УДК 517.91

ПРОСТРАНСТВО КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ

Т.В. Карабутова

Белгородский государственный университет, 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14
e-mail: TKarabutova@bsu.edu.ru

Введено метрическое пространство $L_{pc}[0,T]$ кусочно-постоянных функций на $[0,T]$ имеющих конечное множество точек разрыва с такой метрикой d, относительно которой оно является сепарабельным. Описано пополнение этого пространства на основе метрики d и дан критерий предкомпактности множества $M \subset L_{pc}[0,T]$.

Ключевые слова: кусочно-постоянные функции, метрическое пространство, пополнение пространства, предкомпактные множества, сепарабельность.

Введение

Во многих задачах теории случайных процессов возникает необходимость строить процесс ξ на $[a,b] \subsetneq \mathbf{R}$ в виде слабого предела последовательности конструктивно определенных случайных процессов $\{\xi_n; n \in \mathbf{N}\}$ (здесь буквы ξ и ξ_n, $n \in \mathbf{N}$ являются кратким обозначением соответствующих вероятностных пространств). Очень важно, чтобы случайные реализации $\tilde{\xi}_n(t)$, $t \in [a,b]$ процессов ξ_n, $n \in \mathbf{N}$ являлись элементами сепарабельного метрического пространства L. При этом введение метрики необходимо для того, чтобы определить понятие слабого предельного перехода для множества мер процессов ξ_n, $n \in \mathbf{N}$, а сепарабельность важна ввиду того, что распределения вероятностей процессов должны строиться на счетно-порожденных σ-алгебрах подмножеств из L, которые являются случайными событиями [1] и, кроме того, они должны быть непрерывны относительно вводимой топологии. Общей конструкцией для решения задач такого рода является т.н. пространство Скорохода [2] функций, не имеющих разрывов второго рода. Однако, ввиду сложности этой конструкции, при решении конкретных задач, связанных с относительно просто устроенными случайными процессами, лучше использовать более простые математические методы. В настоящей работе предлагается построение метрического пространства L_{pc} кусочно-постоянных функций на $[a,b]$, имеющих на отрезке конечное множество скачков. Введение такого пространства становится очень важным в том случае, когда случайные реализации процессов ξ_n обладают указанным свойством, что всегда имеет место, если точки разрывов траекторий составляют ординарный случайный поток [3]. Простейшим примером таких процессов являются марковские (и полумарковские) цепи с непрерывным временем. Мы построим метрическое пространство L_{pc}, докажем его сепарабельность и критерий предкомпактности его подмножеств.

Пространство $L_{pc}[0,T]$

Определение. Рассмотрим пространство $L_{pc}[0,T]$ кусочно-постоянных функций $x(t)$, которые имеют конечное число точек разрыва на компакте $[0,T]$. Каждая из этих функций определяется конечной упорядоченной по возрастанию последовательностью

$J=<t_n \in [0,T]; n \in \mathbf{N}>$ точек разрыва и последовательностью $A=<a_n \in \mathbf{R}; n \in \mathbf{N}>$ скачков, где $a_n \equiv x(t_n)-x(t_n-0)$, $t_1=0$, $a_1=x(0)$.

Функции $x(t)$ предполагаются непрерывными справа. Заметим, что во введенном определении значения $a_n=0$ не исключаются. Предполагается также, что между J и A имеется соответствие $t_n \Leftrightarrow a_n$.

Каждая из функций $x(t)$ определяется соответствующими ей последовательностями J и A следующим образом

$$x(t)=\sum_{n:t_n\le t} a_n .$$

Нашей целью является введение на пространстве $L_{pc}[0,T]$ такой метрики, которая превратила бы его в сепарабельное метрическое пространство. Естественным кандидатом для определения метрики в $L_{pc}[0,T]$ является норма, введённая на основе вариации функций $x(t)$ из этого пространства. Покажем, что пространство с такой метрикой является несепарабельным. В связи с этим докажем утверждение.

Лемма. Пусть в нормированном пространстве L с нормой $\|\cdot\|$ имеется множество S такое, что для любой пары элементов $x,y\in S$, $x\neq y$ выполняется $\|x-y\|\ge a>0$ и $Card \quad S=\aleph_1$. Тогда пространство L несепарабельно.

Доказательство. Предположим противное. Пусть в пространстве L имеется счетное всюду плотное множество $\{e_n; n\in \mathbf{N}\}$ и пусть $\varepsilon>0$ таково, что $2\varepsilon<a$. Тогда для каждого $x\in S$ найдем $e_{n(x)}$ такое, что $\|e_{n(x)}-x\|<\varepsilon$. Для любой пары $x\neq y$ из S имеем

$$a\le\|x-y\|\le\|x-e_{n(x)}\|+\|e_{n(x)}-e_{n(y)}\|+\|y-e_{n(y)}\|<2\varepsilon+\|e_{n(x)}-e_{n(y)}\|$$

$$\Rightarrow \quad \|e_{n(x)}-e_{n(y)}\|>a-2\varepsilon>0 \quad \Rightarrow \quad e_{n(x)}\neq e_{n(y)}.$$

Таким образом построено однозначное отображение множества S в $\{e_n; n\in\mathbf{N}\}$, что невозможно, т.к. $Card \quad S=\aleph_1$, $Card\{e_n; n\in\mathbf{N}\}=\aleph_0$.

Определим на пространстве кусочно-постоянных функций $L_{pc}[0,T]$ норму

$$\|x\|=\underset{[0,T]}{Var}(x(t))=\sup_{<t_l;l\in N>}\sum_{n=1}^{\infty}|x(t_{n+1})-x(t_n)|+|x(0)|. \tag{1}$$

Определим множество функций $\{x_s(t)=\Theta(t-s); s\in(0,T)\}$, где $\Theta(t)$ – функция О. Хевисайда. Тогда $\|x_s-x_{s'}\|=2$. На основании леммы заключаем, что пространство кусочно-постоянных функций с нормой (1) несепарабельно.

Построим другую метрику в пространстве $L_{pc}[0,T]$, относительно которой это пространство является сепарабельным. Эту конструкцию осуществим в два этапа.

Определим для каждой пары функций $x(t)$, $y(t)\in L_{pc}[0,T]$, $x(t)\Leftrightarrow<a_n,t_n;\ n\in\mathbf{N}>$, $y(t)\Leftrightarrow<b_n,s_n;\ n\in\mathbf{N}>$, двухместный функционал $\rho(x,y)=\sum_n|a_n-b_n|$, где скачки a_n и b_n упорядочены в порядке возрастания точек t_n и s_n соответственно. Заметим, что у функций $x(t)$, $y(t)$ число точек разрыва может не совпадать. Если функция $x(t)$ имеет m точек разрыва, а функция $y(t)$ имеет k точек разрыва и $m>k$, то будем считать, что $b_j=0$, $j=k+1,\dots,m$, и функционал $\rho(x,y)$ принимает вид

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{k}|a_n-b_n|+\sum_{n=k+1}^{m}|a_n|.$$

Функционал $\rho(x,y)$ на $L_{pc}[0,T]$ обладает следующими свойствами:

1) $\rho(x,x)=0$;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$,

поэтому он является уклонением функций $x(t)$ и $y(t)$ друг от друга [4]. Уклонение $\rho(x,y)$ не является расстоянием, т.к. из $\rho(x,y)=0$ не следует $x=y$ (совпадают величины скачков, но не расположение точек скачков).

Наряду с уклонением $\rho(x,y)$ введем в пространстве $L_{pc}[0,T]$ двухместный функционал $\sigma(x,y)=\sum_n|t_n-s_n|$, который также является уклонением для функций $x(t)$ и $y(t)$. В случае, если функция $x(t)$ имеет m точек разрыва, а функция $y(t)$ имеет k точек разрыва, $m>k$, считаем, что $s_j=t_j$, $j=k+1,\dots,m$.

Теорема. Функционал

$$d(\cdot,\cdot)=\rho(\cdot,\cdot)+\sigma(\cdot,\cdot) \tag{2}$$

является расстоянием в пространстве кусочно-постоянных функций $L_{pc}[0,T]$.

Доказательство. Выполнение свойств 2) и 3) очевидно, т.к. d является суммой уклонений. Если $d(x,y)=0$, то $\rho(x,y)=0$, $\sigma(x,y)=0$, и, следовательно, все точки разрывов и скачки совпадают, т.е. $x=y$.

Свойство сепарабельности

Теорема. Пространство $L_{pc}[0,T]$ с метрикой (2) является сепарабельным.

Доказательство. Рассмотрим подмножество $S\subset L_{pc}[0,T]$, которое состоит из всех кусочно-постоянных функций, имеющих рациональные значения скачков в рациональных точках разрыва. Подмножество S является счетным. Докажем, что S всюду плотно в $L_{pc}[0,T]$. Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Рассмотрим произвольную функцию $x(t)\in L_{pc}[0,T]$. Пусть функция $x(t)$ имеет N точек разрыва на $[0,T]$,

$$x(t)\Leftrightarrow\langle a_n,t_n;\ n=1,\dots,N\rangle.$$

Рассмотрим такое приближение функции $x(t)\in L_{pc}[0,T]$ функцией $y(t)\Leftrightarrow\langle b_n,s_n;\ b_n\in\mathbf{Q},\ s_n\in\mathbf{Q}\rangle$, чтобы выполнялись неравенства

$$|a_n-b_n|<\frac{\varepsilon}{2N},\quad |t_n-s_n|<\frac{\varepsilon}{2N}.$$

Тогда

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{N}|a_n-b_n|+\sum_{n=1}^{N}|t_n-s_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

т.е. функция $y(t)$ имеет также N рациональных скачков в рациональных точках разрыва, следовательно $y(t)\in S$. В силу произвольности ε и $x(t)\in L_{pc}[0,T]$ получаем, что S всюду плотно в $L_{pc}[0,T]$.

Пополнение пространства $L_{pc}[0,T]$

Очевидно, что пространство $L_{pc}[0,T]$ неполно.

Пример. Рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{l^2}, & если \quad t\in[1-\dfrac{1}{l},1-\dfrac{1}{l+1}), \quad l=1,...,n;\\[2mm] 0, & если \quad t\in[1-\dfrac{1}{n+1},1].\end{cases}$$

Данная последовательность является фундаментальной в смысле расстояния (2). Предельной функцией для этой последовательности является функция

$$x(t)=\frac{1}{l^2}, \quad если \quad t\in[1-\frac{1}{l},1-\frac{1}{l+1}), \quad l=1,2,...,\infty,$$

которая имеет счетное число точек разрыва на отрезке $[0,1]$.

Теорема. Пополнение пространства $L_{pc}[0,T]$ состоит из всех кусочно-постоянных функций, имеющих не более одной точки сгущения для последовательности точек разрыва. Если имеется точка сгущения последовательности точек разрыва, то не существует точек разрыва, превосходящих эту точку сгущения.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x_n(t)\}$ кусочно-постоянных функций, имеющих конечное число точек разрыва на $[0,T]$

$$x_n(t)\Leftrightarrow< a_l^{(n)},t_l^{(n)}\in[0,T]; \quad l=1,...,N_n>.$$

Эта последовательность является фундаментальной в смысле расстояния $d(\cdot,\cdot)=\rho+\sigma$, т.е.

$$d(x_n,x_m)=\sum_{l=1}^{\max(N_n,N_m)}|a_l^{(n)}-a_l^{(m)}|+\sum_{l=1}^{\min(N_n,N_m)}|t_l^{(n)}-t_l^{(m)}|\underset{n,m\to\infty}{\to}0.$$

Следовательно, $|a_l^{(n)}-a_l^{(m)}|\underset{n,m\to\infty}{\to}0$, $|t_l^{(n)}-t_l^{(m)}|\underset{n,m\to\infty}{\to}0$, т.е. числовые последовательности $\{a_l^{(n)}\}$, $\{t_l^{(n)}\}$ являются фундаментальными. Поэтому для всех $l\in\mathbf{N}$ существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}a_l^{(n)}=a_l, \quad \lim_{n\to\infty}t_l^{(n)}=t_l.$$

Рассмотрим функцию $x(t)$ с разрывами в точках t_l, в которых соответствующие скачки равны a_l, $l\in\mathbf{N}$. Для данного $\varepsilon>0$, для всех достаточно больших n, m выполняется неравенство

$$\sum_{l=1}^{\max(N_n,N_m)}|a_l^{(n)}-a_l^{(m)}|<\varepsilon.$$

Пусть $m>n$. В последнем неравенстве перейдем к пределу при $m\to\infty$,

$$\sum_{l=1}^{N_n}|a_l^{(n)}-a_l|+\sum_{N_n+1}^{\infty}|a_l|\le\varepsilon,$$

т.е. для функции $x(t)\Leftrightarrow< a_l,t_l;\ l\in\mathbf{N}>$ выполняется $\rho(x_n,x)\le\varepsilon$.

Аналогично, переходя к пределу при $m\to\infty$ в неравенстве $\sigma(x_n,x_m)=\sum_{l=1}^{\min(N_n,N_m)}|t_l^{(n)}-t_l^{(m)}|<\varepsilon$, получим $\sum_{l=1}^{N_n}|t_l^{(n)}-t_l|\le\varepsilon$, т.е. $\sigma(x_n,x)\le\varepsilon$.

Таким образом,

$$d(x_n(t),x(t))=\sum_l |a_l^{(n)}-a_l|+\sum_l |t_l^{(n)}-t_l| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \;\Rightarrow\; \exists \lim_{n\to\infty} x_n(t)=x(t).$$

Функция $x(t)$ может иметь либо конечное, либо счетное множество точек разрыва t_l на $[0,T]$. При этом $t_l \le t_{l+1}$, так как $t_l^{(n)} < t_{l+1}^{(n)}$.

Докажем, что последовательность $\{t_l\}$ при $l\to\infty$ может иметь не более одной точки сгущения t_*. Предположим, что точка сгущения t_* для последовательности $\{t_l\}$ удовлетворяет неравенству $t_j < t_* < t_k$, где $k>j$, $k-j<\infty$. Следовательно, в окрестности точки t_* может находиться только конечное число точек последовательности $\{t_l\}$, и поэтому в этом случае точка t_* не может быть точкой сгущения. Таким образом, вполне упорядоченная последовательность $\{t_l\}$ не имеет внутри себя точек сгущения. Следовательно, если t_* является точкой сгущения для последовательности $\{t_l\}$, то $t_i \underset{слева}{\to} t_*$, и не существует точек $t_k > t_*$. Поэтому точка сгущения t_* для последовательности $\{t_l\}$ единственна.

Непрерывность линейных операций

Пространство кусочно-постоянных функций $L_{pc}[0,T]$ является линейным. Определим в пространстве $L_{pc}[0,T]$ операции сложения функций и умножения функции на число по естественным правилам. Докажем непрерывность указанных операций. Рассмотрим произвольные функции $x(t),\ y(t)\in L_{pc}[0,T]$, $x(t)\Leftrightarrow < a_n, t_n;\ n\in \mathbf{N} >$, $y(t)\Leftrightarrow < b_n, s_n;\ n\in \mathbf{N} >$.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и подберем для него такое δ, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $d(x,y)<\delta \Rightarrow d(\lambda x,\lambda y)<\varepsilon$,

2) $d(x,0)<\delta,\ \ d(y,0)<\delta \Rightarrow d(x+y,0)<\varepsilon$.

1) Пусть $d(x,y)=\sum_n |a_n-b_n|+\sum_n |t_n-s_n|<\delta$.

Тогда $d(\lambda x,\lambda y)=\lambda\sum_n |a_n-b_n|+\sum_n |t_n-s_n|<\varepsilon=\begin{cases}\lambda\delta, & если\ \ \lambda>1,\\ \delta, & если\ \ \lambda<1.\end{cases}$

2) Пусть $d(x,0)=\sum_n |a_n|<\delta$, $d(y,0)=\sum_n |b_n|<\delta$.

Тогда $d(x+y,0)=\sum_n |a_n+b_n|\le \sum_n |a_n|+\sum_n |b_n|<2\delta=\varepsilon$.

Заметим, что пополненное пространство не является линейным и, следовательно, оно не является пространством Фреше.

В связи с необходимостью описания предельных точек слабокомпактных множеств σ-аддитивных мер, заданных на пространстве $L_{pc}[0,T]$, возникает задача описания предкомпактных множеств в этом пространстве. Прежде всего заметим, что пространство $L_{pc}{}^{(N)}[0,T]$ кусочно-постоянных функций на $[0,T]$, имеющих не более чем N точек разрыва, является компактным множеством в $L_{pc}[0,T]$, и при этом имеет место разложение

$$L_{pc}[0,T] = \bigcup_{N=0}^{\infty} L_{pc}^{(N)}[0,T].$$

Справедливо утверждение.

Теорема. Для того чтобы множество $M \subset L_{pc}[0,T]$ было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N \in \mathbf{N}$, для которого имеет место

$$\sup_{x \in M} \inf_{y \in L_{pc}^{(N)}[0,T]} d(x,y) < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость сформулированного условия. Допустим противное. Положим, что существует число $\varepsilon > 0$, для которого найдётся последовательность функций $x_N \in M$, $N \in \mathbf{N}$ такая, что имеет место

$$\inf_{y \in L_{pc}^{(N)}[0,T]} d(x_N, y) \geq \varepsilon.$$

Так как в каждом пространстве $L_{pc}^{(n)}[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$ может содержаться не более чем конечное множество членов указанной последовательности, то, прорежая последовательность $< x_N;\ N \in \mathbf{N} >$, можно добиться того, чтобы пространства $L_{pc}^{(n_N)}[0,T]$, $N \in \mathbf{N}$, каждое из которых является наиболее узким пространством среди пространств $L_{pc}^{(n)}[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$, содержащим функцию x_N, составляли расширяющуюся последовательность. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $L_{pc}^{n_1}[0,T] \subset L_{pc}^{n_2}[0,T] \subset \ldots$. Пусть $N' > N$ – настолько большой номер такой, что для него имеет место $x_N \in L_{pc}^{(n_{N'})}[0,T]$. Тогда по построению последовательности $< x_{N'};\ N \in \mathbf{N} >$ имеем $d(x_N, x_{N'}) \geq \varepsilon$. Но в этом случае из неё нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность, что противоречит предкомпактности M.

Доказательство достаточности условия теоремы очевидно.

Литература

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: ОНТИ, 1936. – 74 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 400 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1973. – Т. II. – 639 с.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Кн. третья. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. – М.: Наука, 1975. – 408 с.

THE SPACE OF PIECE-WISE CONSTANT FUNCTIONS

T.V. Karabutova

Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia
e-mail: TKarabutova@bsu.edu.ru

The metric space $L_{pc}[0,T]$ of piece-wise constant functions on $[0,T]$ is introduced. Each function of the space has the finite set of discontinuity points. The metrics d of the space guarantees the separability of it. The d completion is described and the pre-compactness criterion of sets $M \subset L_{pc}[0,T]$ is given.

Key words: piece-wise constant functions, metric space, space completion, pre-compact sets, separability.