

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА*

Ю.В. Савина, Е. М. Богатов

Старооскольский технологический институт (филиал МИСиС)
309516 г. Старый Оскол, м-н Макаренко, 40а, st-julia@belnet.ru

Выводятся формулы для вычисления локальных угловых коэффициентов излучения в замкнутой системе цилиндрических тел, имеющих своим сечением окружности произвольного радиуса. Доказана инвариантность угловых коэффициентов относительно изменения масштабов системы. Изложена процедура вычисления средних угловых коэффициентов для данного случая. Результат решения задачи сравнивается с результатом вычисления интегральных оптико-геометрических характеристик системы, полученных способом натянутых нитей.

Ключевые слова: теплообмен излучением, угловые коэффициенты, оптико-геометрические характеристики.

Введение

В расчетах лучистого теплообмена между телами важную роль играют геометрические характеристики формы и взаимного расположения тел. Влияние указанных характеристик учитывается угловыми коэффициентами, определяющими геометрические условия прямого обмена энергией между этими телами в прозрачной среде (см., например, [1-5]).

К настоящему времени разработан ряд методов вычисления угловых коэффициентов [6] в полостях определенного вида и некоторых типичных системах тел, как правило, без затенения. Вопрос о явном вычислении угловых коэффициентов для системы соприкасающихся тел с затенением (даже в плоском случае), по-видимому, ранее не рассматривался.

Данная работа посвящена определению угловых коэффициентов в системе четырех протяжённых цилиндрических тел круглого сечения.

Вспомогательные теоретические сведения

В задачах теплообмена излучением обычно встречаются три типа угловых коэффициентов, определяемых следующим образом ([1,2]):

1. Элементарный угловой коэффициент $d\varphi_{d\Omega_1, d\Omega_2}$ между элементарными площадками $d\Omega_1$ и $d\Omega_2$ представляет собой отношение энергии излучения, испускаемого элементарной площадкой $d\Omega_1$, и непосредственно достигающего площадки $d\Omega_2$, к энергии излучения, испускаемой площадкой $d\Omega_1$, в пределах полусферического телесного угла.

2. Локальный угловой коэффициент $\varphi_{d\Omega_1, \Omega_2}$ между элементарной площадкой $d\Omega_1$ и поверхностью Ω_2 представляет собой долю энергии излучения, испускаемого элементарной площадкой $d\Omega_1$, во всех направлениях в пределах полусферического угла, которая непосредственно достигает поверхности Ω_2 .

* Работа выполнена при частичной грантовой поддержке РФФИ: проект № 06-08-96312.



3. Средний угловой коэффициент $\varphi_{\Omega_1, \Omega_2}$ между поверхностями Ω_1 и Ω_2 определяется как доля излучения, испускаемого поверхностью Ω_1 во всех направлениях, которая непосредственно достигает поверхности Ω_2 .

Наиболее известная формула для определения элементарного углового коэффициента ([1-6]) имеет вид:

$$d\varphi_{\Omega_1, \Omega_2} = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 d\Omega_2}{\pi r^2},$$

где r – длина линии, соединяющей центры площадок; β_1 и β_2 – углы, образованные единичными векторами нормалей к этим площадкам с данной линией. Однако вычисление локальных и средних угловых коэффициентов с применением данной формулы требует одно- и двукратного интегрирования по поверхности. Такие интегралы довольно сложны.

Существуют различные аналитические и экспериментальные методы определения угловых коэффициентов. В работе [7] представлен подробный вывод формулы для вычисления локальных угловых коэффициентов между элементарной площадкой и бесконечно длинной полосой:

$$\varphi_{d\Omega_1, \Omega_2} = \frac{1}{2} (\sin \varphi_a - \sin \varphi_b), \quad (1)$$

где φ_a и φ_b – углы между нормалью к элементарной площадке $d\Omega_1$ и касательными к поверхности Ω_2 проведенными через данную площадку. Этот метод также используется в тех случаях, когда каждая из участвующих поверхностей сильно вытянута в одном из направлений.

Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из четырех протяжённых цилиндрических тел круглого сечения попарно касающихся друг друга и поставим в соответствие сечению n -го тела, ортогональному его оси, окружность ϖ_n ($n=1, 2, 3, 4$). Выберем систему координат таким образом, чтобы центр сечения ϖ_1 попал в начало координат. Радиус окружности обозначим через R . Части границ окружностей, ограничивающих четырехугольную криволинейную полость, обозначим Ω_i ($i=1, \dots, 4$). Зафиксируем произвольную точку $M_0 \in \Omega_1$, через которую проведем нормаль и три касательные к окружностям $\varpi_2, \varpi_3, \varpi_4$. Углы между касательными к окружностям ϖ_2, ϖ_3 и нормалью обозначим через θ_2 и θ_3 (см. рис. 1.1-1.3). Тогда локальные угловые коэффициенты $\varphi(M_0, \Omega_j)$ ($j=2, 3, 4$), где Ω_j – часть Ω_1 , видимая из точки M_0 , будут вычисляться по формулам (2), которые несколько видоизменяются в зависимости от того, на каком участке дуги лежит точка M_0 ([1] – [3]):

$$\varphi(M_0, \Omega_2) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \theta_2 \right), \quad \varphi(M_0, \Omega_3) = \frac{1}{2} (\sin \theta_2 - \sin \theta_3),$$

$$\varphi(M_0, \Omega_4) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \theta_3 \right) - \text{для случая, рассмотренного на рис. 1.1,}$$



$$\varphi(M_0, \Omega_2) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \theta_2 \right), \quad \varphi(M_0, \Omega_3) = \frac{1}{2} (\sin \theta_2 + \sin \theta_3),$$

$$\varphi(M_0, \Omega_4) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \theta_3 \right) \text{ — для случая, рассмотренного на рис. 1.2,} \quad (2)$$

$$\varphi(M_0, \Omega_2) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \theta_2 \right), \quad \varphi(M_0, \Omega_3) = \frac{1}{2} (\sin \theta_3 - \sin \theta_2),$$

$$\varphi(M_0, \Omega_4) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \theta_3 \right) \text{ — для случая, рассмотренного на рис. 1.3.}$$

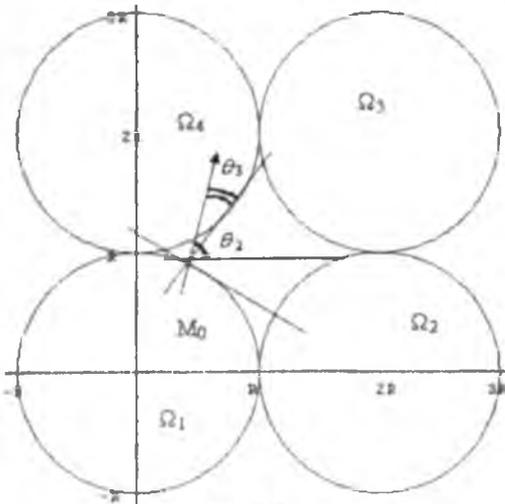


Рис. 1.1

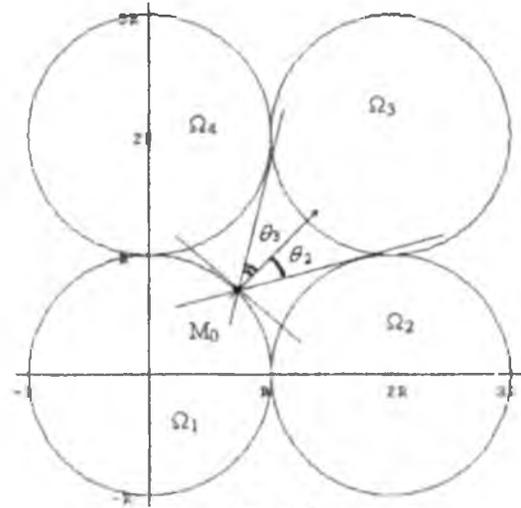


Рис. 1.2

Значения средних угловых коэффициентов, полученные с помощью метода натянутых нитей для этой же конфигурации системы (для 4-х тел этот метод описан в [5]), будут равны

$$\varphi(\Omega_1, \Omega_2) = \varphi(\Omega_1, \Omega_4) = 1 - \frac{2}{\pi}, \quad \varphi(\Omega_1, \Omega_3) = \frac{4}{\pi} - 1.$$

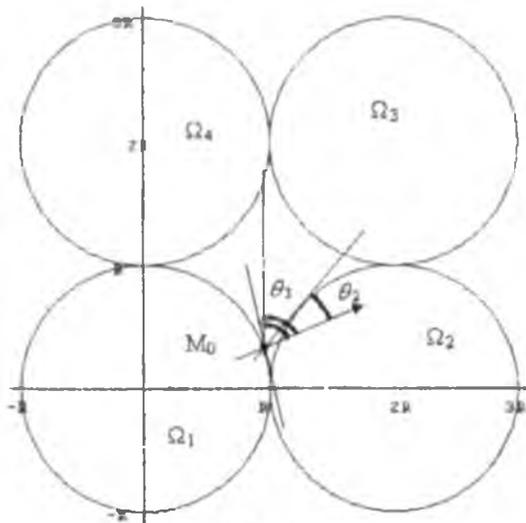


Рис. 1.3

Метод вычисления локальных угловых коэффициентов

Перейдём к вычислению синусов углов θ_2 и θ_3 . Уравнение нормали, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, $y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ имеет вид:

$$y = \frac{\sqrt{R^2 - x_0^2}}{x_0} x.$$

Найдем уравнения касательных к границам Ω_2 и Ω_4 , проходящих через точку M_0 . Уравнение касательной к границе окружности ω_2 , проходящей через соответствующую точку, задается в виде:

$$y - \sqrt{R^2 - x_0^2} = k_1(x - x_0), \quad k_1 = \frac{2R - x_1}{y_1},$$



где (x_1, y_1) – координаты точки касания. Выразим эти неизвестные через координаты точки M_0 . Из рисунка 2 найдем: $x_1 = 2R - R \sin \gamma$, $y_1 = R \cos \gamma$. Тогда:

$$k_1 = \frac{2R - x_1}{y_1} = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \operatorname{tg} \gamma, \quad \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \right) = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta), \text{ где}$$

$$\alpha = \arccos \frac{2R - x_0}{\sqrt{(2R - x_0)^2 + y_0^2}} = \arccos \frac{2R - x_0}{\sqrt{5R^2 - 4Rx_0}},$$

$$\beta = \arccos \frac{R}{\sqrt{(2R - x_0)^2 + y_0^2}} = \arccos \frac{R}{\sqrt{5R^2 - 4Rx_0}}.$$

Вычисляя, получим:

$$k_1 = \frac{2R^2 - Rx_0 - 2\sqrt{(R^2 - x_0^2)R(R - x_0)}}{2(2R - x_0)\sqrt{R(R - x_0)} + R\sqrt{R^2 - x_0^2}}.$$

Рассуждая аналогично, найдем уравнение касательной к границе Ω_4 :

$$y - \sqrt{R^2 - x_0^2} = k_2(x - x_0), \quad \text{где} \quad k_2 = \frac{Rx_0 + 2\sqrt{R(R - \sqrt{R^2 - x_0^2})}(2R - \sqrt{R^2 - x_0^2})}{2R^2 - R\sqrt{R^2 - x_0^2} - 2x_0\sqrt{R(R - \sqrt{R^2 - x_0^2})}}.$$

Синусы углов θ_2 и θ_3 вычислим, используя стандартные тригонометрические формулы. Тогда

$$\sin(\theta_2) = \frac{R^2 - 2Rx_0 + 4\sqrt{R(R - x_0)}(R^2 - x_0^2)}{4R\left(\frac{5R}{4} - x_0\right)},$$

$$\sin(\theta_3) = \frac{2R\sqrt{R^2 - x_0^2} - R^2 - 4x_0\sqrt{R(R - \sqrt{R^2 - x_0^2})}}{4R\left(\frac{5R}{4} - \sqrt{R^2 - x_0^2}\right)}. \quad (3)$$

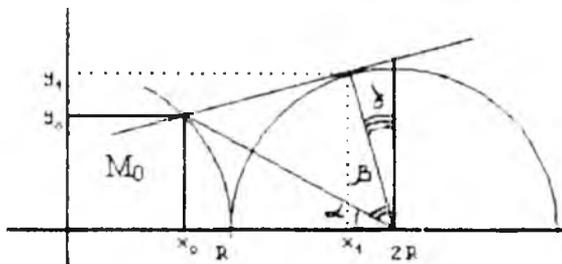


Рис. 2

Используя формулы (3), можно вычислить локальные угловые коэффициенты в произвольной точке M_0 . Заметим, что функции, определяющие синусы углов, являются однородными степени однородности ноль, откуда следует, что при изменении масштабов системы локальные угловые коэффициенты не изменятся.

Проверка полученных результатов

Вычислим средние (интегральные) угловые коэффициенты по формуле (см., например, [2-6])

$$\varphi(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} \varphi(M_0, \Omega_2) dL_{\Omega_1}^{M_0}, \quad (4)$$

учитывая изменения в формуле (1) при движении точки M_0 по дуге Ω_1 .



Найдем абсциссы a и b точек, разделяющих дугу Ω_1 на три части, на каждой из которых локальные угловые коэффициенты вычисляются по соответствующим формулам (2). Причем, искомые точки будут симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, достаточно найти только одну из них, а вторая получится автоматически. При $x_0 = b$ угловые коэффициенты уравнений нормали и касательной к окружности Ω_2 совпадают ($k = k_1$):

$$\frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{b} = \frac{2R^2 - Rb - 2\sqrt{(R^2 - b^2)R(R - b)}}{2(2R - b)\sqrt{R(R - b)} + R\sqrt{R^2 - b^2}} \quad \text{или} \quad 4\sqrt{(R^2 - b^2)R(R - b)} = R(2b - R).$$

Возводя последнее выражение в квадрат и приводя подобные, получим кубическое уравнение:

$$16b^3 - 20Rb^2 - 12R^2b + 15R^3 = 0, \tag{5}$$

точное решение которого можно найти по формулам Кардано (см., например, [8]), вводя последовательно подстановки $b = t + \frac{5R}{12}$ и $t = u + v$. Решая получаемые уравнения, находим:

$$t = R \left(\sqrt[3]{\frac{-415 + 234i}{1728}} + \sqrt[3]{\frac{-415 - 234i}{1728}} \right),$$

$$b = \frac{5R}{12} + R \frac{\sqrt[6]{226981}}{12} \left[\cos \frac{-\operatorname{arctg} \frac{234}{415} + \pi + 2\pi k}{3} + \cos \frac{\operatorname{arctg} \frac{234}{415} - \pi + 2\pi n}{3} + \right.$$

$$\left. + i \left(\sin \frac{-\operatorname{arctg} \frac{234}{415} + \pi + 2\pi k}{3} + \sin \frac{\operatorname{arctg} \frac{234}{415} - \pi + 2\pi n}{3} \right) \right], \quad k, n = 0, 1, 2.$$

Перебирая различные варианты k и n , выбираем действительный корень, значение которого лежит на интервале $(0; R)$:

$$b = \frac{5R}{12} + R \frac{\sqrt[6]{226981}}{12} \left(\cos \frac{\operatorname{arctg} \frac{234}{415}}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\operatorname{arctg} \frac{234}{415}}{3} \right).$$

Тогда второй предел интегрирования найдется как $a = \sqrt{R^2 - b^2}$.

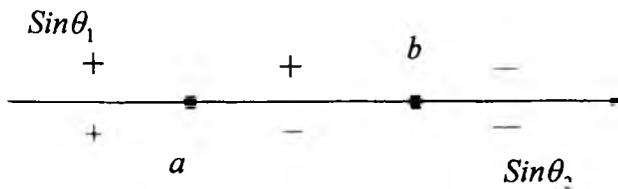


Рис. 3

Определение знаков подмодульных выражений у синусов углов θ сводится к решению уже рассмотренного уравнения (5). Тогда знаки распределятся так, как показано на рис. 3.

Перейдем к вычислению средних угловых коэффициентов, используя формулы (2) – (4) и раскрывая модули.

Получим:

$$\varphi(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{|\Omega_1|_{\Omega_1}} \int_{\Omega_1} \varphi(M_0, \Omega_2) dL_{\Omega_1}^{M_0} =$$



$$= \frac{2}{\pi R} \frac{1}{2} \int_0^R \left(1 - \frac{R^2 - 2Rx_0 + 4\sqrt{R(R-x_0)}(R^2 - x_0^2)}{4R\left(\frac{5R}{4} - x_0\right)} \right) \frac{Rdx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Данное подынтегральное выражение интегрируется в элементарных функциях с помощью стандартных подстановок. В итоге получим:

$$I_1 = \int \left(1 - \frac{R^2 - 2Rx_0 + 4\sqrt{R(R-x_0)}(R^2 - x_0^2)}{4R\left(\frac{5R}{4} - x_0\right)} \right) \frac{Rdx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R \arcsin \frac{x}{R} -$$

$$- 2R \left[\frac{1}{4}t - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5tg \frac{t}{2} - 4}{3} \right]_{t=\arcsin \frac{x}{R}} - 2R \left[-2 \frac{1}{\sqrt{R}}t + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{R}} \right]_{t=\sqrt{R-x}}$$

Тогда средний угловой коэффициент с дуги Ω_1 на дугу Ω_2 равен

$$\varphi(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{\pi R} \left(I_1 \Big|_0^R \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - 2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \operatorname{arctg} 2 \right) \approx 0,36338.$$

$$\varphi(\Omega_1, \Omega_3) = \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} \varphi(M_0, \Omega_3) \chi_{\Omega_1}^M =$$

$$= \frac{2}{\pi R} \frac{1}{2} \int_0^R \left(\frac{R^2 - 2Rx_0 + 4\sqrt{R(R-x_0)}(R^2 - x_0^2)}{4R\left(\frac{5R}{4} - x_0\right)} - \frac{2R\sqrt{R^2 - x_0^2} - R^2 - 4x_0\sqrt{R(R - \sqrt{R^2 - x_0^2})}}{4R\left(\frac{5R}{4} - \sqrt{R^2 - x_0^2}\right)} \right) \frac{Rdx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Вычисляя неопределенный интеграл от заданной функции, получим:

$$I_2 = 2R \left[\frac{1}{4}t - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5tg \frac{t}{2} - 4}{3} \right]_{t=\arcsin \frac{x}{R}} + 2R \left[-\frac{1}{\sqrt{R}}t + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{R}} \right]_{t=\sqrt{R-x}}$$

$$+ 2R \left[-\frac{1}{4}t + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3tg \frac{t}{2} - \sqrt{1 - \cos t} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2\sqrt{1 - \cos t} \right]_{t=\arcsin \frac{x}{R}}$$

В этом случае средний угловой коэффициент с дуги Ω_1 на дугу Ω_3 равен

$$\varphi(\Omega_1, \Omega_3) = \frac{1}{\pi R} \left(I_2 \Big|_0^R \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + 4 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} - 2 \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 3 \right) \approx 0,27324,$$

а с дуги Ω_1 на дугу Ω_4 равен

$$\varphi(\Omega_1, \Omega_4) = \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} \varphi(M_0, \Omega_4) \chi_{\Omega_1}^M =$$



$$= \frac{2}{\pi R} \frac{1}{2} \int_0^R \left(1 + \frac{2R\sqrt{R^2 - x_0^2} - R^2 - 4x_0\sqrt{R(R - \sqrt{R^2 - x_0^2})}}{4R\left(\frac{5R}{4} - \sqrt{R^2 - x_0^2}\right)} \right) \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Интегрируя данное выражение, найдем:

$$I_3 = R \arcsin \frac{x}{R} + 2R \left[-\frac{1}{4}t + \frac{1}{2} \arctg 3 \operatorname{tg} \frac{t}{2} - \sqrt{1 - \cos t} + \frac{1}{2} \arctg 2 \sqrt{1 - \cos t} \right]_{t = \arcsin \frac{x}{R}}$$

И тогда $\varphi(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{\pi R} \left(I_3 \Big|_0^R \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - 2 + \arctg 3 + \arctg 2 \right) \approx 0,36338$.

Данные результаты хорошо согласуются со значениями средних угловых коэффициентов, которые были получены ранее с помощью метода натянутых нитей.

Заключение

Полученные для угловых коэффициентов формулы, могут быть использованы, в частности, при математическом моделировании нагрева неоднородной среды [9], характерным элементом которой является система вышеуказанных цилиндрических тел.

Литература

1. Э.М. Спэрроу, Р.Д. Сесс. Теплообмен излучением. – Л.: Энергия, 1971. – 294 с.
2. Оцисик М. Н. Сложный теплообмен. – М.: Мир, 1976. – 616 с.
3. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. – М.: Мир, 1975. – 934 с.
4. Русин С. П., Пелецкий В. Э. Тепловое излучение полостей. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 152 с.
5. Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. Теплообмен излучением: справочник. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.
6. Н. А. Рубцов, В. А. Лебедев. Геометрические инварианты излучения / под ред. В. А. Базанова. – Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1989. – 243 с.
7. Якоб М. Вопросы теплопередачи. – М.: ИЛ, 1960. – 517 с.
8. А.Г. Курош. Курс высшей алгебры: изд.11. – М.: Наука, 1975. – 432 с.
9. Богатов Е. М., Савина Ю. В. Некоторые вопросы математического моделирования нагрева спакетированного металла в печах отжига // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13. – № 2. – С. 274-275.

DEFINING OF VIEW FACTORS IN A SPECIAL TYPE CLOSED SYSTEM

Yu. V. Savina, E.M. Bogatov

Starooskolsky Technology Institute of Moscow State Institute of Steels and Alloys,
mkr. Makarenko, 40, Staryi Oskol, Belgorod region, Russia Federation, 309516
e-mail: st-julia@belnet.ru

Formulas for the calculating of the geometric invariants of radiation in a closed system consists of the long cylinders with arbitrary radiuses are deduced. Invariance of view factors refer to the change of scale is proved. The procedure of a calculating of radiant interchange configuration factors is established. The result is compared with the final of computing of a view factors within another method.

Key words: thermal radiation, radiation heat transfer, view factors, radiant interchange configuration factors.