

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ НАГРЕТЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В ВЯЗКИХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗООБРАЗНЫХ СРЕДАХ

Н.В. Малай¹⁾, А.В.Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: malay@mail.ru

Разработан математический метод решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса с учетом зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Используя найденное решение, рассмотрена задача о влиянии нагрева поверхности частицы на силу и скорость ее гравитационного движения. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может существенно отличаться от температуры окружающей ее среды. Численные оценки показали, что нагрев поверхности частицы существенно влияет на силу сопротивления и скорость гравитационного падения. Проведено сравнение с известными данными эксперимента, которое показало расхождение не более 15%, что указывает на правомерность разработанного математического метода.

Ключевые слова: линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса, гравитационное движение, движение нагретой частицы в поле силы тяжести.

1. Решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса с учётом зависимости коэффициентов переноса от температуры

1. Введение. Вследствие общей нелинейной природы получить точные решения уравнений гидродинамики не представляется возможным [1-3]. До настоящего времени не увенчались успехом усилия, направленные на разрешение принципиальных вопросов, таких как, например, имеют ли уравнения гидродинамики при дополнительных граничных и начальных условиях единственное решение, насколько удовлетворительно описывают получаемые решения реальные течения и др.

Как показано в [1-3], богатейший теоретический и экспериментальный материал, накопленный в гидродинамике, по-видимому, недостаточен для строгого математического анализа происходящих в жидкости и газе явлений.

Многочисленные парадоксы гидродинамики указывают на то, что до окончательной теории здесь еще далеко. Поэтому исследование линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса позволяет найти пути решения общего уравнения движения вязкой неизотермической газообразной среды.

При рассмотрении многих прикладных задач, связанных с описанием движения отдельных частиц в вязких неизотермических газообразных средах возникает, как правило, вопрос о нахождении полей скорости, температуры, давления и т.д., которые определяются путем решения общего уравнения движения вязкой неизотермической среды. Эти поля необходимы для нахождения действующих на частицы сил, скоростей их упорядоченного движения, определения элементов тепло- и массопереноса.

В произвольной ортогональной криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) общая система гидродинамических уравнений для квазистационарного случая включает в себя [3 – 6]:

– уравнение Навье-Стокса ($i = 1, 2, 3$)

$$\rho \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k}}{H_k} \frac{\partial U_{x^i}}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k}^2}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k} U_{x^i}}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} \right\} =$$

$$= \rho F_{x^i} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial P}{\partial x^i} + \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 H_i}{H_k} \sigma_{ik} \right) - \frac{\sigma_{kk}}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} \right\}, \quad (1)$$

– уравнение непрерывности

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \rho U_{x^i} \right) = 0, \quad (2)$$

– уравнение конвективной теплопроводности ($i = 1, 2, 3$)

$$\rho c_p \left(\sum_{k=1}^3 U_{x^k} \right) \frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \lambda(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial x^i} \right), \quad (3)$$

где через U_{x^i} , F_{x^i} и σ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) обозначены физические составляющие массовой скорости U , силы F и тензора полных напряжений

$$\sigma_{ik} = \mu \left\{ \frac{1}{H_k} \frac{\partial U_{x^i}}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial U_{x^k}}{\partial x^i} - \frac{1}{H_i H_k} \left(U_{x^i} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} + U_{x^k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} \right) + \right.$$

$$\left. + 2\delta_k^i \sum_{n=1}^3 \frac{U_{x^n}}{H_n H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x^n} - \frac{2}{3} \delta_k^i \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_n} U_{x^n} \right) \right\}, \quad (4)$$

$H_i(x)$ — коэффициенты Ламэ; P , T и ρ — соответственно давление, температура и плотность вязкой среды; c_p , n , m , μ и λ — соответственно, удельная теплоемкость при постоянном давлении, концентрация, масса, коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности газообразной среды.

Уравнения (1) – (3) вместе с зависимостями коэффициента теплопроводности $\lambda = \lambda(\rho, T)$, плотности $\rho = \rho(T)$ и динамической вязкости $\mu = \mu(\rho, T)$ от температуры, а также определяемые конкретной задачей граничными условиями позволяют полностью описать состояние вязкой среды (газа или жидкости), т.е. позволяют определить давление, плотность, компоненты массовой скорости и температуру при неізотермическом течении вязкой среды. Здесь и далее индексы "e" и "i" будем относить к газообразной среде и частице. Индексом "S" будем обозначать значения физических величин, взятых при средней относительной температуре частицы, равной T_{iS} , а индексом " ∞ " — значения физических величин, характеризующих газообразную среду на далёком расстоянии от частицы.

Как отмечалось выше, вследствие общей нелинейной природы получить точные решения системы гидродинамических уравнений не представляется возможным, т.е. общего метода построения решений для вязкой неізотермической среды не существует. В гидродинамике были разработаны приближенные методы, позволяющие в той или иной мере упростить систему гидродинамических уравнений и приспособить ее к характеру отдельных типов конкретных физических задач. Большинство конкретных задач о движении вязкой неізотермической среды, имеющих тот или иной практический интерес, решены именно на основании приближенных уравнений движения вязкой неізотермической среды. Они получаются из полных уравнений с помощью некоторых упрощений путем отбрасывания (полностью или частично) некоторых членов в уравнениях и граничных условиях. Эти методы основаны обычно на использовании малых параметров, называемых в научной литературе безразмерными комбинациями (числами Рейнольдса, Пекле, Эйлера и т.д.), которые подходящим способом определяются из исходных уравнений, граничных и начальных условий. Малость этих безразмерных комбинаций позволяет упростить полную систему гидродинамических уравнений.

Для решения системы уравнений (1) – (3) сделаем следующие физические допущения.

1. Движение частицы в газообразной среде рассматривается при значительных (больших) относительных перепадах температуры. Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности температуры на

поверхности частицы и температуры области, далёкой от этой частицы. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство $(T_{iS} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$. При выполнении этого неравенства коэффициенты молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотность можно считать постоянными величинами. Если $(T_{iS} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim O(1)$, то относительный перепад температуры считается значительным. В этом случае уже нельзя считать эти величины постоянными. В работе при описании свойств газообразной среды и частицы рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры [7, 8], таким образом

$$\begin{aligned} \mu_e &= \mu_{e\infty} t_e^\beta, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha, \quad \rho_e = \rho_{e\infty} t_e, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\omega, \\ \mu_{e\infty} &= \mu_e(T_{e\infty}), \quad \rho_{e\infty} = \rho_e(T_{e\infty}), \quad \lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty}), \quad \lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_{e\infty}), \\ t_k &= T_k/T_{e\infty}, \quad k = e, i, \quad 0,5 \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad -1 \leq \omega \leq 1. \end{aligned}$$

2. Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты $c_p, \rho_{e\infty}, \mu_{e\infty}, \lambda_{e\infty}$ и сохраняющиеся в процессе движения частицы величины $R, T_{e\infty}, U_\infty$. Из этих параметров можно составить две безразмерные комбинации: число Рейнольдса $Re_\infty = (\rho_{e\infty} U_\infty R) / \mu_{e\infty} \ll 1$ и тепловое число Пекле $Pe_\infty = (c_p U_\infty R \rho_{e\infty}) / \lambda_{e\infty} \ll 1$, где R — радиус частицы, $U_\infty = |U_\infty|$ — характерная скорость задачи.

3. Коэффициент теплопроводности частицы по величине намного больше коэффициента теплопроводности газа. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью от угла θ в системе "частица-газ" (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и считать, что вязкость связана только с температурой $t_{e0}(r)$, т.е. $\mu_e(t_e(r, \theta)) \approx \mu_e(t_{e0}(r))$. При этом $t_e(r, \theta) = t_{e0}(r) + \delta t_e(r, \theta)$, где $\delta t_e(r, \theta) \ll t_{e0}(r)$, а $\delta t_e(r, \theta), t_{e0}(r)$ определяются из решения тепловой задачи. Это допущение позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

4. Частица образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

В рамках сформулированных выше допущений, в работе рассматривается следующая система гидродинамических уравнений, описывающая распределения полей скорости U_e , давления P_e и температуры T вне и внутри нагретой частицы:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} P_\epsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_\epsilon \left(\frac{\partial U_k^\epsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^\epsilon}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_k^j \frac{\partial U_n^\epsilon}{\partial x_n} \right) \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_\epsilon U_k^\epsilon) = 0, \quad (5)$$

$$\rho_\epsilon c_{p\epsilon} (U_\epsilon \cdot \nabla) T_\epsilon = \operatorname{div} (\lambda_\epsilon \nabla T_\epsilon), \quad (6)$$

$$\operatorname{div} (\lambda_i \nabla T_i) = q_i, \quad (7)$$

где x_k — декартовы координаты, q_i — плотность тепловых источников, неоднородно распределенные в объеме частицы, за счет которых и происходит её нагрев.

При математическом описании равномерного движения нагретой частицы в вязкой неизотермической газообразной среде природа сил, вызывающих это движение, нас интересовать не будет. Она может быть гравитационной, магнитной, термофоретической, электрофоретической и т.д., что позволяет распространить разработанный математический метод решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса на очень широкий класс физических задач. Этот вопрос мы подробно рассмотрим во второй части статьи на конкретной физической задаче. Поскольку частица движется равномерно, то мы можем перейти в систему координат, связанную с её центром масс. В качестве системы координат выбираем сферическую систему координат (r, θ, φ) . В этом случае задача сводится к определению обтекания нагретой неподвижной частицы плоскопараллельным потоком газа со скоростью U_∞ ($U_\infty \parallel Oz$). Все неизвестные функции зависят только от координат r и θ .

В сферической системе координат линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса, описывающее распределение скорости и давления вне частицы равенством (5), имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial y} + \frac{2}{y} \sigma_{rr} + \frac{1}{y} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{y} \sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{y}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{y} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial y} + \frac{3}{y} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{y} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{y} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), \quad (9)$$

где $y = r/R$, σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ — компоненты тензора напряжений в сферической системе координат, определяемые равенствами

$$\sigma_{rr} = \mu_\epsilon \left(2 \frac{\partial U_r^\epsilon}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_\epsilon \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu_\epsilon \left(\frac{2}{y} \frac{\partial U_\theta^\epsilon}{\partial \theta} + \frac{2}{y} U_r^\epsilon - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_\epsilon \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \mu_{\epsilon} \left(\frac{2}{y} U_r^{\epsilon} + \frac{2}{y} \operatorname{ctg} \theta U_{\theta}^{\epsilon} - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_{\epsilon} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu_{\epsilon} \left(\frac{\partial U_{\theta}^{\epsilon}}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^{\epsilon}}{\partial \theta} - \frac{U_{\theta}^{\epsilon}}{y} \right).$$

Компоненты массовой скорости и давления будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Они нужны нам для нахождения общей силы, действующей на частицу. Сила определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и равна [3]

$$F_z = \int_S (-P_{\epsilon} \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi. \quad (10)$$

Используя свойство полиномов Лежандра и Гегенбауэра, легко показать, что эта сила определяется только первыми членами разложений [2]. Поэтому мы можем записать

$$U_r^{\epsilon}(y, \theta) = U_{\infty} G(y) \cos \theta, \quad U_{\theta}^{\epsilon}(y, \theta) = -U_{\infty} g(y) \sin \theta, \quad (11)$$

где $G(y)$ и $g(y)$ — произвольные функции, зависящие от радиальной координаты.

Связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$ может быть найдена из уравнения непрерывности (2) с учетом зависимости плотности газообразной среды от температуры (уравнение состояния). Эта связь имеет вид

$$g(y) = G(y) + \frac{y}{2} (G'(y) - f(y) G(y)), \quad (12)$$

где $f(y) = \frac{1}{t_{\epsilon 0}(y)} \frac{dt_{\epsilon 0}(y)}{dy}$.

Тепловая задача решается методом сращиваемых асимптотических разложений [9, 10]. Нулевое приближение для внутреннего разложения поля температуры с учетом третьего допущения равно

$$t_{\epsilon 0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (13)$$

где $\Gamma_0 > 0$ — постоянная, определяемая из граничных условий на поверхности нагретой частицы.

С учетом (13) зависимость динамической вязкости от температуры (см. допущение 3) принимает вид

$$\mu_{\epsilon}(y, \theta) \approx \mu_{\epsilon \infty} t_{\epsilon 0}^{\beta}(y) = \mu_{\epsilon \infty} \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\beta(1+\alpha)}. \quad (14)$$

2. Решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в виде обобщенных степенных рядов. Подставляя (11) в (8), (9) и учитывая (12) и (3), освобождаясь от давления, предварительно продифференцировав (8) по переменной θ , а (9) – по y , в конечном итоге, было получено следующее однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции $G(y)$:

$$y^4 \frac{d^4 G(y)}{dy^4} + y^3 (8 + \alpha_1 \ell(y)) \frac{d^3 G(y)}{dy^3} + y^2 (8 + \alpha_2 \ell(y) + \alpha_3 \ell^2(y)) \frac{d^2 G(y)}{dy^2} + y (\alpha_4 \ell(y) + \alpha_5 \ell^2(y) + \alpha_6 \ell^3(y) - 8) \frac{dG(y)}{dy} + (\alpha_7 \ell^2(y) + \alpha_8 \ell^3(y) + \alpha_6 \ell^4(y)) G(y) = 0, \quad (15)$$

в котором

$$\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}, \quad \alpha_1 = \frac{1 - 2\beta}{1 + \alpha}, \quad \alpha_2 = -\frac{8\beta}{1 + \alpha},$$

$$\alpha_3 = \frac{\beta^2 - 3\beta - \alpha\beta + 3 + 3\alpha}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_4 = 2\frac{\beta - 1}{\alpha + 1},$$

$$\alpha_5 = 2\frac{\beta^2 + \beta - \alpha\beta - 3\alpha - 3}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_6 = \frac{6 + 12\alpha + 6\alpha^2 + \beta^2 - 5\beta - 5\alpha\beta}{(1 + \alpha)^3},$$

$$\alpha_7 = 2\frac{2 + 2\alpha - \beta}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_8 = -2\alpha_6$$

с краевыми условиями

$$G(1) = F_1, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = 1, \quad g(1) = F_2, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 1, \quad (16)$$

где F_1 и F_2 – постоянные, вид которых определяется конкретной физической задачей. Например, в случае классической задачи Стокса имеем $F_1 = F_2 = 0$, что соответствует условию прилипания на поверхности сферы радиуса R .

Точка $y = 0$ для уравнения (15) является регулярной особой точкой [11, 12]. Поэтому будем искать его решение в виде функционального ряда

$$G(y) = y^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n \ell^n(y), \quad C_0 \neq 0. \quad (17)$$

Вычисляя производные, получим

$$\begin{aligned}
 G'(y) &= -y^{\rho-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho) C_n - (n-1) C_{n-1}] \ell^n(y), \\
 G''(y) &= y^{\rho-2} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)(n-\rho+1) C_n - 2(n-\rho)(n-1) C_{n-1} + \\
 &\quad + (n-1)(n-2) C_{n-2}] \ell^n(y), \\
 G'''(y) &= -y^{\rho-3} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)(n-\rho+1)(n-\rho+2) C_n - \\
 &\quad - 3(n-\rho)(n-\rho+1)(n-1) C_{n-1} + \\
 &\quad + 3(n-\rho)(n-1)(n-2) C_{n-2} + (n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3}] \ell^n(y), \\
 G^{IV}(y) &= y^{\rho-4} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)(n-\rho+1)(n-\rho+2)(n-\rho+3) C_n - \\
 &\quad - 4(n-\rho)(n-\rho+1)(n-\rho+2)(n-1) C_{n-1} + \\
 &\quad + 6(n-\rho)(n-\rho+1)(n-1)(n-2) C_{n-2} - \\
 &\quad - 4(n-\rho)(n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3} + \\
 &\quad + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) C_{n-4}] \ell^n(y).
 \end{aligned}$$

Подставляя ряд (17) в (15) и приравнявая коэффициенты при y^ρ , получаем определяющее уравнение

$$\rho(\rho+3)(\rho+1)(\rho-2) = 0,$$

имеющее корни $\rho_1 = -3, \rho_2 = -1, \rho_3 = 0, \rho_4 = 2$. Заметим, что разность корней равна целому числу. Следовательно, согласно общей теории решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса) во всех остальных решениях, кроме первого, соответствующего $\rho_1 = -3$, появляется дополнительное слагаемое, содержащее множитель $\ln y$, умноженный на первое решение (см. [11, 12]).

Большемому (по модулю) из корней отвечает решение

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (15), получим рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $C_{n,1}$

$$\begin{aligned}
 C_{0,1} = 1, \quad C_{n,1} = [n(n+2)(n+3)(n+5)]^{-1} \times \\
 \times \{ (n+2) [4(n-1)(n^2+4n+1) + \\
 + \alpha_1(n+3)(n+4) + \alpha_4 - \alpha_2(n+3)] C_{n-1,1} - \\
 - [2(n-1)(n-2)(3n^2+9n+4) + \\
 + 3\alpha_1(n-2)(n+2)(n+3) - \\
 - 2\alpha_2(n+2)(n-2) + \alpha_3(n+1)(n+2) + \\
 + \alpha_4(n-2) - \alpha_5(n+1) + \alpha_7] C_{n-2,1} + \\
 + [4(n+1)(n-1)(n-2)(n-3) + \\
 + 3\alpha_1(n-2)(n+2)(n-3) - \alpha_2(n-3)(n-2) + \\
 + 2\alpha_3(n+1)(n-3) - \alpha_5(n-3) + \alpha_6n - \alpha_8] C_{n-3,1} - \\
 - (n-3) [(n-1)(n-2)(n-4) + \\
 + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,1} \},
 \end{aligned}$$

здесь и в дальнейшем мы считаем, что $C_{n,k} = 0$, если $n < 0$.

Второе решение уравнения (15), линейно независимое с решением $G_1(y)$ и соответствующее корню $\rho_2 = -1$, будем искать в виде

$$G_2(y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n(y) + \frac{\omega_1 \ln y}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (15), получаем рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $C_{n,2}$

$$\begin{aligned}
 C_{0,2} = 1, \quad C_{1,2} = -\frac{1}{8}(6\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_4), \quad C_{2,2} = 1, \\
 C_{n,2} = [n(n-2)(n+3)(n+1)]^{-1} \times \\
 \times \{ n [4(n-1)(n^2-3) + \alpha_1(n+1)(n+2) + \alpha_4 - \alpha_2(n+1)] C_{n-1,2} - \\
 - [2(n-1)(n-2)(3n^2-3n-2) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+3\alpha_1 n(n-2)(n+1) - 2\alpha_2 n(n-2) + \\
 &\quad + \alpha_3 n(n-1) + \alpha_4(n-2) - \alpha_5(n-1) + \alpha_7] C_{n-2,2} + \\
 &+ [4(n-1)^2(n-2)(n-3) + 3\alpha_1 n(n-2)(n-3) - \\
 &\quad - \alpha_2(n-3)(n-2) + 2\alpha_3(n-1)(n-3) - \\
 &\quad - \alpha_5(n-3) - \alpha_8 + \alpha_6(n-2)] C_{n-3,2} - \\
 &- (n-3)[(n-1)(n-2)(n-4) + \\
 &\quad + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,2} + \\
 &\quad + \frac{\omega_1}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \Delta_k \} ,
 \end{aligned}$$

где

$$\frac{\omega_1}{\Gamma_0^2} = \frac{1}{30} [2\alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_7 - 2(4 + 12\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_4) C_{1,2}] ,$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_k = & (4k^3 + 30k^2 + 62k + 30) C_{k,1} - \\
 & - [12(k^2 - 1)(k + 3) + \alpha_4 + \\
 & \quad + \alpha_1(3k^2 + 18k + 26) - \alpha_2(2k + 5)] C_{k-1,1} + \\
 & + [6(k-1)(k-2)(2k+3) - 2\alpha_2(k-2) - \\
 & \quad - \alpha_5 + \alpha_3(2k+3) + 3\alpha_1(k-2)(2k+5)] C_{k-2,1} - \\
 & - [4(k-1)(k-2)(k-3) + 3\alpha_1(k-2)(k-3) + \alpha_6 + 2\alpha_3(k-3)] C_{k-3,1}.
 \end{aligned}$$

Третье решение уравнения (15), линейно независимое с решениями $G_1(y)$, $G_2(y)$ и соответствующее корню $\rho_3 = 0$, будем искать в виде

$$G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,3} \ell^n + \frac{\omega_2 \ln y}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n + \frac{\omega_0 \ln y}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n. \quad (20)$$

Аналогично предыдущему получаем рекуррентную формулу для определения коэффициентов $C_n^{(3)}$, ($n \geq 4$)

$$\begin{aligned}
 C_{0,3} &= 1, \quad C_{1,3} = 0, \quad C_{2,3} = \frac{\alpha_7}{8}, \quad C_{3,3} = 1, \quad \omega_0 = 0, \\
 C_{n,3} &= [n(n+2)(n-3)(n-1)]^{-1} \times \\
 &\times \{ (n-1) [4(n-1)(n^2-2n-2) + \alpha_1 n(n+1) + \alpha_4 - \alpha_2 n] C_{n-1,3} - \\
 &- [2(n-1)(n-2)(3n^2-9n+4) + 3\alpha_1 n(n-2)(n-1) + \\
 &\quad (n-1)(n-2)(\alpha_3 - 2\alpha_2) + (n-2)(\alpha_4 - \alpha_5) + \alpha_7] C_{n-2,3} + \\
 &+ [4(n-1)(n-2)^2(n-3) + 3\alpha_1(n-1)(n-2)(n-3) + \\
 &\quad + (n-3)(n-2)(2\alpha_3 - \alpha_2) + (n-3)(\alpha_6 - \alpha_5) + \alpha_7] C_{n-3,3} - \\
 &- (n-3)[(n-1)(n-2)(n-4) + \\
 &\quad + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,3} + \\
 &+ \frac{1}{60} [\alpha_8 - \alpha_7(8 + 12\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_4) / 4] \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) \Delta_k \}.
 \end{aligned}$$

Четвертое решение $G_0(y)$ уравнения (15), отвечающее корню $\rho_4 = 2$, согласно методу Фробениуса, следует искать в виде

$$\begin{aligned}
 G_0(y) &= y^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,4} \ell^n + \frac{\zeta_0}{y^3} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n + \\
 &+ \frac{\zeta_1}{y} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n + \zeta_2 \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,3} \ell^n, \quad C_{0,4} = 1.
 \end{aligned}$$

Поскольку это решение не удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = 1,$$

то его явный вид мы не приводим.

Заметим, что выбор постоянных $C_{0,1}$, $C_{0,2}$ и $C_{0,3}$ осуществляется таким образом, чтобы функции $G_1(y)$, $G_2(y)$ и $G_3(y)$ стремились к соответствующим функциям для сферы при малых относительных перепадах температуры [2, 3], т.е. чтобы при $\Gamma_0 \rightarrow 0$

$$G_1(y) \rightarrow \frac{1}{y^3}, \quad G_2(y) \rightarrow \frac{1}{y}, \quad G_3(y) = 1.$$

Учитывая неравенство

$$\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0} \leq \frac{\Gamma_0}{1 + \Gamma_0} < 1,$$

можно показать, что ряды, определяющие функции $G_i(y)$, $i = 1, 2, 3$, равномерно сходятся при $y \geq 1$ и определяют ограниченные функции, которые можно дифференцировать нужное число раз. В дальнейшем нам потребуются производные до третьего порядка. Производя необходимые вычисления, получим

$$G_1'(y) = -\frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3) C_n^{(1)} - (n-1) C_{n-1,1}] \ell^n(y),$$

$$G_1''(y) = \frac{1}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+4) C_n^{(1)} - 2(n+3)(n-1) C_{n-1,1} + (n-1)(n-2) C_{n-2,1}] \ell^n(y),$$

$$G_1'''(y) = -\frac{1}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+4)(n+5) C_n^{(1)} - 3(n+3)(n+4)(n-1) C_{n-1,1} + 3(n+3)(n-1)(n-2) C_{n-2,1} + (n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3,1}] \ell^n(y),$$

$$G_2'(y) = -\frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) C_{n,2} - (n-1) C_{n-1,2}] \ell^n(y) +$$

$$+ \frac{\omega_1}{y^4} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y) + \omega_1 \ln y C_1^I(y),$$

$$G_2''(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) C_{n,2} -$$

$$- 2(n+1)(n-1) C_{n-1,2} +$$

$$+ (n-1)(n-2) C_{n-2,2}] \ell^n(y) -$$

$$- \frac{\omega_1}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+7) C_{n,1} - 2(n-1) C_{n-1,1}] + \omega_1 \ln y G_1''(y),$$

$$G_2'''(y) = -\frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)(n+3) C_{n,2} -$$

$$- 3(n+1)(n+2)(n-1) C_{n-1,2} +$$

$$+ 3(n+1)(n-1)(n-2) C_{n-2,2} +$$

$$+ (n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3,2}] \ell^n(y) +$$

$$+ \frac{\omega_1}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} [(3n^2 + 24n + 47) C_{n,1} - 3(n-1)(2n+7) C_{n-1,1} +$$

$$+ 3(n-1)(n-2) C_{n-2,1}] \ell^n(y) + \omega_1 \ln y G_1'''(y),$$

$$G_3'(y) = -\frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} [nC_{n,3} - (n-1) C_{n-1,3}] \ell^n(y) +$$

$$+ \frac{\omega_2}{y^4} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y) + \omega_2 \ln y G_1'(y),$$

$$G_3''(y) = \frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1) C_{n,3} -$$

$$- 2n(n-1) C_{n-1,3} +$$

$$+ (n-1)(n-2) C_{n-2,3}] \ell^n(y) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\omega_2}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+7) C_{n,1} - 2(n-1) C_{n-1,1}] + \omega_2 \ln y G_1''(y), \\
 G_3'''(y) = & -\frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1)(n+2) C_{n,3} - \\
 & -3n(n+1)(n-1) C_{n-1,3} + \\
 & + 3n(n-1)(n-2) C_{n-2,3} + \\
 & + (n-1)(n-2)(n-3) C_{n-3,3}] \ell^n(y) + \\
 & + \frac{\omega_2}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} [(3n^2 + 24n + 47) C_{n,1} - \\
 & -3(n-1)(2n+7) C_{n-1,1} + \\
 & + 3(n-1)(n-2) C_{n-2,1}] \ell^n(y) + \omega_2 \ln y G_1''(y).
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили общее решение уравнения (15)

$$G(y) = A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + A_3 G_3(y) + A_0 G_0(y), \quad (21)$$

где A_1, A_2, A_3 и A_0 – произвольные постоянные.

Постоянные A_1, A_2, A_3 и A_0 однозначно определяются из краевых условий (16). Очевидно, $A_0 = 0, A_3 = 1$. Для определения постоянных A_1 и A_2 имеем линейную систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 G_1(1) + A_2 G_2(1) = F_1 - G_3(1), \\ A_1 G_4(1) + A_2 G_5(1) = F_2 - G_6(1). \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, поскольку ее главный определитель отличен от нуля в силу линейной независимости решений $G_1(y), G_2(y), G_3(y)$. Таким образом, имеем

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 - G_3(1) & G_2(1) \\ F_2 - G_6(1) & G_5(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(1) & G_2(1) \\ G_4(1) & G_5(1) \end{vmatrix}}, \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_1(1) & F_1 - G_3(1) \\ G_4(1) & F_2 - G_6(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(1) & G_2(1) \\ G_4(1) & G_5(1) \end{vmatrix}}. \quad (22)$$

В результате проведенного исследования доказана следующая теорема.

Теорема. Функция $G(y) = A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)$ с коэффициентами, определяемыми формулой (22), является единственным решением уравнения (15), удовлетворяющим краевым условиям (16).

Перейдем теперь к определению компонентов массовой скорости $U_e(y, \theta)$ и давления $P_e(y, \theta)$, которые необходимы для нахождения общей силы (10), действующей на нагретую частицу, движущуюся равномерно в неизотермической газообразной среде. Учитывая, что

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty G(y) \cos \theta, \quad U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty g(y) \sin \theta,$$

получаем

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta [A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)], \quad (23)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta [A_1 G_4(y) + A_2 G_5(y) + G_6(y)], \quad (24)$$

где

$$G_k(y) = \left(1 + \frac{\ell(y)}{2(1+\alpha)}\right) G_{k-3}(y) + \frac{y}{2} G'_{k-3}(y), \quad k = 4, 5, 6. \quad (25)$$

Поскольку явный вид функций $U_r^e(y, \theta)$ и $U_\theta^e(y, \theta)$ нам известен, то мы можем легко получить выражения для поля давления

$$\begin{aligned} P_e = P_{e\infty} + \frac{\mu_{e\infty} U_\infty}{R} t_{e0}^\beta \left\{ \frac{y^2}{2} G'(y) + y \left[3 + \frac{\beta-1}{2} y f(y) \right] G''(y) - \right. \\ \left. - \left[2 - y^2 f'(y) - \frac{\beta}{2} y^2 f^2(y) + (\beta-2) y f(y) \right] G'(y) + \right. \\ \left. + 2 \left[y^2 f''(y) + y f'(y) (4 + \beta y f(y)) - \frac{2}{3} f(y) \right] G(y) \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

$$f(y) = -\frac{\ell(y)}{(1+\alpha)y}.$$

Общая сила, действующая на частицу, интегрированием тензора напряжений по её поверхности в сферической системе координат, определяется по формуле (10). Производя необходимые вычисления, получаем

$$F_z = -4\pi R \mu_{e\infty} U_\infty A_2 n_z, \quad (27)$$

где n_z — единичный вектор в направлении оси Oz , A_2 — постоянная, которая определяется равенством (22) из граничных условий на поверхности нагретой частицы.

Проведем анализ выражения (27). Различным значениям постоянной A_2 соответствуют различные качественные картины движения частицы в неизотермической газообразной среде. Отметим, что сила (27) вычислена в предположении равномерности движения, которое возможно только в случае, если полная сила, действующая на частицу, равна нулю. Поскольку сила (27) пропорциональна скорости и обращается в нуль вместе с ней, то для реализации случая равномерного движения частицы следует предположить наличие некоторой сторонней силы, уравнивающей силу (27).

В зависимости от параметров задачи сила (27) может быть как силой сопротивления (в этом случае для поддержания движения необходима сила, действующая в направлении скорости, например, сила тяжести), так и силой тяги (тогда для поддержания движения должна существовать сила, действующая в направлении, противоположном скорости).

Возможна и другая интерпретация полученных результатов, когда заданной считается действующая на частицу внешняя сила, например, термофоретическая сила, фотофоретическая сила, диффузиофоретическая и т.д. В этом случае из равенства силы (27) внешней силе может быть найдена, например, скорость термофореза, скорость фотофореза нагретой частицы и т.д.

Заключение. В данном разделе исследовалось линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса в сферической системе координат в предположении, что коэффициент теплопроводности частицы намного больше коэффициента теплопроводности газа (слабая угловая асимметрия распределения температуры). Рассматриваемое уравнение может быть сведено к однородному дифференциальному уравнению четвертого порядка, учитывающему зависимость динамической вязкости и плотности газообразной среды от температуры.

В каждой конкретной физической задаче, задавая явный вид зависимости вязкости среды от температуры, мы можем исследовать полученные уравнения, что, несомненно, представляет как теоретический, так и практический интерес для поиска аналитического решения полного уравнения Навье-Стокса (1).

В частном случае, когда

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)}, \quad \mu_\epsilon(y, \theta) \approx \mu_{\epsilon\infty} t_{e0}^\beta(y)$$

, получено однородное дифференциальное уравнение (15) четвертого порядка для функции $G(y)$ с краевыми условиями (16), для решения которого

был применен известный в научной литературе метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса). Доказана теорема существования и единственности полученного решения.

II. Гравитационное движение неравномерно нагретой твёрдой частицы сферической формы.

Введение. На входящие в состав аэродисперсных систем аэрозольные частицы могут действовать силы различной природы. Самым распространенным видом движения является гравитационное, т.е. движение аэрозольных частиц в поле силы тяжести, происходящее за счёт отличия их удельных весов и от удельного веса окружающей среды [2, 3]. На гравитационном движении основаны такие технологические процессы, как флотация, определение гранулометрического состава аэродисперсных систем, тонкая очистка газов и т.п. В частности, при очистке газов от загрязняющих их частиц и обогащении полезных ископаемых важно ускорить процесс выпадения осадка. Этому добиваются различными способами в зависимости от рода частиц и окружающей среды. Основу седиментометрии составляет взаимосвязь между скоростью движения аэрозольных частиц в газообразной среде и их размерами. Скорость движения частиц можно существенно корректировать за счет нагрева их поверхности (например, с помощью лазера), поскольку коэффициенты молекулярного переноса газообразной среды (вязкость, теплопроводность и плотность) существенно зависят от температуры. В связи с этим представляет как теоретический, так и практический интерес описание гравитационного движения неравномерно нагретых частиц в вязких неизо-термических средах.

Среднее расстояние между частицами у значительной части, встречающихся на практике аэродисперсных систем намного больше характерного размера частиц. В таких условиях учет влияния аэрозоля на развитие физического процесса можно проводить, основываясь на знании законов динамики движения, тепло- и массообмена с бесконечной окружающей средой отдельных частиц. Поэтому изучение закономерностей движения отдельных частиц в вязких средах является важной актуальной задачей. Кроме того, важно отметить, что исследование движения отдельных частиц в неподвижной среде является составной частью изучения их поведения в произвольном потоке.

Постановка задачи. Рассмотрим движение нагретой твердой частицы сферической формы в вязкой газообразной среде в поле силы тяжести. В рамках сформулированных в части I допущений уравнения для скорости, давления и температур вне и внутри частицы запишутся в виде

$$\frac{\partial P_\epsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_\epsilon \left[\frac{\partial U_j^\epsilon}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^\epsilon}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial U_m^\epsilon}{\partial x_m} \right] \right) + F_k, \quad m, k, j = 1, 2, 3; \quad (28)$$

$$\operatorname{div}(\rho_\epsilon U_\epsilon) = 0, \quad (29)$$

$$\rho_\epsilon c_p (U_\epsilon \cdot \nabla) T_\epsilon = \operatorname{div}(\lambda_\epsilon \nabla T_\epsilon), \quad (30)$$

$$\operatorname{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i, \quad (31)$$

где (x_1, x_2, x_3) декартовы координаты, $q_i(r, \theta)$ – плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, за счет которых и происходит нагрев частицы. Наличие источников тепла внутри частицы можно связать, например, с протеканием объемной химической реакции, с процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.д. Наличие источников тепла внутри частицы приводит к тому, что средняя температура ее поверхности может существенно отличаться от температуры окружающей газообразной среды на большом расстоянии от этой частицы. Возникающее при этом повышение температуры поверхности частицы оказывает влияние на теплофизические характеристики газообразной среды (вязкость, теплопроводность, плотность) и тем самым может существенно повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности и, в конечном итоге, на силу и скорость ее гравитационного движения.

Целесообразно, как и в первой части, ввести систему координат, связанную с центром масс движущейся частицы. В этом случае задача сводится к анализу обтекания частицы радиуса R бесконечным плоскопараллельным потоком газа со скоростью U_∞ ($U_\infty \parallel Oz$), которая подлежит определению из условий задачи.

Описывать движение будем в сферической системе координат r, θ, φ , полярную ось $z = r \cos \theta$ направим по вектору ускорения свободного падения \mathbf{g} . Картина набегающего потока и направления координатных осей приведены на рис. 1.

Угол θ будем отсчитывать против часовой стрелки от точки, где поток набегаёт на сферу. Распределения скорости, давления и температуры обладают аксиальной симметрией относительно оси Oz . В такой системе отсчета нагретая частица неподвижна, а внешняя среда (газ) — движется (как целое)

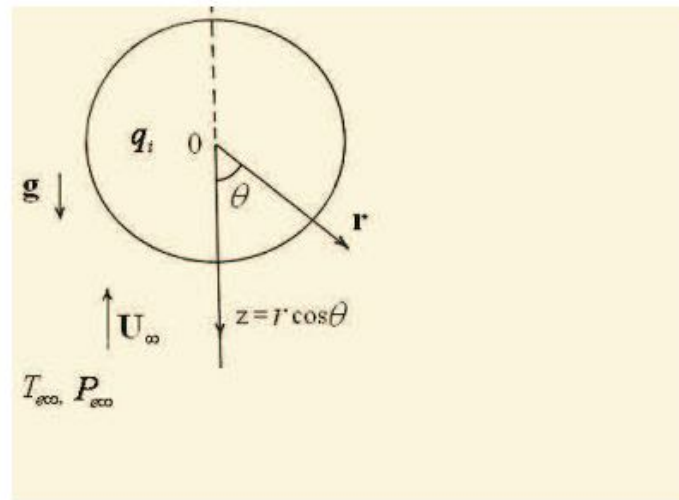


Рис. 1: Обтекание сферы.

в сторону, противоположную направлению фактического движения частицы, со скоростью $U_\infty = -U_p$ (U_p – скорость дрейфа нагретой частицы относительно лабораторной системы координат).

Эта система гидродинамических уравнений решается в сферической системе координат (r, θ, φ) со следующими граничными условиями:

$$U_r^e(y, \theta)|_{r=R} = U_\theta^e(y, \theta)|_{r=R} = 0, \quad T_e|_{r=R} = T_i|_{r=R}, \quad (32)$$

$$\left(\lambda_e T_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_{e\infty}^4) \right) \Big|_{r=R}, \quad (33)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U_e = U_\infty \cos \theta e_r - U_\infty \sin \theta e_\theta, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} P_e = P_{e\infty}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} T_e = T_{e\infty}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} T_i \neq \infty, \quad (34)$$

т.е. мы считаем, что на поверхности частицы ($r = R$) выполнено условие прилипания для нормальной и касательной компонент массовой скорости U_e , имеют место равенство температур и непрерывность радиальных потоков тепла с учетом излучения на поверхности частицы (σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана, σ – интегральная степень черноты тела [13]), а также стандартные краевые условия при $r \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$.

Наличие больших относительных перепадов температуры между поверхностью частицы и далёкой от неё областью приводит к необходимости учитывать зависимость от температуры динамической вязкости μ_e , теплопроводности λ_e и плотности ρ_e :

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^\beta, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\omega, \quad \rho_e = \rho_{e\infty} t_e,$$

где $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_{e\infty})$, $\rho_{e\infty} = \rho_e(T_{e\infty})$, $t_k = T_k/T_{e\infty}$ ($k = e, i$) – безразмерная температура. Здесь и далее индекс e указывает на газообразную среду, индекс i – на принадлежность частице, а индекс ∞ означает параметры газообразной среды на бесконечности, т.е. на большом расстоянии от частицы.

Выражения для силы и скорости гравитационного движения нагретой твердой частицы сферической формы. При нахождении силы, действующей на нагретую твердую аэрозольную частицу, и скорости ее движения в гравитационном поле необходимо знать распределение температуры как вне частицы, так и внутри неё.

Интегрируя уравнения теплопереноса и учитывая степенной вид зависимости коэффициентов теплопроводности, получаем

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (35)$$

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) = \left(B_0 + \frac{D_0}{y} + \frac{1}{y} \int_y^1 \psi_0(y) dy - \int_y^1 \frac{\psi_0(y)}{y} dy\right)^{1/(1+\omega)}, \quad (36)$$

где постоянные Γ_0 , B_0 и D_0 определяются из граничных условий (31), (32) на поверхности частицы:

$$\psi_0(y) = -\frac{R^2}{2\lambda_{i\infty}} \frac{1+\omega}{T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^1 q_i dx, \quad x = \cos \theta.$$

Среднее значение температуры поверхности частицы T_{iS} определяется из решения системы уравнений

$$\begin{cases} t_{iS} = t_{eS}, \\ \frac{\ell(1)}{1+\alpha} \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} t_{eS} = \frac{R^2}{3\lambda_{iS}T_{e\infty}} J_0 - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{iS}} (t_{iS}^4 - 1), \end{cases} \quad (37)$$

в которой

$$\lambda_{eS} = \lambda_{e\infty} t_{eS}^\alpha, \quad \lambda_{iS} = \lambda_{i\infty} t_{iS}^\omega, \quad t_{iS} = t_{i0}|_{y=1}, \quad t_{eS} = t_{e0}|_{y=1},$$

$$T_{iS} = t_{iS} T_{e\infty}, \quad T_{eS} = t_{eS} T_{e\infty},$$

$$\ell(1) = \frac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0}, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i(r, \theta) dV,$$

а интегрирование ведется по всему объему частицы.

Из формулы (35) следует, что температура окружающего частицу газа изменяется с расстоянием от поверхности частицы, поэтому и динамическая вязкость также является функцией расстояния $\mu_\epsilon = \mu_\epsilon(y)$.

Подставляя (35) в выражение для динамической вязкости, имеем

$$\mu_\epsilon = \mu_{\epsilon\infty} t_{\epsilon 0}^3. \quad (38)$$

Выражение (38) для динамической вязкости совпадает с формулой (14) первой части, и, следовательно, полученное аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса применимо в нашем случае, т.е.

$$U_r^\epsilon(y, \theta) = U_\infty \cos \theta (A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)), \quad (39)$$

$$U_\theta^\epsilon(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta (A_1 G_4(y) + A_2 G_5(y) + G_6(y)), \quad (40)$$

где функции $G_1 - G_6$ определены равенствами (18)–(20), (25).

Подставляя (39), (40) в граничные условия (32) – (34), можем определить постоянные A_1 и A_2 . В частности, для коэффициента A_2 , имеем

$$A_2 = \frac{N_2}{N_1}, \quad (41)$$

где $N_1 = G_1(1)G_2'(1) - G_2(1)G_1'(1)$, $N_2 = G_1(1)G_3'(1) - G_3(1)G_1'(1)$.

Общая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и в сферической системе координат находится по формуле (27)

$$\mathbf{F}_z = -4\pi R \mu_{\epsilon\infty} U_\infty A_2 \mathbf{n}_z, \quad (42)$$

где \mathbf{n}_z — единичный вектор в направлении оси Oz .

Подставляя в (42) определяемый равенством (41) коэффициент A_2 , получаем выражение для силы сопротивления неравномерно нагретой сферы

$$\mathbf{F}_z = 6\pi R \mu_{\epsilon\infty} U_\infty f_\mu \mathbf{n}_z, \quad f_\mu = \frac{2N_2}{3N_1}. \quad (43)$$

Сферическая частица, падающая под действием силы тяжести, приобретает постоянную скорость U_p , как только действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами.

Сила тяжести, действующая на частицу, с учетом выталкивающей силы равна

$$\mathbf{F}_g = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_{iS} - \rho_{eS}) \mathbf{g}, \quad (44)$$

где \mathbf{g} — направленный вниз вектор ускорения свободного падения, ρ_{iS}, ρ_{eS} — плотность частицы и газообразной среды, взятые при средней температуре поверхности частицы, равной T_{iS} .

Приравнивая (43) к (44), учитывая, что $U_\infty = -U_p$, получаем выражение для скорости установившегося падения твердой неравномерно нагретой частицы сферической формы в поле силы тяжести

$$U_p = h_\mu \mathbf{n}_z, \quad h_\mu = \frac{2(\rho_{iS} - \rho_{eS})}{9 \mu_{e\infty} f_\mu} R^2 g. \quad (45)$$

Таким образом, формулы (43) и (45) позволяют оценивать силу, действующую на неравномерно нагретую сферу, и скорость ее гравитационного падения с учетом зависимости плотности газообразной среды и коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) от температуры при произвольных относительных её перепадах между поверхностью частицы и далёкой от неё областью.

В случае, когда величина нагрева поверхности частицы достаточно мала, т.е. средняя её температура незначительно отличается от температуры окружающей среды на большом расстоянии от неё ($\Gamma_0 = 0$), зависимостью плотности и коэффициентов молекулярного переноса от температуры можно пренебречь, и тогда

$$G_1(1) = 1, \quad G'_1(1) = -3, \quad G_2(1) = 1, \quad G'_2(1) = -1, \quad G_3(1) = 1, \quad G'_3(1) = 0, \\ N_1 = 2, \quad N_2 = 3.$$

В этом случае формулы (42) и (44) переходят в известные выражения для сферы, полученные Стоксом [1, 2],

$$\mathbf{F}_S = 6\pi R \mu_{e\infty} U_\infty, \quad U = \frac{2(\rho_{i\infty} - \rho_{e\infty})}{9 \mu_{e\infty}} R^2 g. \quad (46)$$

Здесь следует отметить, что коэффициенты молекулярного переноса и плотность берутся при температуре поверхности частицы, равной температуре окружающей среды (в нашем случае $T_{e\infty}$), т.е. эти формулы справедливы при малых относительных перепадах температуры.

Однако, из (35) видно, что константа Γ_0 зависит от средней относительной температуры t_{eS} , которая в случае неравномерного нагрева поверхности определяется из системы уравнений (37) и, следовательно, зависит от плотности тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы.

Отсюда следует, что и функции G_1 , G_2 и т.д. также зависят от плотности тепловых источников, поскольку в эти функции входит величина $\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}$.

Чтобы оценить, какой вклад внутренние источники тепла (нагрев поверхности) оказывают на скорость гравитационного движения аэрозольной частицы сферической формы, можно рассмотреть наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело [13]. В этом случае поглощение происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δR определяется равенством

$$q_i(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{I_0}{\delta R} \cos \theta, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad R - \delta R \leq r \leq R, \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где I_0 — интенсивность падающего излучения.

В этом случае, вычисляя интеграл $\int_V q_i dV$, получим $\int_V q_i dV \approx \pi R^2 I_0$.

Таким образом, задавая интенсивность падающего излучения, мы можем оценить среднюю температуру поверхности частицы:

$$T_{iS} \approx T_{\infty} \left(1 + \frac{1 + \alpha}{4\lambda_{\infty} T_{\infty}} R I_0 \right)^{1/(1+\alpha)}. \quad (47)$$

Из этой формулы следует, что средняя температура поверхности твердой частицы сферической формы зависит от ее радиуса и интенсивности падающего излучения. На рис.2 приведены значения функции f_μ в зависимости от интенсивности падающего излучения I_0 . Численные оценки проводились для частиц меди радиусом 100 мкм, взвешенных в воздухе при нормальных условиях.

Представляет также интерес сравнение полученных формул для силы сопротивления твердой нагретой частицы сферической формы с экспериментом, приведенным, например, в [14]. В экспериментальной работе [14] исследовалось влияние температуры газовой среды и температуры горящих угольных частиц (разогретых антрацитовых частиц) на коэффициент аэродинамического сопротивления с погрешностью не более 20%. Температура частиц, взвешенных в нейтральной (азотной) и в окислительной (воздушной и кислородной) газовых средах, изменялась от 20⁰C до 800⁰C. Размеры угольных частиц в опыте менялись в пределах от 0,1 мм до 1,0 мм.

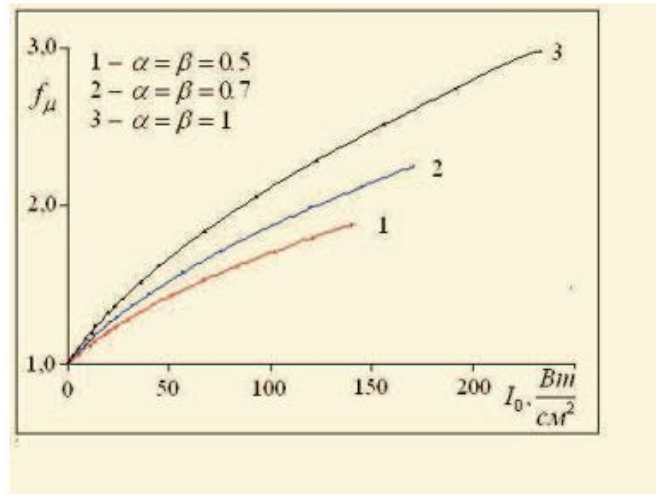


Рис. 2: График зависимости функции f_μ от интенсивности падающего излучения I_0 .

В частности, если на частицу падает поток монохроматического излучения (длина волны λ_0) интенсивностью I_0 , то поглощаемая ею энергия равна $\pi R^2 I_0 K_D$, где R – радиус частицы, K_D – фактор поглощения [13, 15], и эта энергия распределяется по объему сферы равномерно. Сферу можно считать равномерно нагретой. Это допущение справедливо в том случае, если коэффициент теплопроводности частицы намного больше коэффициента теплопроводности внешней среды и $\lambda_0 \gg R$. В экспериментальной работе [14] была предложена формула расчета коэффициента аэродинамического сопротивления частицы в неизотермических условиях

$$C_F^* = \frac{52}{\text{Re}} \left(\frac{T_0}{T_{e\infty}} \right)^m = \frac{\phi_F^*}{\text{Re}}, \quad \phi_F^* = 52 \left(\frac{T_0}{T_{e\infty}} \right)^m,$$

где $m = 1, 7$, T_0 – температура поверхности частицы.

Если привести формулу (43) к аналогичному виду, то она примет вид

$$C_F = \frac{\phi_F}{\text{Re}}, \quad \phi_F = 52 f_\mu t_{eS}.$$

На рис. 3 проведено сравнение коэффициентов ϕ_F и ϕ_F^* в интервале температур от 273^0K до 1273^0K . В диапазоне температур от 273^0K до 873^0K значения коэффициентов практически совпадают, а в диапазоне от 873^0K до 1273^0K различие с экспериментальными данными составляет до 15%.

Заключение. Получены аналитические выражения для силы, действующей на нагретую твердую частицу сферической формы, а также и для скорости ее движения в поле силы тяжести при произвольных относительных

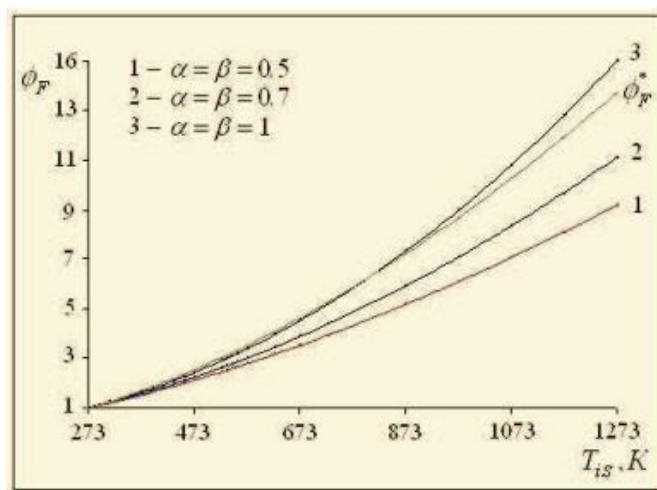


Рис. 3: График зависимости функции ϕ_F от средней температуры поверхности частицы T_{iS} .

перепадах температуры. Указанные выражения являются аналогом формул Стокса.

Проведенный с помощью полученных формул численный анализ показал, что сила и скорость гравитационного движения существенно зависит от средней температуры поверхности частицы и показателей вязкости α и теплопроводности β . Сравнение полученных результатов с экспериментом показало, что различие с экспериментальными данными (относительная погрешность) составляет не более 15%.

Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07 – 01 – 00131.

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой жидкости / О.А.Ладыженская. – М.: Наука, 1970.
2. Хашпель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хашпель, Г.Бреннер – Москва: Мир, 1960.

3. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Наука, 1986.
4. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е.Кочин. – М.: ОНТИ, 1965.
5. Петкевич В.В. Основы механики сплошных сред / В.В.Петкевич. – М.: УРСС, 2001.
6. Победря Б.Е. Основы механики сплошных сред. Курс лекций / Б.Е.Победря, Д.В.Георгиевский. – М.: Физматлит, 2006.
7. Бретшнайдер С., Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / С.Бретшнайдер. – М.: Химия, 1966.
8. Варгафтик Н.Б., Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н.Б.Варгафтик. – М.: Наука, 1977.
9. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М.Ван-Дейк. – М.: Мир, 1967.
10. Найфе А. Введение в методы возмущений / А.Найфе. – М.: Мир, 1984.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э.Камке. – М.: Наука, 1976.
12. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А.Коддингтон, Н.Левинсон. – М.: Иностран. лит-ра, 1958.
13. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К.Борен, Д.Хафмен. – М.: Мир, 1986.
14. Бабий В.И. Аэродинамическое сопротивление частицы в неизотермических условиях / В.И.Бабий, И.П.Иванова. – М.: Теплоэнергетика, 1965.
15. Береснев С.А., Кочнева Л.Б., Суетин П.Е. // Оптика атмосферы и океана. – 2002. – 15. – С.5-6.

SOME PECULIAR PROPERTIES OF HEATED SPHERICAL PARTICLES IN VISCOUS NONISOTHERMIC GASEOUS MEDIA

N.V. Malay¹⁾, A.V. Glushak

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: malay@mail.ru

The mathematical method of the velocity linearized Navier-Stokes equation solution with the account of molecular transfer coefficients (viscosity, thermal conductivity) and gaseous medium density on the temperature is developed. Using the obtained solution, the problem of the particle surface heating influence on the medium strength force and on the velocity of gravitational motion is studied. It is supposed that the average temperature of particle surface may be essentially differ from the surrounding temperature. Numerical estimates have shown that the heating of particle surface influences essentially on the the medium strength force and on the velocity of gravitational fall. The comparison with known experimental data is done which has shown the divergence being no more than 15%. It points out on the correctness of the developed mathematical method.

Key words: velocity linearized Navier-Stokes equation, gravitational motion, motion of the heated weight particle.