УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А.И. Кожанов

Институт математики им. С.Л. Соболева,
пр. Академика Коптюга, 4,630090, г. Новосибирск, Россия, e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Аннотация. Для уравнений соболевского типа, называемых также псевдопараболическими, исследуется разрешимость некоторых задач нахождения вместе с решением неизвестного коэффициента, зависящего от временной переменной. Для рассматриваемых задач доказываются теоремы существования регулярных решений.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, неизвестный коэффициент, обратная задача, интегральное условие переопределения, регулярные решения.

Коэффициентными обратными задачами в литературе принято называть задачи, в которых вместе с решением того или иного уравнения с частными производными требуется найти также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического и гиперболического типов; в исследование разрешимости таких задач существенный вклад внесли М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, Ю.Е. Аниконов, А.И. Прилепко, Ю.Я. Белов, Д.С. Аниконов, А.М. Денисов, А. Лоренци, М.И. Иванчов, С.И. Кабанихин, Б.А. Бубнов, Г.Н. Ерохин, В. Исаков, Д.Г. Орловский, Дж. Кэннон, М. Клибанов, М. Ямамото (достаточно полную библиографию работ последнего времени, связанных с исследованием разрешимости коэффициентных обратных задач для уравнений с частными производными, можно найти в монографиях [1–14]). Значительно менее изученными представляются коэффициентные обратные задачи для неклассических уравнений; в частности, для уравнений соболевского типа. Близкие по постановке задачи, но для уравнений второго порядка по времени (в настоящей работе изучаются коэффициентные обратные задачи для уравнений соболевского типа первого порядка по времени) рассматривались в работах автора [15, 16]. В работах [17–21] изучались некоторые обратные задачи для псевдопараболических уравнений, но эти задачи существенно отличались по постановке от рассматриваемых в настоящей работе.

Используемая в настоящей работе техника основана на переходе от исследуемой обратной задачи к новой краевой задаче для так называемого «нагруженного» [22, 23] уравнения с частными производными, доказательство ее разрешимости и далее доказательство того, что решение нагруженного уравнения порождает решение рассматриваемой обратной задачи (примеры использования данной техники можно найти в указанных выше работах [15, 16]).

Отметим также следующее. Интерес со стороны автора к обратным задачам с неизвестным коэффициентом, зависящим лишь от временной переменной, объясняется не только стремлением к изучению новых математических задач, но и тем, что они возникают в приложениях — в задачах управления [24], в задачах со свободной границей [25, 26].

Работа поддержана РФФИ (грант 09–01–00422а), аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала» (грант АХ–23/11 пр. от 12 декабря 2008 г.)

Перейдем к содержательной части работы.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты, бесконечнодифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$, $i,j = 1,\dots,n$, $b(x,t)$, $K(x,t)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $\mu(t)$ — заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, функции. Далее, пусть B_1 и B_2 суть дифференциальные операторы

$$B_1 u = b^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + b^i(x,t)u_{x_i}, \quad B_2 u = b^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + b^i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Обратная задача I: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$u_t - \Delta u_t - B_1 u + q(t)u = f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = 0, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} K(x,t)u(x,t)\,dx = \mu(t), \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

Обратная задача II: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$q(t)u_t - \Delta u_t - B_2 u = f(x,t), \tag{5}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2)–(4).

В рассматриваемых обратных задачах I и II условия (2) и (3) есть условия обычной первой начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа первого порядка по времени, условие же (4) есть интегральное условие переопределения, наличие которого диктуется наличием дополнительной неизвестной функции.

Обозначим через $\overset{\circ}{V}$ следующее пространство

$$\overset{\circ}{V} = \{v(x,t): \quad v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$
$$v_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega))\};$$

норму в этом пространстве определим следующим образом

$$\|v\|_{\overset{\circ}{V}} = \|v\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|\Delta v\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|\Delta v_t\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}.$$

Для компактности формулировки теоремы о разрешимости обратной задачи I понадобятся некоторые предварительные сведения и обозначения.

Пусть β есть положительное число, $\widetilde{B}_1$ есть оператор $B_1 - \beta\Delta$. При выполнении условий ограниченности функций $b^{ij}(x,t)$ и $b^i(x,t)$ для функций $v(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{V}$ для почти всех t из отрезка $[0,T]$ выполняется неравенство

$$\|\widetilde{B}_1 v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le b_1\|\Delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + b_2\|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{6}$$

Положим

$$F(t) = \int\limits_{\Omega} K(x,t) f(x,t)\, dx, \quad h(t) = \frac{F(t) - \mu'(t)}{\mu(t)}, \quad \mu_0 = \min_{0 \le t \le T} \mu(t).$$

Пусть $v(x,t)$ есть произвольная функция из пространства $\overset{\circ}{V}$. Определим функции $\varphi(t,v)$ и $q(t,v)$:

$$\varphi(t,v) = \int\limits_{\Omega} K_t(x,t) v(x,t)\, dx + \int\limits_{\Omega} K(x,t) \Delta v_t(x,t)\, dx + \int\limits_{\Omega} K(x,t) B_1 v(x,t)\, dx,$$

$$q(t,v) = h(t) + \frac{\varphi(t,v)}{\mu(t)}.$$

Если функции $h(t)$, $K(x,t)$, $K_t(x,t)$, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$, $i,j = 1,\dots,n$, ограничены, число μ_0 положительно, то имеют место неравенства

$$|q(t,v_1) - q(t,v_2)| \le m_0 \|v_1 - v_2\|_{\overset{\circ}{V}}, \tag{7}$$

$$\varphi^2(t,v) \le m_1 \int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\, dx + m_2 \int\limits_{\Omega} [\Delta v(x,t)]^2\, dx + m_3 \int\limits_{\Omega} [\Delta v_t(x,t)]^2\, dx, \tag{8}$$

в которых $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$ и $v(x,t)$ суть произвольные функции из пространства $\overset{\circ}{V}$, постоянные m_0, m_1, m_2 и m_3 определяются функциями $\mu(t)$, $K(x,t)$, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$.

Положим далее

$$h_0 = \min_{0 \le t \le T} h(t), \quad h_1 = \max_{0 \le t \le T} h(t), \quad b_0 = \min(1 + b_1, 1 + b_2),$$

$$N_1 = \int\limits_{\Omega} u_0^2(x)\, dx + 2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_{0x_i}^2(x)\, dx + \int\limits_{\Omega} [\Delta u_0(x)]^2\, dx + 2\int\limits_{Q} f^2\, dx\, dt,$$

$$N_2 = N_1 \exp(2b_0 T), \quad N_3 = 4(\beta^2 + b_1 + b_2) N_2 + 4 \operatorname*{vrai\,max}_{0 \le t \le T} \left[\int\limits_{\Omega} f^2(x,t)\, dx \right],$$

$$N_4 = N_3 + 8 N_2 h_1, \quad R_1 = \frac{N_4 + 4N_2^2(m_1 + m_2)}{1 - 4N_2 m_3}, \quad R_2 = 2N_2 m_0^2 T \exp(2b_0 T),$$

$$R_3 = 4N_2 m_0^2 + 4(\beta^2 + b_1 + b_2 + \mu_0^2 h_0^2) R_2.$$

Теорема 1 *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} b^{ij}(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad b^i(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad i,j = 1,\dots,n, \quad K(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \\ \mu(t) \in C^1([0,T]), \quad f(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)), \quad u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega); \end{gathered} \tag{9}$$

$$\mu_0 > 0, \quad h_0 > 0; \tag{10}$$

$$4N_2 m_3 < 1, \quad R_2 + R_3 < 1, \quad h_1 + m_1^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{1}{2}} + m_2^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{1}{2}} + m_3^{\frac{1}{2}} R_1^{\frac{1}{2}} \le \mu_0 h_0; \tag{11}$$

$$\int\limits_{\Omega} K(x,0)u_0(x)\,dx = \mu(0). \tag{12}$$

Тогда обратная задача I имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in \overset{\circ}{V}$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство. Воспользуемся комбинацией метода срезок и метода неподвижной точки.

Заметим прежде всего, что вследствие условия (9) и первого неравенства условия (10) будут выполняться неравенства (7) и (8).

Определим срезывающую функцию $G(\xi)$:

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, & \textit{если} \quad |\xi| \le h_0\mu_0, \\ h_0, & \textit{если} \quad \xi > h_0\mu_0, \\ -h_0, & \textit{если} \quad \xi < -h_0\mu_0. \end{cases}$$

Далее определим функцию $\tilde{q}(t,v)$:

$$\tilde{q}(t,v) = h(t) + \frac{1}{\mu(t)} G(\varphi(t,v));$$

очевидно, что функция $\tilde{q}(t,v)$ будет неотрицательной при $t \in [0,T]$, $v(x,t) \in \overset{\circ}{V}$.

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$u_t - \Delta u_t - B_1 u + \tilde{q}(t,u)u = f(x,t) \tag{13}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Разрешимость краевой задачи (13), (2), (3) докажем с помощью теоремы о сжимающих отображениях.

Пусть $v(x,t)$ есть функция из пространства $\overset{\circ}{V}$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$u_t - \Delta u_t - B_1 u + \tilde{q}(t,v)u = f(x,t) \tag{13_v}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Краевая задача (13_v), (2), (3) представляет собой первую начально-краевую задачу для линейного уравнения соболевского типа; при выполнении условия (9) эта задача разрешима в пространстве $\overset{\circ}{V}$ — см. [27, 28]. Следовательно, рассматриваемая краевая задача порождает оператор Φ, переводящий пространство $\overset{\circ}{V}$ в себя: $\Phi(v) = u$. Покажем, что оператор Φ имеет в пространстве $\overset{\circ}{V}$ неподвижную точку.

Интегрируя по частям в равенстве

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} [u_\tau - \Delta u_\tau - \beta\Delta u - \widetilde{B}_1 u + \tilde{q}(t,v)u](u - \Delta u)\,dx\,d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} f(u - \Delta u)\,dx\,d\tau,$$

учитывая неотрицательность функции $\tilde{q}(t,v)$, используя неравенство (6), а также неравенство Юнга, получаем, что для решений краевой задачи (13_v), (2), (3) выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega}\{u^2(x,t)+[\Delta u(x,t)]^2\}\,dx \le N_1 + 2b_0\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[u^2+(\Delta u)^2]\,dx\,d\tau.$$

Из этого неравенства и леммы Гронуолла следует, что для решения $u(x,t)$ краевой задачи (13_v), (2), (3) имеет место первая априорная оценка

$$\int\limits_{\Omega}\{u^2(x,t)+[\Delta u(x,t)]^2\}\,dx \le N_2. \tag{14}$$

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{\Omega}[u_t(x,t)-\Delta u_t(x,t)-B_1u(x,t)+\tilde{q}(t,v)u(x,t)]\Delta u_t(x,t)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} f(x,t)\Delta u_t(x,t)\,dx.$$

Это равенство легко преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^n\int\limits_{\Omega}u^2_{x_it}(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega}[\Delta u(x,t)]^2\,dx = \int\limits_{\Omega}f(x,t)\Delta u_t(x,t)\,dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega}B_1u(x,t)\Delta u_t(x,t)\,dx - \tilde{q}(t,v)\int\limits_{\Omega}u(x,t)\Delta u_t(x,t)\,dx.$$

Оценивая правую часть данного равенства с помощью неравенства Юнга, а также используя неравенства (6) и (14), получаем оценку

$$\int\limits_{\Omega}[\Delta u_t(x,t)]^2\,dx \le N_3 + 4N_2\tilde{q}^2(t,v). \tag{15}$$

Очевидное неравенство $|\tilde{q}(t,v)| \le h_1 + |\varphi(t,v)|$, а также неравенство (8) дают возможность продолжить оценку (15):

$$\int\limits_{\Omega}[\Delta u_t(x,t)]^2\,dx \le N_4 + 4N_2\left\{m_1\int\limits_{\Omega}v^2(x,t)\,dx + m_2\int\limits_{\Omega}[\Delta v(x,t)]^2\,dx + \right.$$

$$\left. + m_3\int\limits_{\Omega}[\Delta v_t(x,t)]^2\,dx\right\}. \tag{16}$$

Определим множество W:

$$W = \{v(x,t) : \int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega} [\Delta v(x,t)]^2\,dx \le N_2, \ \int\limits_{\Omega} [\Delta v_t(x,t)]^2\,dx \le R_1\}.$$

Очевидно, что множество W замкнуто и ограничено в пространстве $\overset{\circ}{V}$. Далее, вследствие первого неравенства условия (11), указанного выше выбора числа R_1 и неравенств (14) и (16) при принадлежности функции $v(x,t)$ множеству W для решений $u(x,t)$ краевой задачи (13_v), (2), (3) будут выполняться неравенства, определяющие множество W. Следовательно, оператор Φ переводит множество W в себя. Покажем, что оператор Φ будет сжимающим на множестве W.

Пусть $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ суть функции из множества W, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — решения краевых задач (13_{v_1}), (2), (3) и (13_{v_2}), (2), (3) соответственно, $v(x,t) = v_1(x,t) - v_2(x,t)$, $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Имеют место равенства

$$u_t - \Delta u_t - B_1 u + \tilde{q}(t,v_1)u = [\tilde{q}(t,v_2) - \tilde{q}(t,v_1)]u_2; \tag{17}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{18}$$

$$u(x,t)|_S = 0. \tag{19}$$

Повторяя доказательство оценки (14) и используя неравенство (7), получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \{u^2(x,t) + [\Delta u(x,t)]^2\}\,dx \le 2N_2 m_0^2 T \exp(2b_0 T)\|v\|^2_{\overset{\circ}{V}} = R_2\|v\|^2_{\overset{\circ}{V}}. \tag{20}$$

Далее, повторяя доказательство неравенства (16), используя неравенства (7) b (20), получаем вторую оценку

$$\int\limits_{\Omega} [\Delta u_t(x,t)]^2\,dx \le R_3\|v\|^2_{\overset{\circ}{V}}. \tag{21}$$

Оценки (20) и (21) вместе со вторым неравенством условия (11) и означают, что оператор Φ будет сжимающим на множестве W.

Согласно теореме о сжимающих отображениях, оператор Φ имеет на множестве W неподвижную точку. Эта неподвижная точка представляет собой решение краевой задачи (13), (2), (3). Вследствие третьего неравенства условия (11) для решения $u(x,t)$ данной краевой задачи будет выполняться равенство

$$G(\varphi(t,u)) = \varphi(t,u).$$

Положим

$$q(t) = h(t) + \frac{\varphi(t,u)}{\mu(t)}. \tag{22}$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1). Покажем, что для функции $u(x,t)$ выполняется условие (4).

Умножим уравнение (1) с функцией $q(t)$, определенной равенством (22), на функцию $K(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω. Полученное равенство и представление функции $q(t)$ дадут равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_{\Omega} K(x,t)u(x,t)\,dx - \mu(t)\right] = 0.$$

Из этого равенства и из условия (12) и следует, что для найденной функции $u(x,t)$ выполняется условие переопределения (4).

Принадлежность функций $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна.

Теорема доказана.

Перейдем к исследованию обратной задачи II.

Положим

$$\mu_1 = \min_{0 \le t \le T} \mu'(t), \quad k_0 = \min_{0 \le t \le T} F(t)$$

(ниже будет предполагаться, что эти числа положительны). Для произвольной функции $v(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{V}$ определим функции $\psi_1(t,v)$, $\psi_2(t,v)$ и $q_1(t)$:

$$\psi_1(t,v) = \int_\Omega K(x,t)\Delta v_t(x,t)\,dx + \int_\Omega K(x,t)B_2 v(x,t)\,dx,$$

$$\psi_2(t,v) = \int_\Omega K_t(x,t)v(x,t)\,dx,$$

$$q_1(t,v) = \frac{F(t) + \psi_1(t,v)}{\mu'(t) - \psi_2(t,v)}.$$

Пусть оператор B_2 таков, что для всех функций $v(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{V}$ выполняется неравенство

$$\int_\Omega [B_2 v(x,t)]^2\,dx \le \overline{b}_2 \int_\Omega [\Delta v(x,t)]^2\,dx. \tag{6'}$$

Далее, для функции $v(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{V}$ выполняется неравенство

$$\int_\Omega v^2(x,t)\,dx \le c_0 \int_\Omega [\Delta v(x,t)]^2\,dx \tag{6''}$$

с постоянной c_0, определяющейся лишь областью Ω (см. [29]).

Пусть μ_2 есть фиксированное число из интервала $(0,\mu_1)$. Определим срезывающие функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$:

$$G_1(\xi) = \begin{cases} \xi, & \textit{если} \quad |\xi| \le k_0, \\ k_0, & \textit{если} \quad \xi > k_0, \\ -k_0, & \textit{если} \quad \xi < -k_0, \end{cases} \qquad G_2(\xi) = \begin{cases} \xi, & \textit{если} \quad |\xi| \le \mu_2, \\ \mu_2, & \textit{если} \quad \xi > \mu_2, \\ -\mu_2, & \textit{если} \quad \xi < -\mu_2. \end{cases}$$

Определим функцию $\tilde{q}_1(t,v)$:

$$\tilde{q}_1(t,v) = \frac{F(t) + G_1(\psi_1(t,v))}{\mu'(t) - G_2(\psi_2(t,v))}.$$

Заметим, что для любых функций $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{V}$ выполняется неравенство

$$|\tilde{q}_1(t,v_1) - \tilde{q}_1(t,v_2)| \le \overline{m}_0 \|v_1 - v_2\|_{\overset{\circ}{V}}$$

с постоянной $\overline{m}_0$, определяющейся функциями $f(x,t)$, $\mu(t)$, $K(x,t)$, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$, $i,j = 1,\dots,n$, $b(x,t)$, а также числом μ_2.

Положим далее

$$M_1 = \left\{ 2 \operatorname*{vrai\,max}_{0\le t\le T} \int_\Omega f^2(x,t)\,dx + 2\overline{b}_2 \int_\Omega [\Delta u_0(x)]^2\,dx \right\} \exp(4\overline{b}_2 T^2),$$

$$M_2 = 2T^2 M_1 + 2\int_\Omega [\Delta u_0(x)]^2\,dx, \quad M_3 = 2c_0 \overline{m}_0^2 M_1 \exp(2T^2 \overline{b}_2),$$

$$M_0 = M_3[1 + (1+c_0)T^2],$$

$$K_1 = \max_{0\le t\le T}\left(\int K^2(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad K_2 = \max_{0\le t\le T}\left(\int K_t^2(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2 *Пусть выполняются условия* (9) *и* (12) *теоремы* 1, *а также условия*

$$\mu_1 > 0, \quad k_0 > 0; \tag{10'}$$

$$M_0 < 1, \quad K_1\left[M_1^{\frac{1}{2}} + (\bar{b}_2 M_2)^{\frac{1}{2}}\right] \le k_0, \quad K_2(c_0 M_2)^{\frac{1}{2}} \le \mu_2. \tag{11'}$$

Тогда обратная задача II *имеет решение* $\{u(x,t), q(x,t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in \overset{\circ}{V}$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство этой теоремы проводится в целом аналогично доказательству теоремы 1. Вспомогательной линеаризованной задачей здесь будет следующая: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$\tilde{q}_1(t,v)u_t - \Delta u_t - B_2 u = f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Разрешимость ее при принадлежности функции $v(x,t)$ пространству $\overset{\circ}{V}$ известна, априорные оценки и теорема о сжимающих отображениях позволят установить разрешимость соответствующей нелинейной задачи и далее — разрешимость обратной задачи II.

Сделаем несколько замечаний.

1. В множестве W и в соответствующем множестве

$$W_1 = \left\{ v(x,t) \in \overset{\circ}{V} \cdot \int_\Omega v^2(x,t)\,dx \le c_0 M_2, \right.$$

$$\left. \int_\Omega [\Delta v(x,t)]^2 dx \le M_2, \ \int_\Omega [\Delta v_t(x,t)]^2 dx \le M_1 \right\}$$

обратные задачи I и II имеют ровно одно решение.

2. Первое и второе неравенства условия (11) выполняются, например, в случае малости числа N_2; число же N_2 будет малым, если малы функции $u_0(x)$, $u_{0x_i}(x)$, $i = 1,\dots,n$,

$\Delta u_0(x)$, $f(x,t)$, а также если мала область Ω. Третье неравенство условия (11) выполняется, например, в случае, если число N_2 мало и выполняется

$$\min_{0\le t\le T}[F(t)-\mu'(t)]>0, \quad \mu_0>1.$$

Другими словами, множество обратных задач I, для которых выполняются все условия теоремы 1, не пусто.

3. Условие (11′) теоремы 2 выполняется, например, в случае малости функций $f(x,t)$, $\Delta u_0(x)$ и малости области Ω.

Литература

1. В.Г. Романов. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, М.: Наука, 1972.
2. Yu.E. Anikonov. Multidimensional Inverse and Ill-Posed Problems for Differential Equations, Utrecht: VSP, 1995.
3. Yu.E. Anikonov. Formulas in Inverse and Ill-Posed Problems, Utrecht: VSP, 1997.
4. Yu.E. Anikonov, B.A. Bubhov, G.N. Erokhin. Inverse and Ill-Posed Source Problems, Utrecht: VSP, 1997.
5. A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York and Basel: Marcel Dekker, Inc., 1999.
6. A.M. Denisov. Elements of the Theory of Inverse Problems, Utrecht: VSP, 1999.
7. Yu.E. Anikonov. Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations, Utrecht: VSP, 2001.
8. A. Lorenzi. An Introduction to Mathematical Problems via Functional Analysis, Utrecht: VSP, 2001.
9. Yu.Ya. Belov. Inverse Problems for Partial Differential Equations, Utrecht: VSP, 2002.
10. V.G. Romanov. Investigation Methods for Inverse Problems, Utrecht: VSP, 2002.
11. M.M. Lavrentiev. Inverse Problems of Mathematical Physics, Utrecht: VSP, 2003.
12. V. Isakov. Inverse Problems for Partial Differential Equations, Berlin: Springer, 2006.
13. M. Ivanchov. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, VNTL Publishers, 2003.
14. В.Г. Романов. Устойчивость в обратных задачах, М.: Научный мир, 2005.
15. А.И. Кожанов. О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравнениях составного типа // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. Т. 8, вып. 3. 2008. С. 81–99.

16. А.И. Кожанов. О разрешимости обратной задачи нахождения старшего коэффициента в уравнении составного типа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Вып. 1, № 15. 2008. С. 27–36.

17. Э.Р. Атаманов, М.Ш. Мамаюсупов. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений, Фрунзе: Илим, 1990.

18. Б.С. Аблабеков. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений, Бишкек: Илим, 2001.

19. Б.С. Аблабеков. Обратная задача для уравнения Бенджамена — Бона — Махони // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования. Ханты-Мансийск: Югорский НИИ информационных технологий, 2005. С. 6–9.

20. С.Г. Пятков. О разрешимости некоторых классов обратных задач // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования. Ханты-Мансийск: Югорский НИИ информационных технологий, 2005. С. 61–66.

21. А.И. Кожанов. О разрешимости некоторых нелинейных обратных задач для уравнений составного типа // Материалы III Международной конференции "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики". Нальчик: 2006. С. 159–164.

22. А.М. Нахушев. Уравнения математической биологии, М.: Высшая школа, 1995.

23. М.Т. Дженалиев. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений, Алматы: Институт теоретической и прикладной математики, 1995.

24. Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations // Inverse Problems. V. 4. 1988. P. 35–45.

25. М.І. Іванчов. Редукція задачі з вильною межею для параболічного рівняння до оберненой задачі // Нелинейные граничные задачи. Донецк: Институт прикладной математики и механики, 2002, С. 73–83.

26. М.І. Іванчов. Обернена задача з вильнаю межею для рівняння теплопроводності // Украинский математический журнал. 2003. Т. 55, No. 7. С. 901–910.

27. С.Я. Якубов. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения, Баку: Элм, 1985.

28. A.I. Kozhanov. Composite Type Equations and Inverse Problems, Utrecht (Netherlands): VSP, 1999.

29. О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М.: Наука, 1973.

SOLVABILITY OF COEFFICIENT INVERSE PROBLEMS FOR SOME EQUATIONS OF SOBOLEV TYPE

A.I. Kozhanov

Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Akademika Koptjuga, 4, Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Abstract. By method of monotone operators, theorems on existence, uniqueness and methods of finding solutions are proved for some classes of nonlinear integral equations with potential type kernels in weighted complex Lebesgue spaces and also norm estimates of solutions are obtained.

Keywords: nonlinear integral equations, potential type operators, weighted Lebesgue spaces, method of monotone operators.