УДК 624.07:534.1

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРЕЦЕССИОННОГО ДВИЖЕНИЯ СТОЯЧИХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НА ОПОРАХ ОБОЛОЧКЕ С НЕРАСТЯЖИМОЙ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

А. И. ПОЛУНИН

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова

e-mail: polynin@intbel.ru

В статье на основе анализа математической модели динамики вращающейся на опорах оболочки типа Кирхгофа-Лява с нерастяжимой срединной поверхностью приведено доказательство свойств прецессионного движения возбужденных стоячих волн. Показано, что скорость прецессии может быть равна скорости вращения оболочки на опорах, что необходимо учитывать при математическом моделировании ее поведения.

Ключевые слова: динамика вращающейся оболочки с опорами, стоячая волна, прецессионное движение волны.

Введение

При математическом моделировании поведения вращающегося на опорах кольца, оболочке необходимо учитывать прецессию возбужденной действием внешних сил стоячей волны. В работе [1] приведено доказательство, что во вращающемся на опорах кольце, уравнения для которого получены на основе гипотезы растяжимости средней линии, стоячие волны могут прецессировать с угловой скоростью вращения кольца. В статье приведено доказательство, что в оболочке, уравнения для которой получены на основе гипотез Кирхгофа-Лява с учетом нерастяжимости срединной поверхности, прецессия стоячей волны также может происходить с угловой скоростью вращения оболочки.

Получение математической модели динамики оболочки и ее анализ

Для получения уравнений, описывающих поведение оболочки, используем уравнение Лагранжа второго рода. Для этого зададим декартову систему координат X_1, $У_1$, Z_1. Ось $O_1У_1$ является осью вращающейся оболочки. Для задания положения точек отсчетной поверхности оболочки, в качестве которой используем срединную поверхность, зададим цилиндрическую систему координат θ, r, $У$, где θ – угол, задающий положение точки на отсчётной поверхности относительно вертикали в начальный момент времени, r – радиус оболочки, $У$ – линейная координата вдоль оси оболочки, совпадающая с осью $У_1$. Начало системы координат находится в центре оболочки. Длина ее a, толщина h.

Перемещения точек отсчетной поверхности оболочки в процессе деформации в направлении радиуса r, координаты $У$ и касательной к поверхности оболочки обозначим соответственно $U_0(\theta)$, $W(\theta)$, $V(\theta)$.

Кроме линейных перемещений U_0, W, V точек отсчётной поверхности деформированной оболочки зададим угловой поворот $\gamma(\theta)$ образующей оболочки в плоскости, проходящей через радиус r и ось $У$. Такое задание деформации позволяет учесть различные перемещения точек оболочки при изменении координаты $У$, а также наличие опор. В этом случае радиальное перемещение U точки отсчётной поверхности, заданной координатами θ и $У$, имеет вид

$$U(\theta, У) = U_0(\theta) + \gamma(\theta)У \quad (1)$$

Величины линейных перемещений точек отсчетной поверхности оболочки и угловой поворот образующей зададим в виде рядов Фурье:

$$U_0 = \sum_{i=1}^{N} a_{ui} \cos(i(\theta + \varphi_{ui})) + \sum_{i=1}^{N} b_{ui} \sin(i(\theta + \varphi_{ui})), \tag{2}$$

$$V = \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{a_{ui}}{i}\right) \sin\left(i\left(\theta + \varphi_{ui}\right)\right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{b_{ui}}{i} \cos\left(i\left(\theta + \varphi_{ui}\right)\right) +$$
$$+У\left[\sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{a_{\gamma i}}{i}\right) \sin\left(i\left(\theta + \varphi_{\gamma i}\right)\right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{b_{\gamma i}}{i} \cos\left(i\left(\theta + \varphi_{\gamma i}\right)\right)\right], \tag{3}$$

$$W = \sum_{i=1}^{N} a_{wi} \cos(i(\theta + \varphi_{wi})) + \sum_{i=1}^{N} b_{wi} \sin(i(\theta + \varphi_{wi})), \tag{4}$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{N} a_{\gamma i} \cos(i(\theta + \varphi_{\gamma i})) + \sum_{i=1}^{N} b_{\gamma i} \sin(i(\theta + \varphi_{\gamma i})). \tag{5}$$

Здесь a_{ui}, b_{ui}, a_{wi}, b_{wi}, $a_{\gamma i}$, $b_{\gamma i}$ – обобщенные координаты, неизвестные функции времени t, которые надо определить, задают амплитуду колебаний; φ_{ui}, φ_{wi}, $\varphi_{\gamma i}$ – неизвестные функции времени, задающие прецессию стоячих волн, подлежащие определению; N – число учитываемых слагаемых ряда Фурье.

Формула для перемещения V получена из условия нерастяжимости срединной поверхности $V = -\int U d\theta$.

Примем, что оболочка касается опорных роликов по всей длине своих образующих, т.е. опорные ролики выставлены без ошибок. Тогда условиями, накладываемыми на обобщенные координаты оболочки, является равенство нулю радиальных перемещений U в точках опор, равенство нулю перемещений V в точках опор, а также равенство нулю перемещений оболочки W в направлении оси $У$ в точках опор. Так как оболочка вращается, то координаты θ точек оболочки, в связанной с ней системе координат, находящихся на опорах, определяем зависимостями $\pi - \alpha - \Omega t$ для одной опоры и $\pi + \alpha - \Omega t$ – для второй. Здесь Ω – угловая скорость вращения оболочки; 2α – угол между опорами. Тогда в точках опор в соответствии с формулами для U, V, W (1) – (5) имеем

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ui} \cos(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{ui})) + \sum_{i=1}^{N} b_{ui} \sin(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{ui})) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} У a_{\gamma i} \cos(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})) + \sum_{i=1}^{N} У b_{\gamma i} \sin(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma i})) = 0, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ui} \cos(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{ui})) + \sum_{i=1}^{N} b_{ui} \sin(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{ui})) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} У a_{\gamma i} \cos(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma i})) + \sum_{i=1}^{N} У b_{\gamma i} \sin(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma i})) = 0, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{a_{ui}}{i}\right) \sin\left(i\left(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{ui}\right)\right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{b_{ui}}{i} \cos\left(i\left(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{ui}\right)\right) +$$

$$+У\left[\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{a_{\gamma i}}{i}\right)\sin\left(i\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{b_{\gamma i}}{i}\cos\left(i\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)\right]=0, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{a_{ui}}{i}\right)\sin\left(i\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{b_{ui}}{i}\cos\left(i\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)+$$

$$+У\left[\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{a_{\gamma i}}{i}\right)\sin\left(i\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{b_{\gamma i}}{i}\cos\left(i\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)\right]=0, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{N}a_{wi}\cos(i(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{wi}))+\sum_{i=1}^{N}b_{wi}\sin(i(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{wi}))=0, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{N}a_{wi}\cos(i(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{wi}))+\sum_{i=1}^{N}b_{wi}\sin(i(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{wi}))=0. \quad (11)$$

Равенство нулю перемещений (6)-(9) для U, V в точках опор при любом значении координаты $У$ будут в том случае, если имеем зависимости

$$\sum_{i=1}^{N}a_{ui}\cos(i(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}))+\sum_{i=1}^{N}b_{ui}\sin(i(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}))=0, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{N}a_{\gamma i}\cos(i(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{\gamma i}))+\sum_{i=1}^{N}b_{\gamma i}\sin(i(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{\gamma i}))=0, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{N}a_{ui}\cos(i(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}))+\sum_{i=1}^{N}b_{ui}\sin(i(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}))=0, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{N}a_{\gamma i}\cos(i(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{\gamma i}))+\sum_{i=1}^{N}b_{\gamma i}\sin(i(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{\gamma i}))=0, \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{a_{ui}}{i}\right)\sin\left(i\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{b_{ui}}{i}\cos\left(i\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)=0, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{a_{\gamma i}}{i}\right)\sin\left(i\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{b_{\gamma i}}{i}\cos\left(i\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)=0, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{a_{ui}}{i}\right)\sin\left(i\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{b_{ui}}{i}\cos\left(i\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)=0, \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{a_{\gamma i}}{i}\right)\sin\left(i\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{b_{\gamma i}}{i}\cos\left(i\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{ui}\right)\right)=0. \quad (19)$$

Эти условия должны выполняться для любого значения времени t.

Таким образом, имеем 10 условий связи (10)-(19) на обобщенные координаты и соответственно 10 неопределенных множителей Лагранжа. Производные этих условий связи по обобщенным координатам имеют вид:

для a_{uj} $\quad e_1^{au}=\cos(j(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{uj})), e_2^{au}=\cos(j(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{uj})),$ (20)

$$e_3^{au}=-j^{-1}\sin(j(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{uj})), e_4^{au}=-j^{-1}\sin(j(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{uj})); \quad (21)$$

для b_{uj} $\quad e_1^{bu}=\sin(j(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{uj})), e_2^{bu}=\sin(j(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{uj})),$ (22)

$$e_3^{bu}=j^{-1}\cos(j(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{uj})), e_4^{bu}=j^{-1}\cos(j(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{uj})); \quad (23)$$

для $a_{\gamma j}$ $\quad e_5^{a\gamma}=\cos(j(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{\gamma j})), e_6^{a\gamma}=\cos(j(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{\gamma j})),$ (24)

$$e_7^{a\gamma} = -j^{-1}\sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})), e_8^{a\gamma} = -j^{-1}\sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})); \quad (25)$$

для $b_{\gamma j}$ $$e_5^{b\gamma} = \sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})), e_6^{b\gamma} = \sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})), \quad (26)$$

$$e_7^{b\gamma} = j^{-1}\cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})), e_8^{b\gamma} = j^{-1}\cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})); \quad (27)$$

для a_{wj} $$e_9^{aw} = \cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{wj})), e_{10}^{aw} = \cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{wj})); \quad (28)$$

для b_{wj} $$e_9^{bw} = \sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{wj})), e_{10}^{bw} = \sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{wj})); \quad (29)$$

для φ_{uj} $$e_1^{\varphi u} = -ja_{uj}\sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + jb_{uj}\cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})), \quad (30)$$

$$e_2^{\varphi u} = -ja_{uj}\sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + jb_{uj}\cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})), \quad (31)$$

$$e_3^{\varphi u} = -a_{uj}\cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) - b_{uj}\sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})), \quad (32)$$

$$e_4^{\varphi u} = -a_{uj}\cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) - b_{uj}\sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})); \quad (33)$$

для $\varphi_{\gamma j}$ $$e_5^{\varphi\gamma} = -ja_{\gamma j}\sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})) + jb_{\gamma j}\cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})), \quad (34)$$

$$e_6^{\varphi\gamma} = -ja_{\gamma j}\sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})) + jb_{\gamma j}\cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})), \quad (35)$$

$$e_7^{\varphi\gamma} = -a_{\gamma j}\cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})) - b_{\gamma j}\sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})), \quad (36)$$

$$e_8^{\varphi\gamma} = -a_{\gamma j}\cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})) - b_{\gamma j}\sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{\gamma j})); \quad (37)$$

для φ_{wj} $$e_9^{\varphi w} = -ja_{wj}\sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{wj})) + jb_{wj}\cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{wj})), \quad (38)$$

$$e_{10}^{\varphi w} = -ja_{wj}\sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{wj})) + jb_{wj}\cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{wj})). \quad (39)$$

Кинетическую энергию оболочки определяем по формуле

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mu_0[(\dot{V} + \Omega r_0 + \Omega U)^2 + (\dot{U} - \Omega V)^2 + \dot{W}^2]d\theta dУ, \quad (40)$$

где $\mu_0 = r\rho_0 h$; ρ_o — удельная плотность материала оболочки, а потенциальную в соответствии с гипотезами Кирхгофа-Лява

$$П = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_\theta\varepsilon_\theta + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_{\theta y}\varepsilon_{\theta y})dZd\theta dУ, \quad (41)$$

где σ_θ, σ_y — напряжения по координатам $\theta, У$ соответственно; $\sigma_{\theta y}$ – напряжение в плоскости $\theta У$; $\varepsilon_\theta, \varepsilon_y$ – деформации по осям $\theta, У$ соответственно; $\varepsilon_{\theta y}$ – сдвиг в плоскости $\theta У$.

В полученных зависимостях фигурируют неизвестные функции $\varphi_{ui}(t)$, $\varphi_{\gamma i}(t)$, $\varphi_{wi}(t)$, задающие прецессионное движение стоячих волн в оболочке. От вида этих функций зависит решение дифференциальных уравнений, описывающих поведение вращающейся оболочки на опорах.

Для выяснения характера прецессионного движения стоячих волн докажем следующее утверждение: при возникновении периодических колебаний во вращающейся с постоянной угловой скоростью на двух параллельных опорах оболочке с нерастяжимой срединной поверхностью прецессия волн $\varphi_{uj}(t)$, $\varphi_{\gamma j}(t)$, $\varphi_{wj}(t)$ $(j = 1,2,...,N)$ может происходить с угловой скоростью вращения оболочки.

Доказательство. Для получения зависимостей, описывающих изменение этих функций в соответствии с законами механики, будем рассматривать их как ещё одни координаты, меняющиеся во времени, задающие поведение системы. Тогда в соответствии с вариационными принципами механики в реальном движении будут реализовываться такие функции, что действие по Гамильтону будет иметь экстремум. Для получения требуемых зависимостей можно воспользоваться вариационным принципом Гамильтона, но с точки зрения объема требуемых выкладок более рациональным является использование уравнения Лагранжа второго рода. Таким образом, нахождение закона прецессии стоячих волн в оболочке сводится к нахождению дифференциальных уравнений для функций, задающих эту прецессию.

Обобщенными переменными, описывающими поведение оболочки, будут $a_{ui}, b_{ui}, a_{\gamma i}, b_{\gamma i}, a_{wi}, b_{wi}, \varphi_{ui}, \varphi_{\gamma i}, \varphi_{wi} (i = 1, 2, ..., N)$.

Дифференциальные уравнения для $a_{uj}, b_{uj}, \varphi_{uj}$ *(j=1,2,...,N)* в соответствии с уравнениями Лагранжа второго рода и формулами (20)-(23), (30), (33), (40), (41) имеют вид

$$\pi\mu_0 a\left[C_j\ddot{a}_{uj} + n_j\ddot{\varphi}_{uj}b_{uj} + (n_j\dot{\varphi}_{uj} - \frac{2\Omega}{j})\dot{b}_{uj}\right] -$$
$$-\pi\mu_0 a\left[(\frac{2\Omega}{j} - n_j\dot{\varphi}_{uj})\dot{b}_{uj} + ((\dot{\varphi}_{uj} - \Omega)^2 + (\dot{\varphi}_{uj}j - \frac{\Omega}{j})^2)a_{uj}\right] +$$
$$+\frac{\pi a D_\theta}{r_0^3}K_j^2 a_{uj} = \lambda_1^H \cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + \lambda_2^H \cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) -$$
$$-\lambda_3^H j^{-1}\sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) - \lambda_4^H j^{-1}\sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})), \qquad (42)$$

$$\pi\mu_0 a\left[C_j\ddot{b}_{uj} - n_j\ddot{\varphi}_{uj}a_{uj} + (\frac{2\Omega}{j} - n_j\dot{\varphi}_{uj})\dot{a}_{uj}\right] -$$
$$-\pi\mu_0 a\left[(n_j\dot{\varphi}_{uj} - \frac{2\Omega}{j})\dot{a}_{uj} + ((\dot{\varphi}_{uj} - \Omega)^2 + (\dot{\varphi}_{uj}j - \frac{\Omega}{j})^2)b_{uj}\right] +$$
$$+\frac{\pi a D_\theta}{r_0^3}K_j^2 b_{uj} = \lambda_1^H \sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + \lambda_2^H \sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) +$$
$$+\lambda_3^H j^{-1}\cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + \lambda_4^H j^{-1}\cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})), \qquad (43)$$

$$\pi\mu_0 a\left[n_j\ddot{a}_{uj}b_{uj} - n_j\ddot{b}_{uj}a_{uj} + m_j\ddot{\varphi}_{uj}a_{uj}^2 +\right.$$
$$\left.+2(m_j\dot{\varphi}_{uj} - 2\Omega)a_{uj}\dot{a}_{uj} + m_j\ddot{\varphi}_{uj}b_{uj}^2 + 2(m_j\dot{\varphi}_{uj} - 2\Omega)b_{uj}\dot{b}_{uj}\right] =$$
$$= \lambda_1^H\left[-a_{uj}j\sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + b_{uj}j\cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj}))\right] +$$
$$+\lambda_2^H\left[-a_{uj}j\sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + b_{uj}j\cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj}))\right] -$$
$$-\lambda_3^H\left[a_{uj}\cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + b_{uj}\sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj}))\right] -$$
$$-\lambda_4^H\left[a_{uj}\cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + b_{uj}\sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj}))\right]. \qquad (44)$$

Здесь $C_j = 1 + j^{-2}$, $n_j = j + j^{-1}$, $K_j = j^2 - 1$, $m_j = 1 + j^2$, $\lambda_i^H (i = 1, 2, ..., 6)$ – неопределённые множители Лагранжа. Остальные коэффициенты являются функциями параметров оболочки.

Анализ уравнений (42), (43) и (44) показывает, что уравнение (44) для φ_{uj} может быть получено путём умножения уравнения (42) для a_{uj} на переменную b_{uj}, вычитания из этого произведения уравнения (43) для b_{uj}, умноженного на a_{uj}, и умножения этой разности на j. Отсюда следует, что дифференциальное уравнение для φ_{uj} является комбинацией дифференциальных уравнений для a_{uj} и b_{uj}. Значит, решение дифференциального уравнения для φ_{uj} является комбинацией решений дифференциальных уравнений для a_{uj}, b_{uj}. В уравнения для a_{uj}, b_{uj} входят функции φ_{uj}, отсюда следует, что они могут быть произвольными. Будем рассматривать установившиеся периодические колебания оболочки, которые могут возникнуть вследствие действия возмущений. В этом случае дифференциальные уравнения (42), (43) для a_{uj}, b_{uj} должны быть линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Из этого условия найдём зависимости для φ_{uj}. Для того, чтобы коэффициенты в дифференциальных уравнениях были константами, необходимо, чтобы $\dot{\varphi}_{uj}$ были константами. Другим условием для определения φ_{uj} является условие, что прецессионное движение волн φ_{uj} осуществляется только внутри диапазона углов, ограниченного опорами. В случае, если $\dot{\varphi}_{uj}$ константы, это может быть только при $\dot{\varphi}_{uj} = \Omega$ ($j = 1,2,\ldots,N$). Тогда в условиях связи (12), (14), (16), (18), а также у множителей перед неопределенными множителями Лагранжа (20)-(39), аргументы под знаком синуса и косинуса являются постоянными коэффициентами, т.е.

$$\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj} = \pi - \alpha, \qquad \pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj} = \pi + \alpha,$$

$$\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{vj} = \pi - \alpha, \qquad \pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{vj} = \pi - \alpha,$$

и система уравнений (42), (43) вместе с условиями связи (12), (14), (16), (18) является системой уравнений с постоянными коэффициентами, имеющей периодические решения.

Осуществляя аналогичный анализ для уравнений, описывающих поведение переменных a_{vj}, b_{vj}, a_{wj}, b_{wj}, получим также, что $\dot{\varphi}_{vj} = \Omega, \dot{\varphi}_{wj} = \Omega$ ($j = 1,2,\ldots,N$).

Таким образом, доказано, что в случае возникновения во вращающейся оболочке стоячих волн их прецессионное движение может происходить с угловой скоростью вращения оболочки.

Полученный результат может использоваться для получения дифференциальных уравнений, описывающих поведение вращающихся на опорах оболочек, применяемых при математическом моделировании технических систем.

Литература

1. Полунин А. И. О характере прецессионного движения стоячих волн во вращающемся кольце с опорами // Известия вузов. Машиностроение. – 2008. – № 10. – С. 27 – 33.

ABOUT MATHEMATIC MODELING PRECESSION MOVEMENT OF STANDING WAVES INTO CASE WITH NON-STRETCHABLE MEDIAN SURFACE, ROTATING ON THE SUPPORTS

A. I. POLUNIN

Belgorod Shuknov State Technological University

e-mail: polynin@intbel.ru

The article presents the proof of the fact that when a rotating casing with the non-stretchable median surface rotates on two supports, the stationary wave resulting from the agitation can precess with angular velocity equal to that of the casing.

Key words: Dynamics of rotating casing on supports, Stationary wave, Precession Wave Motion.