УДК 519.21

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПОРОГ ПЕРКОЛЯЦИИ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЁТКЕ

Е.С.Антонова

Белгородский государственный университет,

ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: antonova_e_s@mail.ru

Рассматривается задача дискретной теории перколяции для набора независимых случайных величин $c(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$ на треугольной решётке Λ. На основе кластерного разложения вероятности перколяции, находится верхняя оценка порога перколяции c_*.

Ключевые слова: вероятность перколяции, треугольная решётка, конечный кластер, внешняя граница, кластерное разложение, порог перколяции.

1. Введение. Дискретная теория перколяции занимается проблемой существования с ненулевой вероятностью бесконечной связной компоненты у случайных подмножеств на кристаллических решётках $\Lambda = \langle V, \Phi \rangle$ в евклидовых пространствах, $V \subset \mathbb{R}^d$, на которых определено отношение связности $\Phi \subset V \times V$ [1]. В простейшем случае такие случайные множества порождаются *бернуллиевскими случайными полями.* Более того, в самой простой ситуации рассматриваются так называемые двумерные ($d = 2$), плоские, однородные решётки (квадратная, треугольная, гексагональная). Однако, даже в этом случае, когда случайное бернуллиевское поле $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$ определяется одним параметром – *концентрацией* $c = \Pr\{\tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$, задача вычисления вероятности перколяции $Q(c)$ представляет собой серьёзную математическую проблему, так как не существует никаких аналитических процедур последовательного вычисления аппроксимаций этой функции с ганатированной точностью. В настоящей работе, вычисляется верхняя оценка так называемого *порога перколяции* c_* на плоской, однородной решётке, которая называется треугольной. Эта оценка находится на основе известного подхода, называемого *кластерным разложением* [2], [3]. Мы находим верхнюю оценку для числа конечных кластеров на треугольной решётке, содержащих фиксированную вершину, которая позволяет получить верхнюю оценку для величины c_*.

2. Проблема теории перколяции на треугольной решётке. Бесконечное множество V в $\mathbb{R}^2$ назовём периодическим, если существует пара $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ неколлинеарных векторов в $\mathbb{R}^2$, таких, что для любых $n_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, 2\}$ имеет место $V = V + n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2$. Кристаллической решёткой в $\mathbb{R}^2$ будем называть пару $\Lambda = \langle V, \Phi \rangle$, где V – периодическое множество в $\mathbb{R}^2$, состоящее из изолированных точек, и Φ – множество связности, состоящее из пар точек решётки. Множество V допускает дизъюнктивное разложение $V = \bigcup_{\langle n_1, n_2\rangle \in \mathbb{Z}^2} \{V_0 + n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2\}$, где конечное множество V_0 называется кристаллической ячейкой. Если число точек в V_0 является минимальным среди всех допустимых для V кристаллических ячеек, то такая ячейка называется *элементарной*. Множество связности Φ на кристаллической решётке также должно быть периодическим

$$\Phi + n_1\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1\rangle + n_2\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2\rangle = \Phi\,, \tag{1}$$

$\langle n_1, n_2\rangle \in \mathbb{Z}^2$ и при этом множество $\Phi_0 = \{\phi \in \Phi : \phi = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle, \mathbf{x} \in V_0\}$ конечно. Его мы будем называть *множеством смежности*. С точки зрения кристаллографии, оно определяет "ближайших"соседей на кристаллической решётке для точек из фиксированной элементарной кристаллической ячейки V_0. Далее, точки кристаллической решётки мы будем называть вершинами, а элементы множества Φ – связями или рёбрами. Пару вершин $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ из V, для которых имеется связь $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \in \Phi$, будем называть смежной и обозначать это отношение смежности посредством $\mathbf{x}\phi\mathbf{y}$. Очевидно, что множество связей допускает дизъюнктивное разложение

$$\Phi = \bigcup_{\langle n_1, n_2\rangle \in \mathbb{Z}^2} \{\Phi_0 + n_1\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1\rangle + n_2\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2\rangle\}\,. \tag{2}$$

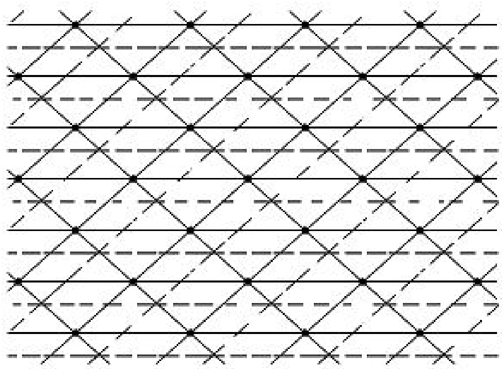

Рис. 1: Треугольная решётка.

Кристаллическая решётка $\Lambda = \langle V, \Phi\rangle$ размерности два называется треугольной (см. рис.1), если элементарная ячейка V_0 состоит из одной вершины $\mathbf{0}$ (на рисунке элементарные ячейки обозначены сеткой из пунктирных линий), а множество смежности имеет вид

$$\Phi_0 = \left\{ \langle \mathbf{0}, \mathbf{a} \rangle : \mathbf{a} \in \left\{ \pm \mathbf{a}_1, \{ (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \sqrt{3}); \alpha_i \in \{\pm 1\}, i = \{1, 2\} \} \right\} \right\},$$

где $\mathbf{e}_i$, $i \in \{1,2\}$ – орты в $\mathbb{R}^2$. При этом $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\sqrt{3})$.

Введём в рассмотрение на решётке Λ бернуллиевское случайное поле $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$ с концентрацией $c = \Pr\{\tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$. Здесь и далее, знак тильда, поставленная над математическим объектом, обозначает его случайность. Каждая случайная реализация $\tilde{c}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V$ этого поля определяет множество $\tilde{W} = \{\mathbf{x} : \tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$, называемое *конфигурацией*. Соответственно, вся совокупность реализаций $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$ вместе с заданным на них распределением вероятностей определяет случайное множество на

$$V = 2\mathbb{Z}^2 \cup [2\mathbb{Z}^2 + (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\sqrt{3})],$$

распределение вероятностей для которого индуцируется распределением вероятностей поля $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$. А именно, для каждого конечного подмножества $M \subset V$ вершин решётки вероятность его заполнения случайной конфигурацией $\tilde{W}$ определяется формулой $\Pr\{M \subset \tilde{W}\} = c^{|M|}$, где $|M|$ – число вершин в M.

Последовательность вершин $\langle \tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{x}}_1, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n \rangle$, выбранных из конфигурации $\tilde{W}$, называется путём длины n на $\tilde{W}$, если $\tilde{\mathbf{x}}_i \phi \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}$, $i = 0, 1, ..., n-1$. Путь называется простым, если в указанной последовательности $\tilde{\mathbf{x}}_i \neq \tilde{\mathbf{x}}_j$ при всех значениях индексов $i < j$ и, соответственно, – циклом, если совпадение вершин в последовательности $\langle \tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{x}}_1, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n \rangle$ имеет место только при $i = 0$, $j = n$. Пара вершин $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ называется *связанной* на $\tilde{W}$, если $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \subset \tilde{W}$ и на этой конфигурации существует простой путь $\langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_1, ..., \tilde{\mathbf{x}}_{n-1}, \mathbf{y} \rangle$. Отношение связанности для пар вершин является отношением эквивалентности, порождаемым конфигурацией $\tilde{W}$. Поэтому всякая случайная конфигурация $\tilde{W}$ распадается на непересекающиеся классы эквивалентности – *кластеры* $\mathfrak{M}[\tilde{W}] = \{\tilde{W}_j; j \in \mathbb{N}\}$, $\tilde{W} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{W}_j$, каждый из которых состоит из связанных между собой вершин, и никакие две вершины, взятые из различных кластеров, не являются связанными.

Обозначим посредством $\tilde{W}(\mathbf{x})$ тот кластер из набора $\mathfrak{M}[\tilde{W}]$, который содержит вершину $\mathbf{x} \in V$. Если вершина $\mathbf{x}$ не содержится в конфигурации $\tilde{W}$, то будем считать, что $\tilde{W}(\mathbf{x}) = \varnothing$. Введём случайную функцию $\tilde{a}(\mathbf{x})$, описывающую свойство просачивания случайного поля $\{\tilde{c}(\mathbf{z}); \mathbf{z} \in V\}$,

$$\tilde{a}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1; & |\tilde{W}(\mathbf{x})| = \infty, \\ 0; & |\tilde{W}(\mathbf{x})| < \infty \,. \end{cases}$$

Тогда вероятность перколяции $Q(c)$ поля $\tilde{c}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V$ из фиксированной вершины $\mathbf{z} \in V$ определяется равенством $Q(c) = \Pr\{\tilde{a}(\mathbf{z}) = 1\}$. На треугольной решётке, ввиду её однородности, эта вероятность не зависит от точки $\mathbf{z}$. Далее, нас будет интересовать величина $c_* = \inf\{c : Q(c) > 0\}$, которую будем называть *порогом перколяции.*

3. Конечные кластеры на треугольной решётке. Введём, следуя [1], понятие внешней границы конечного кластера $\tilde{W}(\mathbf{x})$ на треугольной решётке.

Определение [4]. *Пусть $W(\mathbf{x})$ является конечным кластером. Множество, обозначаемое нами посредством $\partial W(\mathbf{x})$, будем называть внешней границей этого кластера на конфигурации $\tilde{W}$, если $W(\mathbf{x}) \subset \tilde{W}$ и ∂W состоит из тех точек $\mathbf{z} \notin \tilde{W}$, для каждой из которых существует точка $\mathbf{y} \in W(\mathbf{x})$ такая, что $\mathbf{z}\phi\mathbf{y}$, и существует бесконечный путь α на решётке Λ, $\alpha \cap W(\mathbf{x}) = \varnothing$, начинающийся в точке $\mathbf{z}$, причём $\mathbf{z}$ является единственной точкой этого пути, для которой имеет место $\mathbf{y}\phi\mathbf{z}$, $\mathbf{y} \in W(\mathbf{x})$.*

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 [4]. *Пусть $W(\mathbf{x})$ – конечный кластер, содержащий вершину $\mathbf{x} \in V$. Тогда $W(\mathbf{x})$ имеет непустую конечную внешнюю границу ∂W, которая обладает следующими свойствами.*

1. Множество ∂W является циклом на решётке Λ, то есть

$$\partial W = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_0 \rangle$$

и $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1} \rangle$ является простым путём.

2. Цикл ∂W окружает точку $\mathbf{x}$.

Введём 6×6-матрицу $\mathcal{S}$ *соединения путей*, матричные элементы S_{ij}, $i, j = 1, ..., 6$ которой равны либо нулю, либо единице так, что $S_{ij} = 0$, если во внешней границе какого-либо конечного кластера невозможна стыковка связей $\langle \mathbf{i}, \mathbf{0} \rangle$, $\langle \mathbf{0}, \mathbf{j} \rangle$, указанных на рис.2. В противном случае матричный элемент S_{ij} полагается равным 1.

Теорема 2. *Матрица $\mathcal{S}$ имеет следующий вид*

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

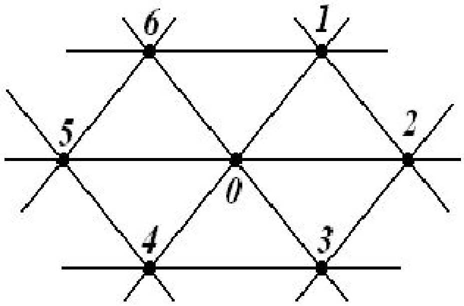

Рис. 2: Нумерация связей, смежных с вершиной **0**.

Доказательство. Ввиду симметрии рис.2 относительно поворотов на углы, кратные $\pi/6$, достаточно доказать утверждение о виде первой строки матрицы $\mathcal{S}$ вида (3). Далее, ввиду отражательной симметрии относительно оси, определяемой вершинами $\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{4}$, достаточно убедиться только, что $S_{12} = 0$, так как диагональные элементы матрицы $\mathcal{S}$, согласно её определению, равны нулю.

Если вершины **1** и **2** принадлежат внешней границе, то из них существует пара непересекающихся бесконечных путей γ_1, γ_2, которые начинаются, соответственно, в точках **1** и **2**. Построим путь, который состоит из последовательного прохождения пути γ_1 из бесконечности в точку **1**, затем последовательно – связей $\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$ и $\langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$ и, наконец, – пути γ_2 из точки **2** на бесконечность. Построенный путь делит плоскость $\mathbb{R}^2$ на две части. Кластер, во внешнюю границу которого входит пара связей $\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$, $\langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$, должен быть полностью расположен в одной из этих частей. Но он не может находиться в правой части плоскости, так как в противном случае у кластера нет вершины, которая была бы смежной с вершиной **0**. Если же кластер находится в левой части плоскости, в этом случае существует бесконечный путь, который начинается из вершины **0**. Тогда этот путь должен также полностью расположен в левой части плоскости и, следовательно, начинаться с одной из связей $\langle \mathbf{0}, \mathbf{j} \rangle$, $j \in \{3, 4, 5, 6\}$. Для любого пути такого типа либо вершина **1**, либо вершина **2** не будут иметь смежной вершины в кластере, в границу которого входят связи $\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$, $\langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$. Полученное противоречие доказывает, что $S_{12} = 0$. ■

Матрица $\mathcal{S}$ с неотрицательными элементами, согласно теореме Фробениуса [5], обладает максимальным по модулю собственным числом λ_*, которое является положительным. Согласно же теореме, доказанной в [6], для матриц, имеющих блочную структуру вида (3), это максимальное собственное число совпадает с максимальным по модулю (положительным) собственным числом матрицы $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Из явного вида матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ находим, что

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

, и следовательно, это собственное число равно $\lambda_* = 3$.

4. Нижняя оценка порога перколяции. Покажем, что для треугольной решётки существует нетривиальный порог перколяции $c_* > 0$ такой, что $Q(c) = 0$ при $c \in [0, c_*)$ и при этом выполняется оценка снизу $c_* > 1/3$.

Обозначим Γ_n класс простых путей $\gamma = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \rangle$ длины n, которые обладают свойством: при $i = 0, 1, ..., n-1$ и $j \geq i+1$ вершины $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{x}_j$ не являются смежными. (Если какие-то из указанных пар являются смежными, то путь γ можно сократить).

Очевидно, что

$$Q(c) = \lim_{n\to\infty} \Pr\{\exists(\gamma \in \Gamma_n), \gamma \subset \tilde{W}\}\,. \tag{4}$$

Справедливы оценки

$$\Pr\{\exists(\gamma \in \Gamma_n), \gamma \subset \tilde{W}\} \leq \sum_{\gamma\in\Gamma_n} \Pr\{\gamma \subset \tilde{W}\} \leq 2\cdot 3^n c^{n+1}\,, \tag{5}$$

так как число всех путей длины n, начинающихся в вершине $\mathbf{0}$ и обладающих указанным свойством, не превосходит $6\cdot 3^{n-1}$ и, кроме того, $\Pr\{\gamma \subset \tilde{W}\} = c^{n+1}$. Применяя неравенство (5) при оценивании вероятности (4), мы видим, что эта вероятность равна нулю при $3c < 1$. ■

5. Кластерное разложение на $\mathbb{Z}^2$. Пусть $\mathbf{A}$ семейство конечных кластеров W, содержащих вершину $\mathbf{0}$ на треугольной решётке. Определим для любого кластера $W \in \mathbf{A}$ случайное событие $A(W) = \{\tilde{W} : \mathbf{0} \in \tilde{W}, W \in \mathfrak{M}[\tilde{W}]\,, \tilde{W}(\mathbf{0}) = W\}$. Вероятность этого события равна

$$\Pr\{A(W)\} = c^{|W|}(1-c)^{|\partial W|}\,. \tag{6}$$

Согласно утверждению предыдущего раздела каждому кластеру W из семейства $\mathbf{A}$, отвечает цикл γ такой, что $\gamma = \partial W$. В связи с этим введём в рассмотрение семейство $\mathbf{B}$ всех циклов, окружающих точку $\mathbf{0}$. Для каждого цикла

$\gamma \in \mathbf{B}$ введем событие $B(\gamma) = \{\tilde{M} : \mathbf{0} \in \tilde{M}, \tilde{W}(\mathbf{0}) \in \mathfrak{M}[\tilde{W}], \partial\tilde{W}(\mathbf{0}) = \gamma\}$, которое представимо в виде конечного объединения попарно непересекающихся событий

$$B(\gamma) = \bigcup_{W \in \mathbf{A} : \partial W = \gamma} A(W) \,. \tag{7}$$

Вводя вероятность $P(\gamma) = \Pr\{B(\gamma)\}$, которая, согласно (6), (7), равна

$$P(\gamma) = \sum_{W \in \mathbf{A} : \partial W = \gamma} \Pr\{A(W)\} = \sum_{W \in \mathbf{A} : \partial W = \gamma} c^{|W|}(1-c)^{|\partial W|} \,.$$

Заметим, что $\{\tilde{a}(\mathbf{0}) = 0\} = \{\mathbf{0} \notin \tilde{W}\} \cup \bigcup_{W \in \mathbf{A}} A(W)$. Семейство $\mathbf{A}$ разлагается на непересекающиеся классы, состоящие из кластеров, объединяемых следующим признаком. К одному классу отнесём такие кластеры $W \in \mathbf{A}$, которые имеют одну и ту же внешнюю границу. Поэтому справедливо преобразование

$$\bigcup_{W \in \mathbf{A}} \ldots = \bigcup_{\gamma \in \mathbf{B}} \{ \bigcup_{W \in \mathbf{A} : \partial W = \gamma} \ldots \} \,,$$

которое сопоставляет множеству кластеров W с общей внешней границей единый "заполненный кластер". Далее, на основании (7), получаем $\{\tilde{a}(\mathbf{0}) = 0\} = \{\mathbf{0} \notin \tilde{W}\} \cup \bigcup_{\gamma \in \mathbf{B}} B(\gamma)$. Таким образом, принимая во внимание, что $1 - Q(c) = \Pr\{\tilde{a}(\mathbf{0}) = 0\}$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Вероятность $Q(c)$ определяется кластерным разложением*

$$c - Q(c) \; = \sum_{\gamma \in \mathbf{B}} P(\gamma) \,. \tag{8}$$

6. Основная теорема. Функция $Q(c)$ отлична от нуля только при $c > c^* > 0$, поэтому она не является аналитической. Основной результат работы формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Для бернуллиевского случайного поля $\{\tilde{c}(x); x \in V\}$ на треугольной решётке Λ справедливо неравенство $c^* \leq 2/3$.*

Доказательство. Воспользуемся элементарной оценкой $P(\gamma) \leq (1-c)^{|\gamma|}$, которая следует из (6) и выражения для $B(\gamma)$. Тогда имеет место неравенство

$$c - Q(c) = \sum_{\gamma \in \mathbf{B}} P(\gamma) \leq \sum_{\gamma \in \mathbf{B}} (1-c)^{|\gamma|} = \sum_{n=6}^{\infty} (1-c)^n r_n \,. \tag{9}$$

Найдем верхнюю оценку для величины r_n, $n \geq 6$. С этой целью введём множество $\mathbf{B}_n$ всех простых циклов длины n на треугольной решётке Λ, которые могут быть внешними границами кластеров, содержащих точку $\mathbf{0}$. Введём далее множество $\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0)$ путей $\gamma = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \rangle$ длины n на решётке, которые обладают свойством $\mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}_{j+2}$, $j = 0, 1, ..., n-2$, и связанные с ним подмножества $\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ путей длины n, у которых зафиксированы первые две вершины, а каждые две следующие друг за другом связи обязательно являются частью какого-либо цикла из $\bigcup\limits_{n=3}^{\infty} \mathbf{B}_n$. Ввиду однородности решётки, величина $|\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)|$ не зависит от точки $\mathbf{x}_0$.

Очевидно, что имеет место неравенство

$$r_n < Cn|\mathbf{C}_{n-2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)| \tag{10}$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Здесь множитель n связан с тем, что начальная точка $\mathbf{x}_0$ построения цикла может быть выбрана на произвольном расстоянии l от вершины $\mathbf{0}$ вдоль направления $\mathbf{e}_1$, $l \leq n$.

Для оценки величины $|\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)|$ введём следующую конструкцию. Охарактеризуем однозначно каждый путь из $\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0)$, $n \geq 2$ последовательностью $\langle \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_{n-1} \rangle$ векторов *сдвигов*, где $\mathbf{b}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ и каждый вектор $\mathbf{b}_i$, $i = 2, ..., n$ представляет собой разность $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}$, повёрнутую в обратную сторону на угол, который образуется вектором $\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i-2}$ и ортом $\mathbf{e}_1$ на плоскости расположения решётки. В этой параметризации множеству $\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ сопоставляется равномощное ему множество $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1)$ всех последовательностей $\langle \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n \rangle$ с фиксированным вектором $\mathbf{b}_1$, у которых каждая входящая в их состав пара $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1} \rangle$, $i = 1, 2, .., n-1$ является допустимой, то есть для каждой пары $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1} \rangle$ в множестве $\mathbf{B}$ существует такой кластер, у которого в составе внешней границы, записанной в терминах векторов сдвига, имеется пара $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle$ следующих друг за другом сдвигов, которая совпадает с $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1} \rangle$, $i = 1, 2, .., n-1$. Следовательно, $\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \equiv g_n(\mathbf{b}_1) = |\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1)|$.

Разложим множество $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1)$ на непересекающиеся друг с другом множества $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_n)$ путей, у которых зафиксирован последний сдвиговый вектор $\mathbf{b}_n$, $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1) = \bigcup\limits_{\mathbf{b}_n} \mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_n)$. Тогда, $g_n(\mathbf{b}_1) = \sum\limits_{\mathbf{b}_n} |\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n)|$. Вводя нумерацию для возможных сдвиговых векторов, которая представлена на рис.2, мы можем считать, что величина $|\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n)|$ при каждом значении $n \in \mathbb{N}$ является 6-мерным вектором $g_i(\mathbf{b}_1, n)$ так, что каждая его j-я компонента равна значению этой величины в том случае, когда $\mathbf{b}_n$ имеет номер j в принятой нумерации, $j = 1 \div 6$.

Согласно определению вектора $g_i(\mathbf{b}_1;n)$, имеет место $g_i(\mathbf{b}_1;1) = S_{ji}$, и для любого $n = 2, 3, ...$ и вектора $\mathbf{b}_1$ имеет место рекуррентное соотношение

$$g_i(\mathbf{b}_1;n) = \sum_{k=1}^{12} g_k(\mathbf{b}_1;n-1)S_{ki}\,.$$

Тогда, индукцией по $n \in \mathbb{N}$, заключаем, что

$$g_i(\mathbf{b}_1;n) = (\mathcal{S}^n)_{ji}\ .$$

Так как у матрицы $\mathcal{S}$ имеется единственное максимальное собственное число с максимальным абсолютным значением, то из полученного соотношения следует асимптотическая формула

$$g_i(\mathbf{b}_1,n) = D_{ij}\lambda_*^n(1+o(1))\,, \qquad (11)$$

где номер j соответствует сдвиговому вектору $\mathbf{b}_1$ и ненулевая матрица $\mathcal{D}$ имеет неотрицательные матричные элементы D_{ij}.

Используя (9),(10), находим, что для вероятности $Q(c)$ справедливы оценки

$$c - Q(c) \le C\sum_{n=6}^{\infty}(1-c)^n r_n \le n_*\sum_{n=6}^{\infty} n(1-c)^n|\mathbf{C}_{n-2}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)| =$$

$$= C\sum_{n=6}^{\infty} n(1-c)^n g_{n-2}(\mathbf{b}_1) = C\sum_{n=6}^{\infty} n(1-c)^n \sum_{i=1}^{6} g_i(\mathbf{b}_1;n-1)\,.$$

Применяя асимптотическую формулу (11), получаем

$$c - Q(c) \le CD\sum_{n=6}^{\infty} n[(1-c)\lambda_*]^n\,, \qquad (12)$$

где положительная постоянная $D > \max_j \sum_{i=1}^{6} D_{ij}$ выбрана так, чтобы имело место неравенство $g_i(\mathbf{b}_1,n) < D\lambda_*^n$.

Ряд в правой части неравенства (12) сходится при $(1-c)\lambda_* < 1$, то есть при $c > 1 - \lambda_*^{-1}$. Сходимость же этого ряда, применяя рассуждение, основанное на лемме Бореля-Кантелли (см., например, [7]), приводит к отличной от нуля вероятности перколяции при выполнении указанного ограничения на параметр c. Следовательно, $c_* \le 1 - \lambda_*^{-1} = 2/3$. ■

Литература

1. Вирченко Ю.П. Перколяция // Энциклопедия. Математическая физика. – Москва: Российская энциклопедия. – 1998.

2. Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. Method of Sequential Approximative Estimates in Descrete Percolation Theory // Studies in Mathematical Physics Research. ed. Charles V. Benton, New York: Nova Science Publishers. – 2004. – P.155-175.

3. Вирченко Ю.П., Толмачёва Ю.А. Мажорантные оценки порога перколяции бернуллиевского поля на квадратной решётке // Украинский математический журнал. – 2005. – 57. – 10. – С.1315-1326.

4. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians / H.Kesten. – Boston: Birkhauser,1982.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер. – М.: Наука. – 1966.

6. Антонова Е.С. Оценка мощности множества траекторий без самопересечений на квадратной решётке // Труды Воронежской зимней школы С.Г.Крейна 2008. – Воронеж, 2008. – С.15-30.

7. М.В. Меньшиков М.Ф., Молчанов С.А., Сидоренко А.Ф. Теория перколяции и некоторые приложения // Итоги науки и техники. – сер.теор. вер., мат. стат. и теор.кибер. – М.: ВИНИТИ. – 1986. – 24. – С.53-110.

RESTRICTIONS OF PERCOLATION THRESHOLD ON TRIANGLE LATTICE

E.S.Antonova

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: antonova_e_s@mail.ru

The problem of discrete percolation theory for the collection of independent random variables $c(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$ on the triangle lattice Λ is considered. On the basis of the cluster decomposition of the percolation probability, the upper and lower estimates of the percolation threshold the are found.

Key words: percolation probability, triangle lattice, finite cluster, external border, cluster decomposition, percolation threshold.