

УДК 539.18

**РАМКИ ПРИМЕНИМОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА
В ОПИСАНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕНТГЕНОВСКОГО
ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ
В КРИСТАЛЛАХ**

С.В. Блажевич, А.В. Носков

Белгородский государственный университет
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: blazhevich@bsu.edu.ru

Рассматривается параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) релятивистского электрона, пересекающего монокристаллическую пластинку в геометрии процесса рассеяния Лауэ в случае асимметричного и симметричного (как частный случай) отражения поля частицы относительно поверхности кристаллической пластинки. На основе двухволнового приближения динамической теории дифракции получены выражения, описывающие спектрально-угловую плотность ПРИ. Проведен сравнительный анализ формул параметрического рентгеновского излучения в динамическом и кинематическом приближении. На основе полученного выражения для угловой плотности ПРИ проведена интерпретация результатов эксперимента по ПРИ релятивистских электронов на Майнцком микротроне МАМІ. Показано, что в эксперименте проявляется динамический эффект аномального фотопоглощения (эффект Бормана) в ПРИ.

Ключевые слова: параметрическое рентгеновское излучение, кристаллическая пластинка, рассеяние Лауэ.

1. Введение

Когда быстрая заряженная частица пересекает монокристалл, ее кулоновское поле рассеивается на системе параллельных атомных плоскостей кристалла, порождая параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) [1-3].

В настоящее время существует два подхода к описанию ПРИ: кинематический [4,5] и динамический [2,3,6]. Необходимо отметить, что кинематический подход учитывает взаимодействие каждого атома только с первичной, или преломленной волной в кристалле. В этом подходе, в отличие от динамического, пренебрегают взаимодействием атома с тем волновым полем, которое создается в кристалле совокупным рассеянием на всех других атомах, то есть не учитывается многоволновое рассеяние, в частности, взаимодействие элементарных волн с преломленной.

В последнее время существенный прогресс в описании когерентного излучения релятивистских электронов в кристаллах достигнут в динамическом подходе [7-11]. Ярким подтверждением объективности и целесообразности динамической теории в ПРИ является экспериментальное наблюдение рефлекса параметрического рентгеновского излучения вдоль скорости релятивистского электрона [12], который не предсказывает кинематическая теория.

Также необходимо отметить заметное влияние асимметрии отражения поля относительно поверхности кристаллической пластинки на спектрально-угловую плотность излучения. В кинематической теории асимметрия влияет только на соотношение пути заряженной частицы в кристаллической пластинке и пути излученного фотона. Динамическая теория ПРИ релятивистских электронов предсказывает также существенное влияние

асимметрии отражения на сам процесс формирования излучения, что приводит к изменению спектра ПРИ [10].

Таким образом, задача о рамках применимости кинематической теории ПРИ релятивистских электронов в кристаллах, решаемая в данной работе, является актуальной.

В настоящей работе на основе двухволнового приближения динамической теории дифракции [13] получено выражение, описывающее спектрально-угловую плотность ПРИ, в случае асимметричного относительно поверхности кристаллической пластинки отражения поля частицы в кристалле. Проводится сравнительный анализ формул ПРИ в динамическом и кинематическом подходе как для случая тонкого, так и для толстого кристалла с целью установления критериев, определяющих рамки применимости формул кинематической теории.

2. Спектрально-угловое распределение параметрического рентгеновского излучения в динамическом приближении

Рассмотрим излучение быстрой заряженной частицы пересекающей монокристаллическую пластинку с постоянной скоростью \mathbf{V} (рис. 1). При этом будем рассматривать уравнения для Фурье-образа электромагнитного поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int dt d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (1)$$

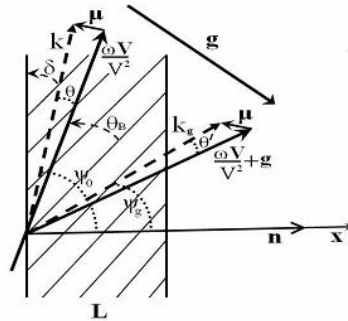


Рис. 1. Геометрия процесса излучения: θ' – угол излучения, θ_B – угол Брэгга (угол между скоростью электрона \mathbf{V} и атомными плоскостями), δ – угол между поверхностью и рассматриваемыми атомными плоскостями кристалла, \mathbf{k} и $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$ – волновые векторы падающего и дифрагированного фотона.

Поскольку поле релятивистской частицы с хорошей степенью точности можно считать поперечным, то падающая $\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)$ и дифрагированная $\mathbf{E}_g(\mathbf{k}, \omega)$ электромагнитные волны

определяются двумя амплитудами с разными значениями поперечной поляризации

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) &= E_0^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(1)} + E_0^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(2)}, \\ \mathbf{E}_g(\mathbf{k}, \omega) &= E_g^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_1^{(1)} + E_g^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_1^{(2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Единичные векторы поляризации $\mathbf{e}_0^{(1)}$, $\mathbf{e}_0^{(2)}$, $\mathbf{e}_1^{(1)}$ и $\mathbf{e}_1^{(2)}$ выбираются такими, что $\mathbf{e}_0^{(1)}$ и $\mathbf{e}_0^{(2)}$ перпендикулярны вектору \mathbf{k} , а векторы $\mathbf{e}_1^{(1)}$ и $\mathbf{e}_1^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. При этом векторы $\mathbf{e}_0^{(2)}$, $\mathbf{e}_1^{(2)}$ лежат в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g (π -поляризация), а векторы $\mathbf{e}_0^{(1)}$ и $\mathbf{e}_1^{(1)}$ перпендикулярны ей (σ -поляризация); \mathbf{g} – вектор обратной решетки, определяющий систему отражающих атомных плоскостей кристалла.

Система уравнений для Фурье-образа электромагнитного поля в двухволновом приближении динамической теории дифракции имеет следующий вид [14]:

$$\begin{cases} (\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)E_0^{(s)} + \omega^2\chi_{-g}C^{(s)}E_g^{(s)} = 8\pi^2 i e \omega \theta V P^{(s)} \delta(\omega - \mathbf{kV}), \\ \omega^2\chi_g C^{(s)}E_0^{(s)} + (\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2)E_g^{(s)} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где χ_g , χ_{-g} – коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости кристалла по векторам обратной решетки \mathbf{g} :

$$\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} (\chi'_{\mathbf{g}}(\omega) + i\chi''_{\mathbf{g}}(\omega)) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}). \quad (4)$$

Будем рассматривать кристалл с центральной симметрией ($\chi_g = \chi_{-g}$). В выражении (4) величины χ'_g и χ''_g определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi'_g &= \chi'_0 (F(\mathbf{g})/Z) (S(\mathbf{g})/N_0) \exp\left(-\frac{1}{2}g^2 u_\tau^2\right), \\ \chi''_g &= \chi''_0 \exp\left(-\frac{1}{2}g^2 u_\tau^2\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\chi_0 = \chi'_0 + i\chi''_0$ – средняя диэлектрическая восприимчивость, $F(\mathbf{g})$ – форм-фактор атома, содержащего Z электронов, $S(\mathbf{g})$ – структурный фактор элементарной ячейки, содержащей N_0 атомов, u_τ – среднеквадратичная амплитуда тепловых колебаний атомов кристалла. В работе рассматривается рентгеновская область частот ($\chi'_g < 0$, $\chi''_g < 0$).

Величины $C^{(s)}$ и $P^{(s)}$ в системе (3) определены следующим образом:

$$\begin{aligned} C^{(s)} &= \mathbf{e}_0^{(s)} \cdot \mathbf{e}_1^{(s)}, \quad C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = \cos 2\theta_B, \\ P^{(s)} &= \mathbf{e}_0^{(s)} \cdot (\boldsymbol{\mu}/\mu), \quad P^{(1)} = \sin \varphi, \quad P^{(2)} = \cos \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{k} - \omega\mathbf{V}/V^2$ – составляющая импульса виртуального фотона, перпендикулярная скорости частицы \mathbf{V} ($\mu = \omega\theta/|\mathbf{V}|$, где $\theta \ll 1$ – угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{V}), θ_B – угол между скоростью электрона и системой кристаллографических плоскостей (угол Брэгга), φ – азимутальный угол излучения, отсчитывается от плоскости, образованной векторами \mathbf{V} и \mathbf{g} , величина вектора обратной решетки определяется выражением $g = 2\omega_B \sin \theta_B/V$,

ω_B – частота Брэгга. Угол между вектором $\omega\mathbf{V}/V^2$ и волновым вектором падающей волны \mathbf{k} обозначен θ , а угол между вектором $\omega\mathbf{V}/V^2 + \mathbf{g}$ и волновым вектором дифрагированной волны \mathbf{k}_g обозначен θ' . Система уравнений (3) при параметре $s = 1$ описывает поля σ -поляризованные, а при $s = 2\pi$ -поляризованные.

Решим следующее из системы (3) дисперсионное уравнение для рентгеновских волн в кристалле

$$(\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)(\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2) - \omega^4\chi_{-g}\chi_g C^{(s)^2} = 0 \quad (7)$$

стандартными методами динамической теории [13].

Будем искать проекции волновых векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g на ось X, совпадающую с вектором \mathbf{n} (см. рис. 1) в виде

$$k_x = \omega \cos \psi_0 + \frac{\omega\chi_0}{2 \cos \psi_0} + \frac{\lambda_0}{\cos \psi_0}, \quad k_{gx} = \omega \cos \psi_g + \frac{\omega\chi_0}{2 \cos \psi_g} + \frac{\lambda_g}{\cos \psi_g}. \quad (8)$$

При этом будем использовать известное соотношение, связывающее динамические добавки λ_0 и λ_g для рентгеновских волн [13]:

$$\lambda_g = \frac{\omega\beta}{2} + \lambda_0 \frac{\gamma_g}{\gamma_0}, \quad (9)$$

где $\beta = \alpha - \chi_0(1 - \gamma_g/\gamma_0)$, $\alpha = \omega^{-2}(k_g^2 - k^2)$, $\gamma_0 = \cos \psi_0$, $\gamma_g = \cos \psi_g$, ψ_0 – угол между волновым вектором падающей волны \mathbf{k} и вектором нормали к поверхности пластинки \mathbf{n} , ψ_g – угол между волновым вектором \mathbf{k}_g и вектором \mathbf{n} (см. рис. 1). Комплексные векторы \mathbf{k} и \mathbf{k}_g пропорциональны вещественному единичному вектору с коэффициентами пропорциональности:

$$k = \omega\sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_0, \quad k_g = \omega\sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_g. \quad (10)$$

Подставим (8) в (7), учитывая (9) и $k_{||} \approx \omega \sin \psi_0$, $k_{g||} \approx \omega \sin \psi_g$, получим выражения для динамических добавок:

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega}{4} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)^2} \frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right), \quad (11)$$

$$\lambda_0^{(1,2)} = \omega \frac{\gamma_0}{4\gamma_g} \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)^2} \frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right).$$

Так как $|\lambda_0| \ll \omega$, $|\lambda_g| \ll \omega$, то можно показать, что $\theta \approx \theta'$ (см. рис. 1), и поэтому в дальнейшем угол θ' будем обозначать θ .

Решение системы уравнений (3) для дифрагированного поля в кристалле представим в виде

$$E_g^{(s)cr} = -\frac{8\pi^2 i e V \theta P^{(s)}}{\omega} \cdot \frac{\omega^2 \chi_g C^{(s)}}{4(\gamma_0^2/\gamma_g^2)(\lambda_g - \lambda_g^{(1)})(\lambda_g - \lambda_g^{(2)})} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*) + \quad (12)$$

$$+ E_g^{(s)(1)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(1)}) + E_g^{(s)(2)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(2)}),$$

где $\lambda_0^* = \omega(\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_0)/2$, $\lambda_g^* = \omega\beta/2 + (\gamma_g/\gamma_0)\lambda_0^*$, $\gamma = \sqrt{1 - V^2}$ – Лоренц-фактор частицы, $E_g^{(s)(1)}$ и $E_g^{(s)(2)}$ – свободные дифрагированные поля в кристалле.

Для поля в вакууме перед кристаллом решение системы (3) имеет вид

$$E_0^{(s)vac} = \frac{8\pi^2 i \epsilon V \theta P^{(s)}}{\omega} \cdot \left[\frac{\gamma_0}{\gamma_g} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_g} \left(\beta - \frac{2}{\omega} \lambda_g \right) - \chi_0 \right) \right]^{-1} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*). \quad (13)$$

В вакууме дифрагированное поле позади кристалла имеет вид

$$E_g^{(s)vac} = E_g^{(s)Rad} \delta \left(\lambda_g + \frac{\omega \chi_0}{2} \right), \quad (14)$$

где $E_g^{(s)Rad}$ – амплитуда поля когерентного излучения вблизи направления Брэгга.

Из второго уравнения системы (3) следует выражение, связывающее дифрагированное и падающее поля в кристалле:

$$E_0^{(s)cr} = \frac{2\omega \lambda_g}{\omega^2 \chi_g C^{(s)}} E_g^{(s)cr}. \quad (15)$$

Для определения амплитуды дифрагированного $E_g^{(s)Rad}$ поля воспользуемся обычными граничными условиями на входной и выходной поверхностях кристаллической пластинки:

$$\begin{aligned} \int E_0^{(s)vac} d\lambda_g &= \int E_0^{(s)cr} d\lambda_g, \quad \int E_g^{(s)cr} d\lambda_g = 0, \\ \int E_g^{(s)cr} e^{i(\lambda_g/\gamma_g)L} d\lambda_g &= \int E_g^{(s)vac} e^{i(\lambda_g/\gamma_g)L} d\lambda_g. \end{aligned} \quad (16)$$

Получим выражение для поля излучения:

$$\begin{aligned} E_g^{(s)Rad} &= \frac{8\pi^2 i \epsilon V \theta P^{(s)}}{\omega} \left(\frac{\omega^2 \chi_g C^{(s)} e^{i(\omega \chi_0/2 + \lambda_g^*)(L/\gamma_g)}}{2\omega(\gamma_0/\gamma_g) (\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^{(2)})} \right) \times \\ &\times \left[\left(\frac{\omega}{2(\gamma_0/\gamma_g) (\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)})} - \frac{\omega}{\chi_0 \omega + 2\lambda_0^*} \right) \left(1 - \exp \left[-i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}}{\gamma_g} L \right] \right) - \right. \\ &\left. - \left(\frac{\omega}{2(\gamma_0/\gamma_g) (\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)})} - \frac{\omega}{\chi_0 \omega + 2\lambda_0^*} \right) \left(1 - \exp \left[-i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)}}{\gamma_g} L \right] \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Слагаемые в квадратных скобках выражения (17) соответствуют двум различным ветвям возбуждаемых рентгеновских волн в кристалле.

Для дальнейшего анализа излучения динамические добавки $\lambda_g^{(1,2)}$ (11) представим в виде

$$\begin{aligned} \lambda_g^{(1,2)} &= \frac{\omega |\chi_g'| C^{(s)}}{2} \left(\xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2} \pm \right. \\ &\left. \pm \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon - 2i\rho^{(s)} \left(\frac{(1-\varepsilon)}{2} \xi^{(s)} + \kappa^{(s)} \varepsilon \right) - \rho^{(s)2} \left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{4} + \kappa^{(s)2} \varepsilon \right)} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 - \varepsilon}{2\nu^{(s)}},$$

$$\eta^{(s)}(\omega) = \frac{\alpha}{2|\chi'_{\mathbf{g}}|C^{(s)}} = \frac{2 \sin^2 \theta_B}{V^2 |\chi'_{\mathbf{g}}| C^{(s)}} \left(1 - \frac{\omega(1 - \theta \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta_B)}{\omega_B} \right),$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma_{\mathbf{g}}}{\gamma_0} = \frac{\cos \psi_{\mathbf{g}}}{\cos \psi_0}, \quad \nu^{(s)} = \frac{\chi'_{\mathbf{g}} C^{(s)}}{\chi'_0}, \quad \rho^{(s)} = \frac{\chi''_0}{|\chi'_{\mathbf{g}}| C^{(s)}}, \quad \kappa^{(s)} = \frac{\chi''_{\mathbf{g}} C^{(s)}}{\chi''_0}. \quad (19)$$

Так как в области рентгеновских частот выполняется неравенство

$$2 \sin^2 \theta_B / V^2 |\chi'_{\mathbf{g}}| C^{(s)} \gg 1,$$

то $\eta^{(s)}(\omega)$ является быстрой функцией от частоты ω , поэтому для дальнейшего анализа спектра ПРИ очень удобно рассматривать $\eta^{(s)}(\omega)$ как спектральную переменную, характеризующую частоту ω . Важным параметром в выражении (18) является параметр ε , который определяет степень асимметрии отражения поля относительно поверхности пластинки. Отметим, что в симметричном случае волновые векторы падающих и дифрагированных фотонов составляют с поверхностью пластинки равные углы (см. рис. 2), а в случае асимметричного отражения – неравные углы. При этом в симметричном случае $\varepsilon = 1$ и $\delta = \pi/2$, а в асимметричном $\varepsilon \neq 1$ и $\delta \neq \pi/2$.

Представим параметр асимметрии в виде

$$\varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)}, \quad (20)$$

где θ_B – угол между скоростью электрона и системой кристаллографических плоскостей. Отметим, что угол падения электрона на поверхность пластинки $\delta - \theta_B$ увеличивается, если параметр ε уменьшается, и наоборот (см. рис. 2). Заметим, что параметр асимметрии (20) представляет собой отношение длины пути электрона в пластинке ($L_{e-} = L / \sin(\delta - \theta_B)$) к максимальной длине пути фотона в кристалле ($L_f = L / \sin(\delta + \theta_B)$), сформированного вблизи входной поверхности мишени.

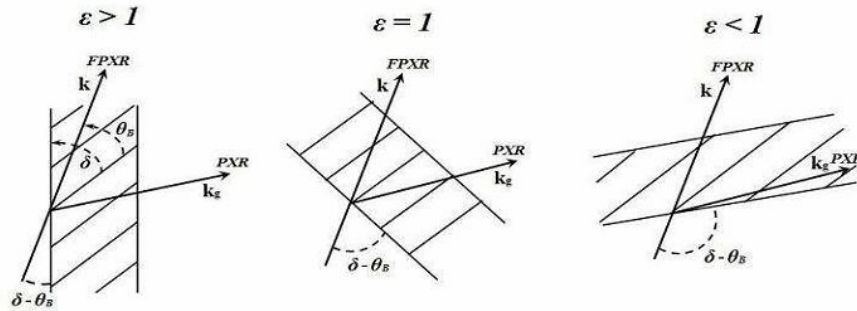


Рис. 2. Асимметричные ($\varepsilon > 1$, $\varepsilon < 1$) отражения излучения от кристаллической пластинки. Случай $\varepsilon = 1$ соответствует симметричному отражению.

Параметр $\nu^{(s)}$ характеризует степень отражения волн от системы параллельных атомных плоскостей в кристалле, которая обуславливается характером интерференции волн, отраженных от атомов разных атомных плоскостей (конструктивная, если $(\nu^{(s)} \approx 1)$ или деструктивная, если $(\nu^{(s)} \approx 0)$).

Параметр поглощения $\rho^{(s)}$ может быть представлен как отношение длины экстинкции $L_{ext}^{(s)} = (\omega |\chi_g'| C^{(s)})^{-1}$ к длине поглощения $L_{abs} = (\omega \chi_0'')^{-1}$ рентгеновских волн в кристалле. Необходимо отметить, что на глубине, равной длине экстинкции, энергия первичной волны полностью перекачивается во вторичную волну, распространяющуюся в брэгговском направлении.

Выражение для амплитуды поля излучения в направлении Брэгга (17), используя (18), запишем в виде двух слагаемых:

$$E_g^{(s)Rad} = E_{PXR}^{(s)} + E_{DTR}^{(s)}, \tag{21a}$$

$$E_{PXR}^{(s)} = \frac{4\pi^2 i e V}{\omega} \cdot \frac{\theta P^{(s)}}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0} \times$$

$$\times \left(\frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \cdot \frac{1 - \exp \left[-i b^{(s)} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) - b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(2)} \right]}{\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} - i \rho^{(s)} \Delta^{(2)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \cdot \frac{1 - \exp \left[-i b^{(s)} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) - b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(1)} \right]}{\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} - i \rho^{(s)} \Delta^{(1)}} \right) \times$$

$$\times \exp \left[i \left(\frac{\omega \chi_0}{2} + \lambda_g^* \right) \frac{L}{\gamma_g} \right], \tag{21b}$$

$$E_{DTR}^{(s)} = \frac{4\pi^2 i e V}{\omega} \theta P^{(s)} \left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0} \right) \frac{\varepsilon}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \times$$

$$\times \left(\exp \left[-i b^{(s)} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) - b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(1)} \right] - \right.$$

$$\left. - \exp \left[-i b^{(s)} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) - b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(2)} \right] \right) \times$$

$$\times \exp \left[i \left(\frac{\omega \chi_0}{2} + \lambda_g^* \right) \frac{L}{\gamma_g} \right], \tag{21c}$$

где

$$\Delta^{(2)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} + \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} + \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}},$$

$$\Delta^{(1)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} - \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}},$$

$$\sigma^{(s)} = \frac{1}{|\chi'_g| C^{(s)}} (\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0) \equiv \frac{1}{\nu^{(s)}} \left(\frac{\theta^2}{|\chi'_0|} + \frac{1}{\gamma^2 |\chi'_0|} + 1 \right),$$

$$b^{(s)} = \frac{\omega |\chi'_g| C^{(s)} L}{2 \gamma_0}. \quad (22)$$

Выражение (21b) представляет амплитуду поля ПРИ, а выражение (21c) описывает амплитуду поля ДПИ, возникающего вследствие дифракции на системе атомных плоскостей кристалла переходного излучения, рождаемого на входной поверхности. Выделение амплитуд излучений ПРИ и ДПИ из общей амплитуды является важным результатом, так как это дает возможность рассмотреть интерференцию этих двух механизмов излучения. Однако в данной работе мы ограничиваемся рассмотрением только механизма ПРИ.

Параметр $b^{(s)}$ можно представить в виде

$$b^{(s)} = \frac{L}{2L_{ext}^{(s)} \sin(\delta - \theta_B)}. \quad (23)$$

Откуда видно, что он равен половине пути электрона в пластинке, выраженного в длинах экстинкции $L_{ext}^{(s)} = (\omega |\chi'_g| C^{(s)})^{-1}$.

Выход ПРИ формируется в основном только одной из ветвей, точнее, первой в выражении (18), соответствующей второму слагаемому в (21b). Как нетрудно убедиться непосредственно, только в этом слагаемом обращается в нуль реальная часть знаменателя. Решение соответствующего уравнения

$$\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} = 0 \quad (24)$$

определяет частоту ω_* , в окрестности которой сосредоточен спектр фотонов ПРИ, излучаемых под фиксированным углом наблюдения.

Подставляя (21b) в хорошо известное [14] выражение для спектрально-угловой плотности рентгеновского излучения

$$\omega \frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \sum_{s=1}^2 |E_g^{(s)Rad}|^2, \quad (25)$$

получим выражение для спектрально-угловой плотности ПРИ:

$$\omega \frac{d^2 N_{PXR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{P^{(s)2} \theta^2}{(\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0)^2} R_{PXR}^{(s)}, \quad (26a)$$

$$R_{PXR}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{1 + e^{-2b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(1)}} - 2e^{-b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(1)}} \cos \left(b^{(s)} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) \right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 + \rho^{(s)2} \Delta^{(2)}}. \quad (26b)$$

Выражение (26) составляет главный результат данной работы. Оно получено в двухволновом приближении динамической теории дифракции с учетом поглощения излучения в среде и ориентации дифрагирующих атомных плоскостей кристалла относительно поверхности кристаллической пластинки.

Далее полученная динамическая формула (26) сравнивается с хорошо известной кинематической [4,5]. Определены критерии ограничения использования кинематической формулы ПРИ.

3. Сравнительный анализ кинематической и динамической формул для тонкого кристалла

Выражение, описывающее спектр ПРИ (26), в случае тонкой мишени ($b^{(s)}\rho^{(s)} \ll 1$), когда коэффициентом поглощения $\rho^{(s)}$ можно пренебречь, принимает следующий вид:

$$R_{PXR}^{(s)} = 4 \left(1 - \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{b^{(s)}}{2} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) \right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2}. \quad (27)$$

Для лучшего проявления динамических эффектов, будем рассматривать кристаллическую пластину такой толщины, чтобы длина пути электрона в пластинке $L/\sin(\delta - \theta_B)$ во много раз превышала длину экстинкции рентгеновских волн в кристалле $L_{ext}^{(s)} = (\omega |\chi_g' C^{(s)}|)^{-1}$, то есть $b^{(s)} \gg 1$.

Проинтегрировав (26) по частотной функции $\eta^{(s)}(\omega)$, запишем выражение, описывающее угловую плотность ПРИ:

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 |\chi_g'| C^{(s)}}{8\pi^2 \sin^2 \theta_B} \cdot \frac{P^{(s)2} \theta^2}{(\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0')^2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{PXR}^{(s)} d\eta^{(s)}(\omega). \quad (28)$$

Так как при условии $b^{(s)} \gg 1$, спектральный пик ПРИ очень узок, то для интегрирования (28) можно использовать хорошо известную аппроксимацию $\sin^2(Tx)/x^2 \rightarrow \pi T\delta(x)$. Формула для углового распределения ПРИ, следующая из (28), после интегрирования принимает вид

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)kin}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B \chi_g'^2 C^{(s)2} P^{(s)2}}{4\pi \sin^2 \theta_B} \cdot \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}. \quad (29)$$

Запишем хорошо известное выражение, описывающее угловую плотность ПРИ в кинематическом приближении (см., например, [5,16]),

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)kin}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B \chi_g'^2 C^{(s)2} P^{(s)2}}{4\pi \sin^2 \theta_B} \cdot \frac{\theta^2}{(\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0')^2} \Gamma(\varepsilon), \quad (30)$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega_B \chi_0''} \left(1 - \exp \left[-\frac{\omega_B \chi_0'' L}{\varepsilon \sin(\delta - \theta_B)} \right] \right).$$

Видно, что коэффициент асимметрии ε , входящий в кинематическое выражение, содержится только в геометрическом факторе $\Gamma(\varepsilon)$. В случае тонкого не поглощающего кристалла, геометрический фактор есть путь электрона в кристаллической мишени. Следовательно,

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}. \quad (31)$$

Отсюда кинематическое выражение, описывающее угловую плотность ПРИ, принимает вид

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)kin}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B \chi_g'^2 C^{(s)2} P^{(s)2}}{4\pi \sin^2 \theta_B} \cdot \frac{\theta^2}{(\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0')^2} \cdot \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}. \quad (32)$$

Важно отметить, что в динамической формуле, в отличие от кинематической, асимметрия ε (угол δ) входит не только в выражение, описывающее путь электрона в пластинке (31), но также в множитель, описывающий угловое распределение ПРИ, что является основой для сравнения кинематической и динамической формул для случая тонкого кристалла.

Для дальнейшего анализа удобно представить выражения (29) и (32) следующим образом

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)din}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B |\chi_g'| C^{(s)} P^{(s)2}}{4\pi \sin^2 \theta_B} \cdot \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)} F^{din}, \quad (33a)$$

$$F^{din} = \nu^{(s)} \frac{\varepsilon^2 \theta^2 / |\chi_0'|}{\nu^{(s)2} + \varepsilon (\theta^2 / |\chi_0'| + (\gamma^2 |\chi_0'|)^{-1} + 1)^2}, \quad (33b)$$

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)kin}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B |\chi_g'| C^{(s)} P^{(s)2}}{4\pi \sin^2 \theta_B} \cdot \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)} F^{kin}, \quad (34a)$$

$$F^{kin} = \nu^{(s)} \frac{\theta^2 / |\chi_0'|}{(\theta^2 / |\chi_0'| + (\gamma^2 |\chi_0'|)^{-1} + 1)^2}. \quad (34b)$$

Функции (33b) и (34b) описывают угловую плотность ПРИ. Необходимо отметить, что динамический подход в отличие от кинематического учитывает влияние асимметрии на угловую часть ПРИ.

3.1. Симметричное отражение. Рассмотрим сначала случай симметричного отражения $\varepsilon = 1$. В случае небольшой энергии излучающих частиц $\gamma \leq |\chi_0'|^{-1/2} \approx \omega/\omega_p$ (ω_p – плазменная частота) следует приближенное равенство $F_{din} \approx F_{kin}$ для всех углов наблюдения θ .

При достаточно большой энергии $\gamma \gg \omega/\omega_p$ для слабых отражений (например, $\nu^{(s)} \approx 0,3$) $F_{din} \approx F_{kin}$. В случае же сильных отражений (например, $\nu^{(s)} \approx 0,9$) угловые зависимости, построенные по кинематической и динамической формулам, несколько отличаются, что демонстрируют кривые, представленные на рис. 3. В этом случае кинематические формулы дадут погрешность абсолютного выхода фотонов, поэтому результаты достаточно точных экспериментов по измерению абсолютного выхода ПРИ необходимо сравнивать с динамической формулой (29).

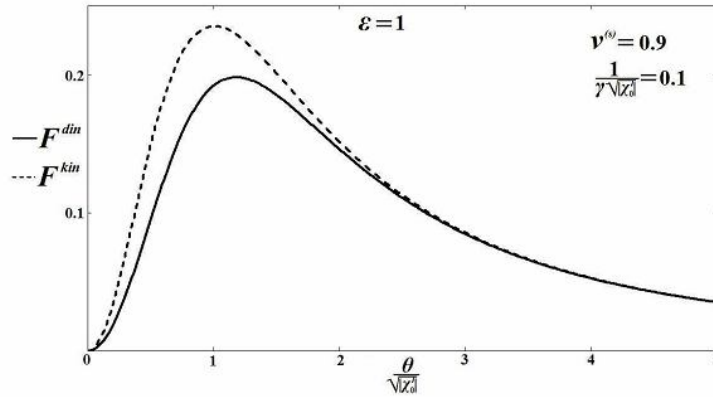


Рис 3. Сравнение угловых плотностей ПРИ, вычисленных по динамической и кинематической формулам. Кинематическая формула дает погрешность при данных условиях.

3.2. Асимметричное отражение. При усилении асимметрии, которая связана с уменьшением (при $\varepsilon < 1$) или увеличением (при $\varepsilon > 1$) угла падения $\delta - \theta_B$ электрона на мишень (см. рис. 2), погрешность кинематической формулы возрастает, что демонстрируется кривыми, представленными на рис. 4.

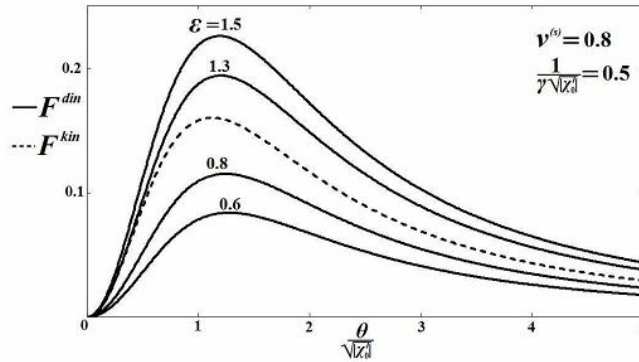


Рис. 4. Угловая плотность ПРИ для различной асимметрии. Демонстрируется увеличение погрешности кинематической формулы при увеличении асимметрии.

В случае сильной асимметрии ($\varepsilon \gg 1$), когда угол падения электрона на мишень ($\delta - \theta_B$) мал, из (33b) и (34b) для Лоренц-фактора релятивистского электрона, как больше, так и меньше ω/ω_p , следует отношение

$$\frac{F_{din}}{F_{kin}} = \varepsilon. \tag{35}$$

Таким образом, при сильной асимметрии угловая плотность ПРИ в ε раз превышает плотность, предсказываемую кинематической формулой (см. рис. 5). Поэтому, даже в случае

тонкого непоглащающего кристалла возникает необходимость учета динамических эффектов в ПРИ.

4. Сравнительный анализ кинематической и динамической формул для толстого поглощающего кристалла

Для сравнительного анализа удобно представить выражения (26) и (30) следующим образом

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)din}}{d\Omega} = \frac{e^2 P^{(s)^2}}{4\pi \sin^2 \theta_B} F_{abs}^{din}, \quad (36a)$$

$$F_{abs}^{din} = \nu^{(s)} \frac{\theta^2 / |\chi'_0|}{(\theta^2 / |\chi'_0| + (\gamma^2 |\chi'_0|)^{-1} + 1)^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{PXR}^{(s)} d\eta^{(s)}(\omega), \quad (36b)$$

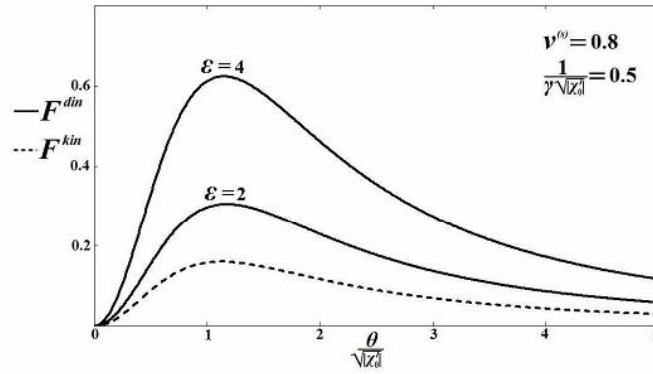


Рис. 5. При сильной асимметрии угловая плотность ПРИ в ε раз превышает плотность, предсказываемую кинематической формулой.

$$R_{PXR}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2} + \varepsilon}}\right)^2 \times \frac{1 + e^{-L_f \mu^{(s)}} - 2e^{-L_f \mu^{(s)}/2} \cos\left(\frac{L_{\varepsilon}}{2L_{\varepsilon z}} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)^2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)^2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{L_{\varepsilon z}^2 \mu^{(s)^2}}{\varepsilon^2}}, \quad (36c)$$

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)kin}}{d\Omega} = \frac{e^2 P^{(s)^2}}{4\pi \sin^2 \theta_B} F_{abs}^{kin}, \quad (37a)$$

$$F_{abs}^{kin} = \nu^{(s)} \frac{\theta^2 / |\chi'_0|}{(\theta^2 / |\chi'_0| + (\gamma^2 |\chi'_0|)^{-1} + 1)^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho^{(s)}} (1 - e^{-L_f \mu_0}), \quad (37b)$$

где

$$\mu^{(s)} = \mu_0 \left(\frac{\varepsilon + 1}{2} - \frac{1 - \varepsilon}{2} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} - \frac{\varepsilon \kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \right),$$

$$\mu_0 = \omega_B \chi_0'', \quad \sigma^{(s)} = \frac{1}{\nu^{(s)}} \left(\frac{\theta^2}{|\chi_0'|} + \frac{1}{\gamma^2 |\chi_0'|} + 1 \right). \quad (38)$$

Здесь $\mu^{(s)}$ есть эффективный коэффициент поглощения фотонов в кристалле, зависящий от параметра асимметрии ε . Параметр $\kappa^{(s)}$ определяет степень проявления эффекта аномального низкого фотопоглощения (эффекта Бормана) [15] в прохождении рентгеновских волн через кристалл. Физика эффекта заключается в образовании падающей и рассеянной рентгеновскими волнами стоячей волны, пучности которой расположены в середине пространства между соседними атомными плоскостями, где электронная плотность кристалла, а следовательно, и фотопоглощение, являются минимальными. При этом в кристалле образуются две волны, одна из которых поглощается аномально сильно, а другая аномально слабо (для ПРИ амплитуды волн, слагаемые в выражении (21b)). Выражение (36a) описывает ветвь ПРИ, которая поглощается аномально слабо.

Как и в случае свободных рентгеновских волн необходимым условием проявления данного эффекта в ПРИ является близость по величине мнимых частей соответствующих коэффициентов разложения диэлектрической восприимчивости кристалла в ряд Фурье по векторам обратной решетки ($\kappa^{(s)} \approx 1$). В этом случае $\mu^{(s)}$ (38) принимает минимальное значение. Необходимо напомнить, что параметр $\kappa^{(s)}$ зависит от выбора системы параллельных дифрагирующих атомных плоскостей кристалла, частоты излучения, а также от его поляризации.

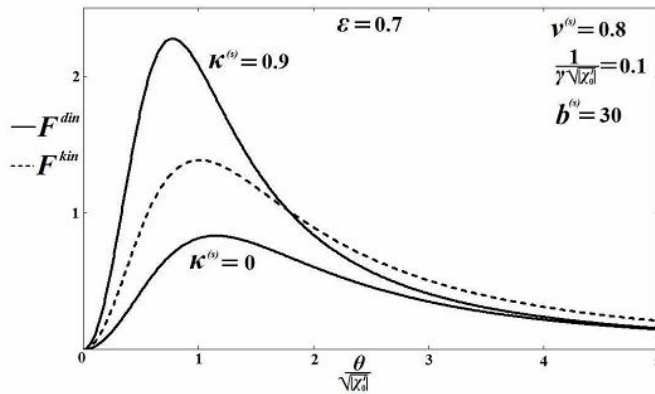


Рис. 6. Деформации угловой плотности ПРИ за счет разного эффективного коэффициента поглощения для разных углов наблюдения θ .

Так как решение уравнения (24) определяет частоту ω_* , в окрестности которой сосредоточен спектр фотонов ПРИ, излучаемых под фиксированным углом наблюдения:

$$\xi^{(s)}(\omega_*) = \frac{1 - \varepsilon \sigma^{(s)2}}{2\sigma^{(s)}}, \quad (39)$$

то эффективный коэффициент поглощения также зависит от угла наблюдения θ . Таким образом, учет поглощения в динамической теории может привести к деформации угловой плотности ПРИ (см. рис. 6).

Необходимо еще раз отметить, что в кинематической формуле от асимметрии зависит только геометрия процесса, а коэффициент поглощения μ_0 соответствует значению в аморфной среде. В динамической формуле (36а) эффективный коэффициент поглощения $\mu^{(s)}$ зависит не только от выбора системы дифрагирующих атомных плоскостей кристалла (параметр $\kappa^{(s)}$), а также от асимметрии и угла наблюдения. При этом эффективная длина поглощения фотона соответствует $1/\mu^{(s)}$.

5. Интерпретация результатов эксперимента по ПРИ релятивистских электронов на майнцком микротроне МАМІ

В работе [16] опубликованы результаты экспериментального исследования спектрально-углового распределения параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) электронов с энергией 855 MeV. Следует отметить высокое качество электронного пучка ускорителя (малые поперечные размеры и малую расходимость) и детектирующей аппаратуры, позволившее авторам [16] получить угловое распределение рентгеновских фотонов в абсолютных величинах с высокой точностью и высоким угловым разрешением. Опубликованные экспериментальные результаты мы сравнили с расчётами углового распределения, проведенными нами, как по хорошо известной кинематической формуле (30), так и по полученной нами динамической (26). Как видно из рис. 7, кривая, полученная по кинематической формуле (пунктирная линия 1), расходится с экспериментальными результатами. Кривая, построенная по нашей динамической формуле с учётом отражения фотонов на системе плоскостей [11] асимметрично относительно поверхности кристалла (сплошная линия 2), полностью совпадает с экспериментом. Важно отметить, что условия данного эксперимента соответствуют условию заметного проявления эффекта аномально низкого фотопоглощения (эффект Бормана) в ПРИ в асимметричном случае [11]. Для демонстрации этого на рисунке приведены результаты расчёта по нашей динамической формуле в предположении, что эффект Бормана отсутствует (сплошная линия 3).

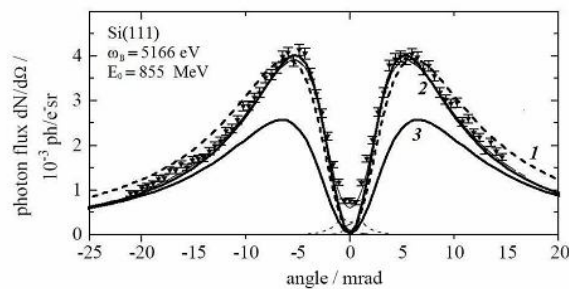


Рис. 7. Проявления динамического эффекта Бормана в ПРИ.

Таким образом, можно утверждать, что динамический эффект Бормана в ПРИ проявляется в эксперименте.

6. Заключение

На основе двухволнового приближения динамической теории дифракции получено аналитическое выражение для спектрально-углового распределения ПРИ в случае асимметричного по отношению к поверхности мишени отражения поля релятивистского электрона. Проведен сравнительный анализ формул параметрического рентгеновского излучения в динамическом и кинематическом приближении в случае симметричного и асимметричного отражений.

Для случая тонкого кристалла нами показано, что при симметричном отражении в области энергии излучающих частиц $\gamma \gg \omega/\omega_p$ кинематическая формула ПРИ дает погрешность даже в случае тонкого непоглощающего кристалла, а в случае $\gamma < \omega/\omega_p$ кинематическая и динамическая теории ПРИ дают одинаковые результаты. Нами также показано, что при увеличении асимметрии отражения погрешность кинематической формулы для ПРИ возрастает. Показано, что для сильной асимметрии ($\varepsilon \gg 1$) угловая плотность, рассчитанная по кинематической формуле, оказывается в ε раз меньше реальной, вычисленной по динамической формуле. Таким образом, даже в случае тонкого непоглощающего кристалла возникает необходимость учета динамических эффектов в ПРИ. Наконец, нами показано, что в случае толстого поглощающего кристалла в динамической теории, в отличие от кинематической, коэффициент поглощения ПРИ в кристалле зависит от асимметрии отражения и направления распространения фотона, что может привести к деформации углового распределения.

В рамках развитой теории в работе проведена интерпретация результатов эксперимента по регистрации ПРИ релятивистских электронов на микротроне МАМ в Майнце. Показано, что эффект аномального фотопоглощения (эффект Бормана) в ПРИ имел место в данном эксперименте.

В заключение мы благодарим профессора И.Е.Внукова за ценные дискуссии по теме, изучаемой в работе.

Литература

1. Тер-Микаэлян М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях / М.Л. Тер-Микаэлян. – АН АрмССР: Ереван, 1969. – 460с.
2. Гарибян Г.М., Ян Ши // ЖЭТФ. – 1971. – 61. – С.930.
3. Барышевский В.Г., Феранчук И.Д. // ЖЭТФ. – 1971. – 61. – С.944.
4. Nitta H. // Phys.Lett.A. – 1991. – 158. – P.270.
5. Feranchuk I.D., Ivashin A.V. // J.Physique. – 1985. – 46. – P.1981.
6. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. // J.Physique. – 1983. – 44. – P.913.
7. Kubankin A.S., Nasonov N.N., Sergienko V.I., Vnukov I.V. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res B. – 2003. – 201. – P.97.

8. Nasonov N.N., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2003. – 201. – P.67.
9. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2006. – 252. – P.69.
10. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2008. – 266. – P.3770.
11. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2008. – 266. – P.3777.
12. Алейник А.Н., Балдин А.Н., Богомазова Е.А., Внуков И.Е. и др. // Письма в ЖЭТФ. – 2004. – 80. – С.447.
13. Пинскер З.Г. Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах // З.Г. Пинскер. – М.: Наука, 1974. – 372с.
14. Базылев В.А., Жеваго Н.К. Излучение быстрых частиц в веществе и внешних полях // В.А. Базылев. – М: Наука, 1987. – 272с.
15. Borrmann G. // Zh.Phys. – 1941. – 42. – P.157.
16. Brenzinger K.-H., Herberg C., Limburg B., Backe H. and al. // Phys.A. – 1997. – 358. – P.107.

**APPLICABILITY OF KINEMATIC APPROACH
FOR DESCRIPTION OF PARAMETRIC X-RAY
IRRADIATION OF RELATIVISTIC ELECTRONS IN CRYSTALS**

S.V. Blazhevich, A.V. Noskov

Belgorod State University

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: blazhevich@bsu.edu.ru

The parametric X-ray irradiation of relativistic electron crossing the single crystal film in frameworks of the Laue geometry of the scattering process is considered. It is studied in the case of asymmetric and symmetric (as the particular case) reflection of the particle field relative to the crystal surface. On the basis of the two-wave approximation of the dynamical diffraction theory, the expressions describing the spectral angular density of the parametric X-ray irradiation are obtained. It is done the comparative analysis of parametric X-ray irradiation formulas at the dynamical and kinematic approximation. On the basis of the obtained expression of the angular density, it is fulfilled the interpretation of experimental results obtained at the Minz accelerator. It is shown that the dynamical effect of the abnormal photoabsorption (the Bormann effect) takes place at the parametric X-ray irradiation experiments.

Key words: parametric X-ray irradiation, crystal film, Laue scattering.