При $n = 5$ из начальной точки $x(0) = (1;1;1;1;1)$ в начало координат процесс итерации (8) для системы (5) при $\widetilde{u} = -1$ к решению

$$T_1 \approx 3{,}204351;\ T_2 \approx 8{,}012594;\ T_3 \approx 12{,}883745;\ T_4 \approx 16{,}462254;\ T_5 \approx 17{,}773504$$

с точностью до 10^{-6}, при этом начальное приближение было $T_1^0 = 10;\ T_2^0 = 20;\ T_3^0 = 30;\ T_4^0 = 40;\ T_3^0 = 50$. В табл. 1 приведены значения постоянных a_k $(k = 1;2;3;4;5)$, минимальная степень якобиана, норма которой меньше единицы (прочерк в этой графе означает, что норма степени якобиана неограниченно возрастает); и число итераций, которые зависят от постоянных a_k.

Таблица 1

Значения a_1, a_2, a_3, a_4, a_5	Минимальная степень якобиана, норма которой <1	Число итераций
0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,2	1792	32103
0,3; 0,2; 0,1; 0,7; 1,2	2339	20402
0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 1	914	15561
0,1; 0,2; 0,3; 1; 2,2	–	9045
0,1; 0,2; 0,5; 0,7; 1,6	486	9038
0,1; 0,2; 0,6; 0,7; 1,6	509	8560
0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 1,6	–	7830
0,1; 0,2; 0,7; 0,8; 1,8	–	7392
1,25; 1,35; 1,5; 2,2; 4,6	–	997

Как показывает численный эксперимент, чем меньше значения постоянных a_k, тем, как правило, меньшая степень якобиана становится меньше единицы и тем большее число итераций требуется для сходимости. Если увеличивать значения постоянных a_k, то число итераций уменьшается (при этом значение a_n должно быть вдвое больше значений других множителей). При значительном увеличении значений постоянных a_k процесс итерации начинает расходиться (так, например, при $a_1 = 1{,}2$; $a_2 = 1{,}4$; $a_3 = 1{,}5$; $a_4 = 2{,}2$; $a_5 = 4{,}6$ процесс итерации для данной начальной точки расходится). Кроме того, при увеличении значений a_k область сходимости уменьшается.

Процесс итерации можно ускорить, если в каждой итерации незначительно увеличивать каждый из множителей a_k. Так, например, если в рассмотренной задаче при начальных значениях a_k, взятых из последней строки табл. 1, в каждой итерации умножать a_k на 1,0003, то число итераций сокращается до 534.

Итерационный процесс для решения системы (4) можно строить без извлечения корней, а взяв в уравнении (6) функцию $F(T)$ в виде:

$$F(T)=\begin{pmatrix} T_1-a_1\left(T_1-T_2+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2}T_n-g_1\right) \\ \left(T_2^2+a_2\left(T_1^2-T_2^2+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2}T_n^2-g_2\right)\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(T_n^n+(-1)^n 2a_n\left(T_1^n-T_2^n+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2}T_n^n-g_n\right)\right) \end{pmatrix}.$$

В этом случае мы будем избегать комплексности в итерациях, но при этом сильно увеличивается число итераций. Так, если в приведенном примере брать $a_k=\frac{1{,}5k}{\left(T_k^0\right)^k}$, $(k=\overline{1;5})$, то число итераций будет 110958. Если при этом изменять a_k, умножая каждый из этих множителей в каждой итерации на 1,00017, то число итераций сокращается до 19188.

Рассмотрим теперь задачу быстродействия вида:

$$\begin{aligned} &\dot{x}=Ax+bu, \qquad |u|\le 1, \\ &x(0)=x, \qquad x(\Theta)=0, \quad \Theta\to\min. \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть матрица A имеет вид $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$, а вектор $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Тогда система (10) запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1=\lambda_1 x_1+u, \qquad |u|\le 1, \\ \dot{x}_i=x_{i-1}+\lambda_i x_i, \quad i=\overline{2,n}, \\ x(0)=x, \qquad x(\Theta)=0, \quad \Theta\to\min. \end{cases} \tag{11}$$

Построим итерационный процесс для задачи (11). Будем полагать, что собственные значения $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ матрицы A – вещественные, ненулевые и различные.

В работе [3] показано, что решение задачи (11) можно свести к решению системы

$$\left(V_i,x\right)=(-1)^n\frac{\widetilde{u}}{\lambda_i}\left(2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e^{-\lambda_i T_j}+(-1)^n e^{-\lambda_i T_n}+1\right),\ (i=\overline{1,n}), \tag{12}$$

относительно $T_1, T_2, \ldots, T_n$, где V_i – собственные векторы матрицы A^*, сопряженной матрице A, отвечающие собственным значениям λ_i, $(i=\overline{1,n})$, которые имеют следующий вид:

$$V_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad V_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda_2-\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad V_3=\begin{pmatrix}1\\\lambda_3-\lambda_1\\(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \ldots\ldots,\ V_n=\begin{pmatrix}1\\\lambda_n-\lambda_1\\(\lambda_n-\lambda_2)(\lambda_n-\lambda_1)\\\vdots\\\prod\limits_{j=1}^{n-1}(\lambda_n-\lambda_j)\end{pmatrix}.$$

В этом случае, скалярное произведение (V_i,x), стоящее в левой части системы (12), имеет вид: $(V_1,x)=x_1$, $\quad (V_i,x)=x_1+\sum\limits_{k=2}^{i}\prod\limits_{j=1}^{k-1}(\lambda_i-\lambda_j)x_k$, $(i=\overline{2,n})$.

Тогда систему (12) можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j e^{-\lambda_i T_j}+\frac{(-1)^n}{2}e^{-\lambda_i T_n}=\frac{(-1)^n\tilde{u}\lambda_i(V_i,x)-1}{2},\quad i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Введем следующие обозначения:

$$t_j=e^{-T_j},\quad j=\overline{1,n};\qquad g_i=\frac{(-1)^n\tilde{u}\lambda_i(V_i,x)-1}{2},\quad i=\overline{1,n}.$$

Тогда система (13) запишется в виде:

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j t_j^{\lambda_i}+\frac{(-1)^n}{2}t_n^{\lambda_i}-g_i=0,\quad i=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Таким образом, получили систему типа системы (4).

Литература

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Математический сборник. – 1987. – Вып. 134(176). – № 2 (10). – С. 186-206.
2. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Методы построения оптимальных по быстродействию управлений для канонических управляемых систем // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т.6. – № 3 / 4. – С. 264-287.
3. Коробов В.И., Флоринский В.В. О нахождении оптимального времени и моментов переключения в задаче быстродействия // Вестник Харьковского университета: Серия «Математика, прикладная математика и механика». – 1999. – № 444. – С. 24-43.

THE ITERATIVE APPROACH TO THE SOLUTION OF SOME LINEAR TIME-OPTIMAL PROBLEM

V.V. Florinsky

Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia,
e-mail: flor@bsu.edu.ru

The iterative process for the solution of the time-optimal problem for the canonical system and for the some system with no multiple real spectrum is suggested. The proximity between the values of the Jacobian of the degree of the continuous mapping and the degree of the Jacobian of this mapping in some neighborhood of the fixed point is showed.

Key words: optimal control, time-optimal problem, iterated method, convergence of the iterated process, Jacobian.