УДК 517.55

О РАЗРЕЗАХ, ПРИМЫКАЮЩИХ К ДИСКРИМИНАНТНОМУ МНОЖЕСТВУ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е.Н. Михалкин

Красноярский государственный педагогический университет,
ул. А. Лебедевой, 89, 660049, г. Красноярск, Россия, e-mail: mikhalkin@bk.ru

Аннотация. Рассматривается алгебраическое уравнение с независимыми коэффициентами. Исследуется взаимное расположение дискриминантного множества и двух семейств комплексных гиперплоскостей $\Sigma_{\pm}$, в дополнении к которым главное решение является голоморфной функцией. Фактически $\Sigma_{\pm}$ являются разрезами в пространстве коэффициентов, примыкающими к дискриминантному множеству рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, гипергеометрический ряд, интегральное представление, дискриминантное множество.

1 Интегральный и гипергеометрический подходы к решению общего алгебраического уравнения

Общее алгебраическое уравнение имеет вид

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Его решение (как алгебраическая функция коэффициентов $a_0, \ldots, a_n$) обладает двойной однородностью и простой заменой сводится [1] к уравнению вида

$$z^n = z^k + y_1 z^{n_1} + \ldots + y_p z^{n_p},\ n > k \geq 0,\ n_1 > \ldots > n_p > 0; \tag{1}$$

иными словами, любые два коэффициента мы можем "заморозить полагая их равными $+1$ и -1.

Сначала рассмотрим уравнение (1) при $k = 0, n > n_1$, т. е. уравнение вида

$$z^n + x_1 z^{n_1} + \ldots + x_p z^{n_p} - 1 = 0,\ n_1 > \ldots > n_p > 0 \tag{2}$$

(здесь через x_j обозначен коэффициент $-y_j$ уравнения (1)).

В 1921 году Меллин [2] привёл интегральную формулу и разложение в гипергеометрический ряд для решения уравнения (2) (см.также [3]). Указанная формула была получена им для ветви $z_0(x)$ с условием $z_0(0) = 1$, и названа главным решением уравнения (2). Несложно увидеть, что все остальные ветви получаются из $z_0(x)$ по формуле

$$z_j(x) = \varepsilon^j z(\varepsilon^j x),\ j = 1, \ldots, n-1,$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень.

Работа поддержана грантом Президента РФ № МК-2539.2008.1

Теорема 1 (Mellin) *Главное решение уравнения (2) представимо в виде интеграла*

$$z_0(x) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^p} \frac{\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n_1}{n}z_1 - \dots - \frac{n_p}{n}z_p\right)\Gamma(z_1)\dots\Gamma(z_p)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1'}{n}z_1 + \dots + \frac{n_p'}{n}z_p + 1\right)} x^z\, dz, \tag{3}$$

где Γ *— гамма функция Эйлера,* γ *— точка из многогранника*

$$\{u \in \mathbb{R}^p_+ :\ n_1u_1 + \dots + n_pu_p < 1\},$$

$x^z = x_1^{-z_1} \dots x_p^{-z_p}$, $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p$, *а* $n_k' = n - n_k,\ k = 1, \dots, p$.

Теперь рассмотрим уравнение (1), опуская ранее оговоренное предположение $k = 0, n > n_1$. В 1927 году Биркелан ([4], [5]), используя формулу Лагранжа, привёл разложение в гипергеометрический ряд для $n-k$ корней $z_j(x)$, не обращающихся при $y_1 = \dots = y_p = 0$ в нуль, этого уравнения. Формула Биркелана следующая:

$$z_j(x) = \varepsilon^j \frac{1}{n-k} \sum_{|l|\geq 0} \varepsilon^{jv} \frac{(\tau, r-1)}{l_1! \dots l_p!} y_1^{l_1} \dots y_p^{l_p}, \tag{4}$$

где

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n-k}},\ r = \sum_{\nu=1}^{p} l_\nu,\ v = \sum_{\nu=1}^{p}(n_\nu - n)l_\nu,\ \tau = \frac{1+v}{n-k} + 1,$$

$$(\lambda, l) = \lambda(\lambda+1)\cdot \ldots \cdot(\lambda+l-1) = \frac{\Gamma(\lambda+l)}{\Gamma(\lambda)},\ (\lambda, 0) = 1,$$

$$|l| = l_1 + \ldots + l_p.$$

(см. [6]).

Далее нас будет интересовать подход Меллина, т.е. мы будем рассматривать уравнение (2). В статье [7], на основе формулы Меллина, была получена интегральная формула для решения (2) с интегрированием по отрезку элементарной функции. А именно, справедлива следующая

Теорема 2 *Ветвь алгебраической функции* $z_0(x)$ *решения уравнения (2) с условием* $z_0(0) = 1$ *допускает представление в виде интеграла*

$$z_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n} \int\limits_0^1 t^{\frac{1-n}{n}}(1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} \ln\left(1 - \sum_{k=1}^{p} e^{\frac{n_k}{n}\pi i} x_k t^{\frac{n_k}{n}} (1-t)^{\frac{n_k'}{n}}\right) - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln\left(1 - \sum_{k=1}^{p} e^{-\frac{n_k}{n}\pi i} x_k t^{\frac{n_k}{n}} (1-t)^{\frac{n_k'}{n}}\right)\right] dt, \tag{5}$$

где ветви логарифма определены в области пространства $\mathbb{C}^p$ *переменного* $x = (x_1, \dots, x_p)$, *полученной удалением из* $\mathbb{C}^p$ *двух семейств комплексных гиперплоскостей*

$$\Sigma_- = \bigcup_{t\in[0;1]} \{\sum_{k=1}^{p} x_k t^{\frac{n_k}{n}} (1-t)^{\frac{n_k'}{n}} e^{-\frac{n_k}{n}\pi i} = 1\},$$

$$\Sigma_+ = \bigcup_{t\in[0;1]} \{\sum_{k=1}^{p} x_k t^{\frac{n_k}{n}} (1-t)^{\frac{n_k'}{n}} e^{\frac{n_k}{n}\pi i} = 1\}$$

и выбираются условием $\ln 1 = 0$. *Таким образом,* $z_0(x)$ *голоморфно продолжается из окрестности нуля в область* $\mathbb{C}^p \setminus (\Sigma_- \cup \Sigma_+)$.

Область сходимости интеграла (5) шире области сходимости интеграла Меллина-Барнса (3). Этот факт позволяет описать монодромию решения уравнения (2) в случае, когда оно содержит один параметр.

2 Применение к триномиальному уравнению

Рассмотрим уравнение вида (2) в случае $p = 1$, т. е. когда в уравнении всего один параметр x_1, который мы обозначим через x. Соответствующее уравнение

$$z^n + xz^m - 1 = 0, \ \ 0 < m < n \tag{6}$$

назовём триномиальным уравнением. Для него главное решение (5) запишется в виде

$$z_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n} \int\limits_0^1 \frac{t^{\frac{1-n}{n}}}{(1-t)^{\frac{1+n}{n}}} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} \ln(1 - e^{\frac{m}{n}\pi i} y) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln(1 - e^{-\frac{m}{n}\pi i} y) \right] dt, \tag{7}$$

где $y = xt^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}$. Максимальное значение функции $t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}$ на отрезке $[0,1]$ равно $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}$, поэтому множества $\Sigma_\mp$ в формулировке Теоремы 2 представляют собой пару лучей

$$\Sigma_\mp = \left\{ \tau e^{\pm \frac{m\pi i}{n}} : \ \ \tau \geq \frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} \right\}.$$

Отметим, что сектор, ограниченный продолжениями этих лучей до их пересечения (в начале координат), является областью сходимости интеграла Меллина-Барнса (3), представляющего главное решение $z_0(x)$ триномиального уравнения (6) (имеется ввиду сектор, содержащий луч $x > 0$). Действительно, интеграл (3) имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{m}{n} z\right) \Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n-m}{n} z + 1\right)} x^{-z} \, dz,$$

где $0 < \gamma < \frac{1}{m}$, и согласно [8], его область сходимости вычисляется по формуле

$$|arg\, x| < \frac{\pi}{2} \left(\frac{m}{n} + 1 - \frac{n-m}{n} \right) = \frac{m}{n} \pi.$$

Далее рассмотрим случай, когда m и n взаимно просты. В этом случае дискриминант уравнения (6) допускает наиболее краткую запись и он равен (см. [1])

$$\Delta = (-1)^n [(-1)^m n^n - m^m (n-m)^{n-m} x^n].$$

Таким образом, дискриминантное множество составляет следующая последовательность точек

$$x_k = \frac{e^{\pi i \frac{m+2k}{n}}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}\ ,\ k = 0, \ldots, n-1,$$

лежащих на одной окружности. Заметим, что точки x_0 и x_{n-m} дискриминантного множества — есть начала лучей Σ_- и Σ_+, вне которых, по Теореме 2, $z_0(x)$ голоморфна и однозначна. Поэтому, обозначив через σ_k петлю, проходящую через $x=0$ и окружающую лишь точку x_k, мы приходим к следующему утверждению:

Следствие 1 *Главная ветвь $z_0(x)$ триномиального уравнения (6) переходит в себя при обходе всех петель σ_k, кроме σ_0 и σ_{n-m}.*

Используя рассуждение симметрии и то, что остальные ветви имеют вид $z_j(x) = \varepsilon^j z(\varepsilon^j x)$,
$j = 1, \ldots, n-1$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень, получаем

Следствие 2 *Каждая ветвь $z_j(x)$ имеет ветвление лишь в паре точек $x = \frac{e^{\frac{\pi i}{n}(\pm m - 2j)}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}$.*

3 Геометрия разрезов Σ_+ и Σ_- в случае тетраномиального уравнения

Степенные ряды и интегралы Меллина-Барнса (в частности, интеграл (3)) сходятся вплоть до ближайших особых точек функций, которые они представляют. Аналогичным свойством обладает и интеграл (5). Поскольку особым множеством для алгебраической функции $z(x)$ является дискриминантное множество ∇ – множество нулей дискриминанта $\Delta(x)$ уравнения (2), то весьма полезно рассмотреть информацию о взаимном расположении дискриминантного множества и областей сходимости указанных функциональных объектов.

В статье будет описано взаимное расположение дискриминантного множества и комплексных гиперплоскостей $\Sigma_\pm$, которые были определены в Теореме 2. Напомним, что в случае триномиального уравнения семейство гиперплоскостей $\Sigma_\pm$ представляет собой пару лучей, выходящих из точек дискриминантного множества.

Итак, исследуем взаимное расположение дискриминантного множества с гиперплоскостями $\Sigma_\pm$ в случае тетраномиального уравнения

$$z^n + x_m z^m + x_p z^p - 1 = 0,\ n > m > p > 0. \tag{8}$$

В рассматриваемом случае семейство гиперплоскостей $\Sigma_\pm$ примет вид

$$\Sigma+ = \bigcup_{t\in[0;1]} \{x_m t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}} e^{\frac{m}{n}\pi i} + x_p t^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-p}{n}} e^{\frac{p}{n}\pi i} = 1\},$$
$$\Sigma_- = \bigcup_{t\in[0;1]} \{x_m t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}} e^{-\frac{m}{n}\pi i} + x_p t^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-p}{n}} e^{-\frac{p}{n}\pi i} = 1\}.$$

Обозначим гиперплоскости семейства $\Sigma_\pm$ через $\Sigma_\pm(t)$, и пусть $F_\pm(x;t)$ – линейные функции переменного $x = (x_p, x_m)$, определяющие $\Sigma_\pm(t)$:

$$F_\pm(x;t) = x_m t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}} e^{\pm\frac{m}{n}\pi i} + x_p t^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-p}{n}} e^{\pm\frac{p}{n}\pi i} - 1.$$

Согласно [1], дискриминантное множество

$$\nabla = \{x \in \mathbb{C}^2 : \Delta(x_p, x_m) = 0\}$$

уравнения (8) допускает параметризацию

$$\begin{aligned} x_p &= \tfrac{ns}{(n-p)s+(n-m)} \left(-\tfrac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{p}{n}}, \\ x_m &= \tfrac{n}{(n-p)s+(n-m)} \left(-\tfrac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{m}{n}}, \ s \in \mathbb{CP}_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим через K – множество критических точек логарифмической проекции

$$\nabla \to \mathbb{R}^2 : (x_p, x_m) \to (\log|x_p|, \log|x_m|)$$

дискриминантной гиперповерхности ∇.

Теорема 3 *Комплексные гиперплоскости семейства $\Sigma_\pm$ касаются дискриминантного множества ∇ вдоль подмножества*

$$K_\pm = \left\{x^\pm(s) : s \in \mathbb{RP}_1,\ \frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m} > 0\right\} \subset K,$$

где $x^\pm(s)$ – ветви параметризации (9), определяемые условиями

$$\arg\left(-\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{1}{n}} = \mp\frac{\pi}{n}.$$

В точке $x^\pm(s)$ с ∇ касается гиперплоскость семейства $\Sigma_\pm$, соответствующая параметру $t = \frac{ps+m}{n(s+1)}$.

Доказательство 1 *Точки касания ∇ и $\Sigma_\pm(t)$ определяются системой*

$$F_\pm(x(s),t) = 0, \frac{\partial F_\pm(x(s),t)}{\partial s} = 0. \tag{10}$$

Пусть $s \in \mathbb{RP}_1$, причем $\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m} > 0$. Тогда параметризация (9) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} x_p(s) &= x_p^{(l)}(s) = e^{\frac{\pi p i}{n}(1+2l)} \tfrac{ns}{(n-p)s+(n-m)} \left(\tfrac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{p}{n}}, \\ x_m(s) &= x_m^{(l)}(s) = e^{\frac{\pi m i}{n}(1+2l)} \tfrac{n}{(n-p)s+(n-m)} \left(\tfrac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{m}{n}}, \ l = -1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Найдем производные $\frac{\partial x_p}{\partial s}$ и $\frac{\partial x_m}{\partial s}$. Как показывают вычисления

$$\frac{\partial x_p}{\partial s} = e^{\frac{\pi p i}{n}(1+2l)} n \left(\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{p}{n}} \frac{p(n-p)s+m(n-m)}{((n-p)s+(n-m))^2(ps+m)},$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial s} = -e^{\frac{\pi mi}{n}(1+2l)} n \left(\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{m}{n}} \frac{p(n-p)s+m(n-m)}{((n-p)s+(n-m))^2(ps+m)},$$

тогда

$$\frac{\partial F_\pm(x(s),t)}{\partial s} = t^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}} n \left(\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{p}{n}} \frac{p(n-p)s+m(n-m)}{((n-p)s+(n-m))^2(ps+m)} \times$$
$$\times \left[e^{\frac{\pi pi}{n}(1+2l\pm1)}(1-t)^{\frac{m-p}{n}} - \left(\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{m-p}{n}} t^{\frac{m-p}{n}} e^{\frac{\pi mi}{n}(1+2l\pm1)}\right].$$

Приравняем полученное произведение к нулю. Несложно заметить, что для выполнения второго уравнения системы (10), l следует выбирать равным -1 для удовлетворения условию $\frac{\partial F_+(x(s),t)}{\partial s} = 0$ и $l = 0$ для выполнения условия $\frac{\partial F_-(x(s),t)}{\partial s} = 0$. Очевидно, что $x^{(-1)}(s) = x^+(s)$, $x^{(0)}(s) = x^-(s)$. При указанном выборе ветви мы приходим к уравнению

$$\frac{1-t}{t} = \frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m} \tag{11}$$

(которое получается приравниванием к нулю выражения, стоящего в квадратной скобке), откуда находим $t(s) = \frac{ps+m}{n(s+1)}$. Отметим, что так как функция $\frac{1-t}{t}$ при $0 < t < 1$ строго монотонна, то уравнение (11) не имеет других корней, кроме найденного.

Итак, при условии $\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m} > 0$ и при указанном выборе ветвей, для $t = \frac{ps+m}{n(s+1)}$ выполняется второе равенство системы (10). С помощью достаточно простых вычислений несложно показать, что при $t(s) = \frac{ps+m}{n(s+1)}$ выполняются условия $F_+(x^{(-1)}) = 0$ и $F_-(x^{(0)}) = 0$, т.е. справедливо и первое равенство системы (10).

Замечание. Достаточно простые вычисления показывают, что при $\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m} < 0$ не может выполняться равенство $\frac{\partial F_\pm(x(s),t)}{\partial s} = 0$ системы (10). Т.е. при этих значениях s касания комплексных гиперплоскостей $\Sigma_\pm$ и дискриминантного множества ∇ не происходит.

Далее рассмотрим кубическое уравнение

$$z^3 + x_2 z^2 + x_1 z - 1 = 0 \tag{12}$$

(т.е. уравнение (8) при $n = 3$, $m = 2$, $p = 1$). В этом случае подмножество $K_\pm$ множества K критических точек логарифмической проекции $\nabla \to \mathbb{R}^2$ определяется следующим условием:

$$K_\pm = \left\{x^\pm(s) : s \in \mathbb{RP}_1,\ \frac{2s+1}{s+2} > 0\right\}.$$

Покажем, что множество $K_\pm$ является огибающей к семейству гиперплоскостей $\Sigma_\pm$. Для этого, согласно [9], нужно показать, что при рассматриваемых s и $t = t(s)$, во-первых, выполняется, система равенств

$$F_\pm(x^\pm(s); t(s)) \equiv 0\,, \frac{\partial F_\pm(x^\pm(s); t(s))}{\partial t} \equiv 0, \tag{13}$$

во-вторых, справедливо неравенство

$$\frac{\partial^2 F_{\pm}(x^{\pm}(s); t(s))}{\partial t^2} \neq 0. \tag{14}$$

Справедливость первого тождества системы равенств (13) была показана при доказательстве Теоремы 3. Проверим второе тождество из (13):

$$\frac{\partial F_{\pm}(x;t)}{\partial t} = \frac{1}{3}x_1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\pm\frac{\pi i}{3}} - \frac{2}{3}x_1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\pm\frac{\pi i}{3}} +$$

$$+\frac{2}{3}x_2\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\pm\frac{2\pi i}{3}} - \frac{1}{3}x_2\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}.$$

Тогда для точек множества $K_{\pm}$ имеем следующую цепочку равенств:

$$\frac{\partial F_{\pm}(x^{\pm}(s); t(s))}{\partial t} = \frac{s}{s+2}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{2s}{s+2}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{s+2}{2s+1}\right)^{\frac{1}{3}} +$$

$$\frac{2}{s+2}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{s+2}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{s+2}{2s+1}\right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{2s+1}{s+2}\left(\frac{2}{s+2} - 1 + \frac{s}{s+2}\right) = 0.$$

Перейдем к доказательству неравенства (14). Как показывают вычисления

$$\frac{\partial^2 F_{\pm}(x;t)}{\partial t^2} = \frac{2}{9}\frac{1}{t^2(t-1)}\left(x_1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\pm\frac{\pi i}{3}} + x_2\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}\right),$$

Вычисления показывают, что применительно ко множеству $K_{\pm}$ получим следующее равенство:

$$\frac{\partial^2 F_{\pm}(x^{\pm}(s); t(s))}{\partial t^2} = -\frac{18(s+1)^4}{(s+2)^2(2s+1)^2}.$$

Итак, $\frac{\partial^2 F_{\pm}(x;t)}{\partial t^2} \neq 0$ для всех s – удовлетворяющих условию $\frac{2s+1}{s+2} > 0$. Таким образом, доказано

Предложение 1 *В случае кубического уравнения (12) множество $K_{\pm}$ является огибающей к семейству гиперплоскостей $\Sigma_{\pm}$.*

Литература

1. M. Passare, A. Tsikh, Algebraic equations and hypergeometric series / M. Passare, A. Tsikh // In the book "The legacy of Niels Henrik Abel". Springer. 2004. P. 653–672.

2. H.J. Mellin, Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1921. V.172, P. 658–661.

3. А.Ю. Семушева, А.К. Цих, Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений. В кн.: Комплексный анализ и дифференциальные операторы (к 150-летию С.В. Ковалевской), Красноярск: КрасГУ. 2000. С. 134–146.

4. R. Birkeland, Les équations algébriques et les fonctions hypergéométriques // Ark. Norske Vid.-Akad. Oslo. 1927. №8. P. 1–23.

5. R. Birkeland, Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen // Math. Ztschr. 1927. №26. P. 566–578.

6. Н.Г. Чеботарёв, Теория Галуа, М.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936. 156 с.

7. Е.Н. Михалкин, О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций // Сиб. матем. журн. 2006. Т.47, №2. С. 365–371.

8. О.Н. Жданов, А.К. Цих, Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов // Сиб. мат. журн. 1998. Т.39, №2. С. 282–298.

9. В.А. Залгаллер, Теория огибающих, М.: Наука. 1975. 100 с.

ON THE SLITS WHICH TOUCH THE DISCRIMINANT SET OF ALGEBRAIC EQUATION

E.N. Mikhalkin

Krasnoyarsk State Pedagogical University,
A. Lebedevoj str., 89, Krasnoyarsk, 660049, Russia, e-mail: mikhalkin@bk.ru

Abstract. The paper deals with a general algebraic equation. We study as two families of complex hyperplanes $\Sigma_{\pm}$ arrangements to the discriminant set of this equation. The principal solution to equation is a holomorphic function in the complement to $\Sigma_{\pm}$. In fact, these two families of hyperplanes are a slits in the space of coefficients which touch the discriminant set of this equation.

Keywords: algebraic equation, hypergeometric series, integral representation, discriminant set.