УДК 511.33.

ЧИСЛО РАЗБИЕНИЙ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Д.Б. Демидов

Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14
Demidov1984@email.ru

В данной статье представлена асимптотическая формула для числа разбиений специального типа натурального числа n.

Ключевые слова: разбиение натурального числа, число разбиений, ряд Дирихле, обобщенная дзета-функция, формула Меллина.

Введение

Разбиением n называют представление n в виде произвольного числа положительных целых частей.

Обозначим *число разбиений* числа n через $p(n)$, например, $p(1)=1$ и $p(4)=5$. Удобно определить $p(0)=1$.

Значения функции $p(n)$ давно интересовали математиков. Английские и индийские вычислители занимались их подсчётом, который прост для малых n, но, как легко понять, быстро усложняется с ростом n. Харди вместе с Рамануджаном получили асимптотическую формулу вида [3, с. 191]

$$p(n)=\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2(n-1/24)}{3}}}}{4\sqrt{3}(n-1/24)}+O\left(\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2(n-1/24)}{3}}}}{(n-1/24)^{3/2}}\right),\quad n\geq 1.$$

В данной статье выводится асимптотическая формула для функции, которая задается следующим образом.

Пусть $H_{k,a}$ – множество всех положительных целых, сравнимых с a по модулю k ($1\leq a\leq k$). Запись $\langle\langle H_{k,a}\rangle\rangle$ будет обозначать множество разбиений, все части которых лежат в $H_{k,a}$.

Функция $p(\langle\langle H_{k,a}\rangle\rangle,n)$ – число разбиений n, все части которых сравнимы с a по модулю k ($1\leq a\leq k$). Основным результатом является следующая теорема.

<u>*Теорема.*</u> При $n\to\infty$, $k<\left(4\pi^{1-\varepsilon}\right)^{-2/(1+\varepsilon)}(6n)^{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}$, $0<\varepsilon<1$,

$$p(\langle\langle H_{k,a}\rangle\rangle,n)=Cn^{k_1}\exp\left\{2n^{1/2}\left(\frac{\pi^2}{6k}\right)^{1/2}\right\}\times\left(1+O(n^{-k_2})\right),$$

где

$$C=e^{D'(0)}(4\pi)^{-1/2}\left(\frac{\pi^2}{6k}\right)^{(1-2D(0))/4},$$

$$k_1=\frac{D(0)-3/2}{2},$$

$$k_2 = \frac{1}{2}\min\left(C_0 - \frac{\delta}{4}, \frac{1}{2} - \delta\right),\ 0 < C_0 < 1,\ \delta > 0,$$

$$D(s) = k^{-s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n + \frac{a}{k}\right)^{-s}.$$

Основная часть

Будем рассматривать бесконечное произведение

$$f(q) = \prod_{n\in H}(1-q^n)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(\langle\langle H_{k,a}\rangle\rangle, n)q^n,$$

где $q = e^{-\tau}$, $\mathrm{Re}\,\tau > 0$.

<u>*Определение 1.*</u> Пусть h – вещественное число, $0 < h \le 1$; при $s = \sigma + it, \sigma > 1$, функция $\varsigma(s,h)$ задается равенством

$$\varsigma(s,h) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+h)^{-s}.$$

Для функции $\varsigma(s,h)$ справедлива оценка:

$$|\zeta(s,h)| \le A(\delta)|t|^{m+1+\delta}$$

при $0 < \delta < 1$, $A(\delta)$ – положительная постоянная, $-m-\delta \le \sigma \le -m+\delta$ и $|t| \ge 1$, $m = 1,2,\ldots$ [5, с. 270].

<u>*Определение 2.*</u> Функция $D(s)$ – ряд Дирихле вида:

$$D(s) = k^{-s}\varsigma(s, a/k).$$

Из определений 1 и 2 следует, что функция $D(s)$ – аналитична в области $\mathrm{Re}\,s > -C_0$ ($0 < C_0 < 1$) и имеет полюс порядка 1 при $s = 1$ с вычетом $1/k$ [1, с. 24].

<u>*Определение 3.*</u> Функция $g(\tau)$ – определяется равенством:

$$g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\tau n} = e^{-a\tau}\left(1 - e^{-k\tau}\right)^{-1},$$

где

$$a_n = \begin{cases} 1, \textit{ если } n \equiv a (\mathrm{mod}\, k), \\ 0, \textit{ если } (n-a) \textit{ не делится на } k. \end{cases}$$

<u>*Лемма 1.*</u> Пусть $\tau = y + 2\pi ix$ (где x и y – действительные), $|\arg\tau| > \pi/4$, $|x| \le 1/2$, то выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}(g(\tau)) - g(y) \le -1/(4ky)$$

для достаточно малых y.

Доказательство. Из условия леммы $|\arg\tau| > \pi/4$, $|x| \le 1/2$ следует, что $\frac{y}{2\pi} < |x| \le 1/2$. Воспользовавшись определением 3, получим

$$\mathrm{Re}(g(\tau)) = \mathrm{Re}\left(e^{-a\tau}\left(1 - e^{-k\tau}\right)^{-1}\right)$$

$$g(y) = e^{-ay}\left(1 - e^{-ky}\right)^{-1}.$$

По условию леммы $\tau = y + 2\pi ix$, тогда

$$\mathrm{Re}(g(\tau)) = e^{-ay}\frac{\cos(2\pi ax) - e^{-ky}\cos(2\pi(a-k)x)}{1 - 2e^{-ky}\cos(2\pi kx) + e^{-2ky}}.$$

Рассмотрим теперь разность

$$\operatorname{Re}(g(\tau)) - g(y) = e^{-ay}\left(\frac{\cos(2\pi\, ax) - e^{-ky}\cos(2\pi\,(a-k)x)}{1-2e^{-ky}\cos(2\pi\, kx)+e^{-2ky}} - \frac{1}{1-e^{-ky}}\right).$$

Используя неравенство $\frac{y}{2\pi} < |x| \le 1/2$ и раскладывая в ряд функции из последней формулы при $y \to 0$, имеем

$$\operatorname{Re}(g(\tau)) - g(y) = -\frac{1}{2ky} + O(1).$$

Тем самым получаем утверждение леммы.

<u>*Лемма 2.*</u> Пусть $\tau = y + 2\pi i x$, $|\arg\tau| \le \pi/4$, $|x| \le 1/2$, то

$$f(\tau) = \exp\left\{\frac{\pi^2}{6k}\tau^{-1} + D'(0) - D(0)\log\tau + O\left(y^{C_0}\right)\right\}$$

равномерно по x при $y \to 0$.

Доказательство. Заметим, что

$$\log f(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \log(1-e^{-j\tau})^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-jk\tau}. \tag{1}$$

Напомним теперь формулу Меллина:

$$e^{-\tau} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tau^{-s}\Gamma(s)ds, \quad \operatorname{Re}\tau > 0, \quad \sigma > 0. \tag{2}$$

Применяя формулу (2) к показательной функции из формулы (1), видим, что

$$\log f(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\tau^{-s}\Gamma(s)D(s)\varsigma(s+1)ds; \tag{3}$$

перемена суммирования и интегрирования обеспечивается абсолютной сходимостью.

Наша цель теперь состоит в том, чтобы перенести прямую интегрирования с прямой $\operatorname{Re}s = 2$ на прямую $\operatorname{Re}s = -C_0$ ($0 < C_0 < 1$). Прежде всего отметим, что подынтегральное выражение в формуле (3) имеет полюс первого порядка при $s = 1$ с вычетом $\pi^2/(6k\tau)$ и полюс второго порядка при $s = 0$. В окрестности $s = 0$

$$\tau^{-s}\Gamma(s)\varsigma(s+1)D(s) = \frac{1}{s^2} + (D'(0) - D(0)\log\tau)\frac{1}{s} + \ldots;$$

поэтому вычет подынтегрального выражения в (3) при $s = 0$ равен $(D'(0) - D(0)\log\tau)$. Следовательно,

$$\log f(\tau) = \frac{\pi^2}{6k\tau} + D'(0) - D(0)\log\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_0-i\infty}^{-C_0+i\infty}\tau^{-s}\Gamma(s)D(s)\varsigma(s+1)ds; \tag{4}$$

перенос прямой интегрирования, осуществлённый в переходе от (3) к (4), допустим, поскольку для $|\arg\tau| \le \pi/4$ видим, что

$$\left|\tau^{-s}\right| = |\tau|^{C_0}\exp\{|t|\arg\tau\} \le \exp\{\pi|t|/4\}, \quad \delta < 1,$$

а для $\operatorname{Re}s \ge -C_0 > 0$ из оценки дзета-функции Гурвица следует, что

$$D(s) = O(|t|^{1+C_0}).$$

Из теоремы Стирлинга

$$\Gamma(s) = O\left(\exp\left\{-\frac{\pi}{2}|t|\right\}|t|^{C_1}\right)$$

при $t \to \infty$ [1, с. 329].

Наконец, заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-C_0-i\infty}^{-C_0-i\infty}\tau^{-s}\Gamma(s)\varsigma(s+1)D(s)ds = O\left(y^{C_0}\int_{-C_0-i\infty}^{-C_0-i\infty}t^{C_4}e^{-\frac{\pi t}{4}}dt\right) = O(y^{C_0})$$

(поскольку $|\arg\tau| \le \pi/4$ влечет, что $|\tau| \le \sqrt{2}y$). Тем самым лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $\tau = y + 2\pi ix$, тогда существует такое положительное ε_1, что

$$f(y+2\pi ix) = O\left(\exp\left\{\frac{\pi^2}{6k}y^{-1} - C_3y^{-\varepsilon_1}\right\}\right)$$

равномерно по x при $y^\beta \le |x| \le 1/2$, $y \to 0$, где

$$\beta = \frac{3}{2} - \frac{\delta}{4}, 0 < \delta < \frac{2}{3},$$

а C_3 – фиксированное действительное число.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $y^\beta \le |x| \le \frac{y}{2\pi}$, тогда

$$tg|\arg\tau| = \frac{2\pi|x|}{y} \le 1 \text{ или } |\arg\tau| \le \frac{\pi}{4}.$$

В силу такого выбора x мы можем воспользоваться леммой 2, из которой получим

$$|\log f(y+2\pi ix)| \le \frac{\pi^2}{6k}|\tau|^{-1} + C_4|\log y|. \tag{5}$$

Последняя оценка справедлива в силу того, что $|\log y|$ мажорирует любую неотрицательную степень y при $y \to 0$.

Вспоминая, что $|\tau| = (y^2 + 4\pi^2x^2)^{1/2}$, из формулы (5) видим, что

$$\log|f(y+2\pi ix)| \le \frac{\pi^2}{6k}y^{-1} + \frac{\pi^2}{6k}y^{-1}\left(\left(1+4\pi^2\frac{x^2}{y^2}\right)^{-1/2} - 1\right) + C_4|\log y|.$$

В силу того, что при $Y \to +0$ $(1+AY)^{-1/2} \sim$ -AY/2, а $|\log y|$ мажорируется любой отрицательной степенью y при y, близком к 0, тогда имеем

$$\log|f(y+2\pi ix)| \le \frac{\pi^2}{6k}y^{-1} - C_5y^{-3+2\beta}.$$

По условию леммы

$$-3+2\beta = -\frac{\delta}{2} \le -\varepsilon_1.$$

Поэтому в случае 1

$$\log|f(y+2\pi ix)| \le \frac{\pi^2}{6k}y^{-1} - C_3y^{-\varepsilon_1},$$

что эквивалентно утверждению леммы.

2) Пусть $\frac{y}{2\pi} < |x| \le \frac{1}{2}$, из формулы (1) видно, что

$$\log|f(y+2\pi ix)| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty}a_je^{-jky}\cos(2\pi kjx).$$

Далее рассмотрим разность

$$\log|f(y+2\pi ix)| - \mathrm{Re}(g(\tau)) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty}a_je^{-jky}\cos(2\pi kjx) \le \log f(y) - g(y),$$

поскольку все a_i неотрицательны. Теперь мы можем воспользоваться леммами 1 и 2, из которых видно, что

$$\log|f(y+2\pi ix)| \le \log f(y) + \mathrm{Re}(g(\tau)) - g(y) \le \frac{\pi^2}{6k}y^{-1} - C_3 y^{-\varepsilon_1}.$$

Тем самым лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы. Из интегральной теоремы Коши следует формула

$$p(\langle\langle H_{k,a}\rangle\rangle, n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi i} f(\tau)e^{n\tau}d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} f(y+2\pi ix)e^{n(y+2\pi ix)}dx. \qquad (6)$$

Мы хотим применить метод перевала для оценки этого интеграла. Поскольку максимум абсолютной величины подынтегрального выражения достигается при $x=0$ и поскольку при $x=0$, из леммы 2 и 3 следует, что это выражение хорошо аппроксимируется функцией

$$\exp\left\{\left(\frac{\pi^2}{6k}\right)y^{-1} + ny\right\},$$

и метод перевала требует минимизировать это выражение, т.е. мы должны потребовать, чтобы y был выбран так, чтобы

$$\frac{d}{dy}\exp\left\{\left(\frac{\pi^2}{6k}\right)y^{-1} + ny\right\} = 0.$$

Поэтому полагаем

$$y = n^{-1/2}\left(\frac{\pi^2}{6k}\right)^{1/2}.$$

Для упрощения обозначений положим

$$m = ny = n^{1/2}\left(\frac{\pi^2}{6k}\right)^{1/2}. \qquad (7)$$

Представим интеграл из формулы (6) в виде трех интегралов следующего вида:

$$p(\langle\langle H_{k,a}\rangle\rangle, n) = e^m\left(\int_{-y^\beta}^{y^\beta} f(y+2\pi ix)e^{2\pi inx}dx + \int_{-1/2}^{-y^\beta} f(y+2\pi ix)e^{2\pi inx}dx + \int_{y^\beta}^{1/2} f(y+2\pi ix)e^{2\pi inx}dx\right), \qquad (8)$$

где $\beta = \frac{3}{2} - \frac{\delta}{4}, 0 < \delta < \frac{2}{3}$.

Введем обозначение:

$$R_1 = \int_{-1/2}^{-y^\beta} f(y+2\pi ix)e^{2\pi inx}dx + \int_{y^\beta}^{1/2} f(y+2\pi ix)e^{2\pi inx}dx.$$

Из (8) видим, что

$$p(\langle\langle H_{k,a}\rangle\rangle, n) = e^m\int_{-y^\beta}^{y^\beta} f(y+2\pi ix)e^{2\pi inx}dx + e^m R_1. \qquad (9)$$

Для оценки R_1 воспользуемся леммой 3, из которой имеем

$$R_1 = O\left(\exp\left\{\frac{\pi^2}{6k}\left(\frac{m}{n}\right)^{-1} - C_3\left(\frac{m}{n}\right)^{-\varepsilon_1}\right\}\right)$$

при $n \to \infty$ (т.е. $y = m/n \to 0$). Поэтому

$$e^m R_1 = O\left(\exp\left\{\frac{3}{2}m - C_7 m^{\varepsilon_2}\right\}\right) \tag{10}$$

при $n \to \infty$.

Соотношение (10) обеспечивает нужную оценку остатка в формуле (8). Мы теперь должны подсчитать основной интеграл. Выберем $n \ge n_2 \ge n_1$, где n_2 достаточно велико, так что $2\pi(m/n)^{\beta-1} \le 1$ (это вполне допустимо, поскольку $\beta > 1$ и $m/n \underset{n\to\infty}{\to} 0$). Теперь по лемме 2 справедлива оценка

$$p(\langle\langle H_{k,a}\rangle\rangle, n) = e^m \int_{-y^\beta}^{y^\beta} \exp\left\{\frac{\pi^2}{6k}\tau^{-1} + D'(0) - D(0)\log\tau + O\left(y^{C_0}\right)\right\} e^{2\pi inx}dx + e^m R_1.$$

Воспользовавшись формулой (7), имеем

$$p(\langle\langle H_{k,a}\rangle\rangle, n) = \exp\{2m + D'(0)\}\cdot$$

$$\cdot \int_{-(m/n)^\beta}^{(m/n)^\beta} \exp\left\{m\left[\left(1 + \frac{2\pi inx}{m}\right)^{-1} - 1\right] + 2\pi inx - D(0)\log\left(\frac{m}{n} + 2\pi ix\right) + O(m^{-C_0/2})\right\}dx + e^m R_1.$$

Отметим, что выбор n_1 гарантирует на всем интервале интегрирования $|x| \le 1/2$, а выбор n_2 – что $|\arg\tau| \le \pi/4$.

Сделав в интеграле замену $2\pi x = (m/n)w$, получаем

$$p(\langle\langle H_{k,a}\rangle\rangle, n) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{2m + D'(0) - (D(0)-1)\log\frac{m}{n}\right\}I + e^m R_1,$$

где

$$I = \int_{-C_8 m^{(1-\beta)}}^{C_8 m^{(1-\beta)}} e^{\varphi(w)}dw$$

и

$$\varphi(w) = m\left(\frac{1}{1+iw} - 1 + iw\right) - D(0)\log(1+iw) + O(m^{\ C_0})$$

при $m \to \infty$.

Наша задача теперь свелась к получению асимптотического выражения для интеграла I. Во-первых,

$$I = \int_{-C_8 m^{(1-\beta)}}^{C_8 m^{(1-\beta)}} \exp\left\{-mw^2\right\}dw + R_2, \tag{11}$$

где

$$R_2 = \int_{-C_8 m^{(1-\beta)}}^{C_9 m^{(1-\beta)}} \exp(-mw^2)\left(\exp(\psi(w)) - 1\right)dw, \tag{12}$$

$$\psi(w) = m\left(\frac{1}{1+iw} - 1 + iw + w^2\right) - D(0)\log(1+iw) + O(m^{-C_0})$$

при $m \to \infty$. Для $n \ge n_3 \ge n_2$ выберем n_3 достаточно большим, чтобы неравенство $|w| < 1$ выполнялось на всем интервале интегрирования. Следовательно,

$$m\left(\frac{1}{1+iw} - 1 + iw + w^2\right) = m\left(1 - iw - w^2 - (iw)^3 - 1 + iw + w^2\right) = O(m|w|^3) = O(m^{4-3\beta}),$$

в то время как

$$\log(1+iw) = O(|w|) = O\left(m^{1-\beta}\right).$$

Стало быть, при $m \to \infty$

$$\exp(\psi(w))-1=O\left(|\psi(w)|\right)=O\left(m^{4-3\beta}+m^{1-\beta}+m^{-C_0}\right)=O(m^{-\mu}),$$

где в силу выбора β

$$\mu=\min\left(C_0,\frac{1}{2}-\frac{3\delta}{4}\right).$$

Поскольку длина интервала интегрирования в (12) есть $O(m^{1-\beta})$, видим, что при $m\to\infty$

$$R_2=O(m^{\eta}), \tag{13}$$

где $\eta=\min(C_0+1/2-\delta/4,1-\delta)$.

Итак, для интеграла из (11) имеем

$$\int\limits_{-C_8m^{(1-\beta)}}^{C_8m^{(1-\beta)}}\exp\left\{-mw^2\right\}dw=m^{-1/2}\int\limits_{-C_9m^{\delta/4}}^{C_9m^{\delta/4}}\exp\left\{-z^2\right\}dz,=\left(\frac{\pi}{m}\right)^{1/2}+O\left(m^{-1/2}\exp\left(-C_{10}m^{\delta/2}\right)\right)$$

Подставляя оценки в формулу (11), получим

$$I=\left(\frac{\pi}{m}\right)^{1/2}\left(1+O\left(m^{-\nu}\right)\right), \tag{14}$$

где $\nu=\min(C_0-\delta/4,1/2-\delta)$.

Наконец, согласно формулам (9), (10), (13) и (14), видим, что при $m\to\infty$

$$p(\langle\langle H_{k,a}\rangle\rangle,n)=\exp\left\{2m+D'(0)-(D(0)-1)\log\frac{m}{n}\right\}\left(\sqrt{2}\pi\, m(1+O(m^{-\nu}))\right)$$

Используя формулу (7) для замены m функцией от n, получим утверждение теоремы.

Заключение

Основным результатом данной статьи являлось получение оценки для числа представлений натурального числа n в виде суммы положительных целых чисел, сравнимых с a по модулю k.

Литература

1. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана. – М.: Физматлит, 1994. – 376с.

2. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983. – 239 с.

3. Чандрасекхаран К. Арифметические функции. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

4. Эндрюс Г. Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

5. Apostol M. Introduction to Analytic Number Theory. – New York; Heidelberg; Berlin, 1976. – 338 c.

ON THE NUMBER OF PARTITIONS OF THE NATURAL NUMBER WITH SOME SPECIAL PROPERTIES

D.B. Demidov

Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia
Demidov1984@email.ru

In this paper is obtain the asymptotic formula for the number of partitions a special type of the natural number n.

Key words: Partition of the natural number, the number of partitions, Dirichlet series, the generalized zeta-function, formula Mellina.