УДК 519.8

СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО НА ОСНОВЕ ВЗАИМНО ЗАВИСИМОЙ ИНФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

О.Н. Климова

Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается задача многокритериального выбора с набором взаимно зависимой информации об относительной важности двух групп критериев. С помощью функций минимума строится оценка сверху для неизвестного множества выбираемых решений.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, принятие решений, множество Парето, сужение множества Парето.

Введение

Одной из основных проблем в задачах многокритериального выбора является проблема поиска наилучших решений внутри множества Парето. Как правило, выбор среди парето-оптимальных решений возможен лишь за счет привлечения дополнительной информации о предпочтении лица, принимающего решение (ЛПР). Одним из наиболее распространенных видов дополнительной информации, является информация об относительной важности критериев. Смысл данной информации состоит в том, что критериям приписываются некоторые коэффициенты (веса), определяющие важность критериев. К данному времени разработаны многочисленные процедуры по назначению коэффициентов и дальнейшему их использованию [1], [2]. Но, как правило, эти методы являются эвристическими и не содержат в своей основе строгой доказательной базы. Последнее обстоятельство приводит к тому, что результат задачи зависит от выбора той или иной процедуры.

Другая проблема, связанная с первой, заключается в том, что принцип Парето «работает» только в определенном классе задач. Если поведение ЛПР выходит за рамки этого класса, то наилучшее решение необязательно будет парето-оптимальным.

Результаты данной работы опираются на методологию, в которой удалось избежать описанных выше проблем [3], [5–7]. Указанный подход обладает рядом преимуществ. Во-первых, вводится ряд аксиом, принятие которых обеспечивает справедливость принципа Парето: оптимальные решения следует искать внутри множества Парето. Во-вторых, дается четкое определение понятия количественной информации об относительной важности критериев, в рамках которого коэффициенты относительной важности имеют смысл, понятный ЛПР, не владеющему теорией принятия решений. Информация об относительной важности критериев заключается в том, что выделяются две группы критериев, причем одна из них для ЛПР оказывается более важной, чем другая. Количественно важность одной группы критериев по отношению к другой выражается при помощи двух наборов числовых параметров. Первый набор содержит величины "выигрышей" по каждому из критериев более важной группы, в том случае, если ЛПР делает уступки (величины уступок содержит второй набор параметров) по каждому из критериев менее важной группы. Обладая подобным набором параметров, можно осуществить компромисс, т.е. из множества Парето удалить те варианты, которые не являются оптимальными с точки зрения предпочтения ЛПР. Если полученное множество устраивает ЛПР, то процесс решения останавливается. В противном случае, необходимо еще раз уточнить предпочтения ЛПР и на основе новой информации снова произвести удаление лишних вариантов. Таким образом, суть данного подхода состоит в построении оценки сверху для множества выбираемых решений за счет *последовательного сужения множества Парето*.

Работа построена следующим образом. Сначала вводятся основные понятия и предположения. Далее рассматривается задача многокритериального выбора. Особенность этой задачи состоит в том, что дополнительная информация состоит из двух сообщений об относительной важности следующего вида: первая группа критериев важнее второй, которая, в свою очередь, важнее первой. Информация такого рода называется взаимно зависимой. Показывается, как производится сужение множества Парето на основе представленной информации.

Основные понятия и предположения

Задача многокритериального выбора включает в себя следующие элементы: множество возможных решений X, набор критериев, по которым оцениваются данные решения и бинарное отношение строгого предпочтения $\succ_X$.

Множество X представляет собой конечное множество произвольной природы, среди элементов которого осуществляется выбор. Критерии $f_1, f_2, ..., f_m$ $(m \geq 2)$ – некоторые числовые функции, образующие векторный критерий $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. ЛПР заинтересовано в получении максимальных значений по каждому из критериев. Бинарное отношение $\succ_X$, заданное на X, как и векторный критерий, выражает предпочтения ЛПР. Утверждение, что решение x_1 для ЛПР предпочтительнее решения x_2, эквивалентно записи $x_1 \succ_X x_2$.

Решение задачи состоит в выделении из множества X наилучших альтернатив с точки зрения предпочтений ЛПР. Полученное множество $C(X)$ называют множеством выбираемых решений.

Наряду с множествами X и $C(X)$ будем использовать множества возможных векторов $Y = f(X)$ и выбираемых векторов $C(Y) = f(C(X))$. Будем считать, что между множествами X и Y имеется взаимно однозначное соответствие и отношения $\succ_X$, $\succ_Y$ естественным образом согласованы между собой.

Предположим, что выполняются следующие аксиомы, определяющие «разумный» выбор ЛПР [7].

Аксиома Парето. *Для любых векторов* $y', y'' \in R^m$, *удовлетворяющих неравенству* $y' \geq y''$, *выполнено* $y' \succ_Y y''$.

Запись $y' \geq y''$ означает, что выполняются соотношения $y'_i \geqq y''_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, причем $y' \neq y''$.

Аксиома 1. (об исключении доминируемых векторов). *Для любой пары векторов* $y', y'' \in Y$, *удовлетворяющих соотношению* $y' \succ_Y y''$, *выполнено* $y'' \notin C(Y)$.

Аксиома 1 говорит о том, что если из двух векторов один не выбирается, то он не выбирается и из всего множества Y.

Альтернативами для доминируемых векторов являются недоминируемые. Множество недоминируемых векторов определяется следующим образом

$$Ndom(Y) = \{y^* \in Y \mid \nexists\, y \in Y : y \succ_Y y^*\}.$$

Из аксиомы 1 вытекает включение $Ndom(Y) \subset C(Y)$.

Аксиома 2. Для отношения $\succ_Y$ существует иррефлексивное и транзитивное продолжение $\succ$ на все пространство R^m.

Таким образом, отношение $\succ$ на множестве Y совпадает с $\succ_Y$. Также, согласно второй аксиоме, если одно решение предпочтительнее другого, а второе предпочтительнее третьего, то из первого и третьего решения выбирается первое.

Аксиома 3. Каждый из критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$.

Говорят, что критерий f_i согласован с отношением предпочтения $\succ$, если для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$, таких, что $y' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, ..., y'_m)$, $y'' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, ..., y'_m)$, $y'_i > y''_i$, верно $y' \succ y''$ [7].

Согласованность критерия с отношением предпочтения выражает заинтересованность ЛПР при прочих равных условиях в получении максимального значения по данному критерию.

Аксиома 4. Отношение предпочтения $\succ$ является инвариантным относительно положительного линейного преобразования.

Последняя аксиома означает, что для любых векторов $y', y'' \in R^m$ таких, что $y' \succ y''$, для любого числа $\alpha > 0$ и произвольного вектора $c \in R^m$ выполняется $\alpha y' + c \succ \alpha y'' + c$.

Выполнение перечисленных выше аксиом обеспечивает справедливость того, что выбираемые решения будут парето-оптимальными, т.е. $C(Y) \subset P(Y) \subset Y$ ([7]), где

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \nexists y \in Y : y \succ_Y y^*\}.$$

Введем множество всех номеров критериев $I = \{1,2,...,m\}$. Множество номеров всех критериев некоторой группы будем связывать с обозначением этой группы.

Определение 1 [8]. Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$. Говорят, что *группа критериев* A *важнее группы* B с двумя заданными наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$, если для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, для которых верно

$$y_i' - y_i'' = w_i^* \ \ \forall i \in A; \quad y_j'' - y_j' = w_j^* \ \ \forall j \in B; \quad y_s' = y_s'' \ \ \forall s \in I \setminus \{A \cup B\},$$

имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Другими словами, для того чтобы задать информацию об относительной важности двух групп критериев, ЛПР должно определить, каким количеством w_j^* единиц по менее важным критериям оно готово всякий раз жертвовать ради увеличения на w_i^* единиц по более важным критериям.

В силу инвариантности отношения предпочтения $\succ$ определение 1 можно упростить, зафиксировав вектора y', y'' ([7], теорема 3.4). В частности, если положить, что y', y'' имеют вид

$$y_i' = w_i^* \ \ \forall i \in A; \quad y_j' = -w_j^* \ \ \forall j \in B; \quad y_s' = 0 \ \ \forall s \in I \setminus \{A \cup B\}; \quad y'' = 0_m, \quad (1)$$

то определение 1 перепишется как

Определение 2 [7]. Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$. *Группа критериев* A *важнее группы* B с двумя заданными наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$, если для вектора y' вида (1) выполняется соотношение $y' \succ 0_m$.

В силу определения 1.2, задание информации об относительной важности критериев эквивалентно заданию векторов (1).

Определение 3 [7]. Пусть $A, A', B, B' \subset I$. Два сообщения об относительной важности, состоящие в том, что группа критериев A важнее группы критериев B и группа критериев A' важнее группы критериев B', называются *взаимно независимыми*, если ни одна пара из четырех групп A, A', B, B' не имеет ни одного общего элемента. В противном случае эти сообщения *взаимно зависимы*.

Определение 4. Бинарное отношение $\Re$, заданное на пространстве R^m, называют *конусным*, если существует такой конус $K \subset R^m$, что для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$ справедлива эквивалентность $y' \Re y'' \ \Leftrightarrow \ y' - y'' \in K$.

Отношение предпочтения $\succ$ является конусным, в силу теоремы 2.3 [7]: любое иррефлексивное, транзитивное и инвариантное относительно линейного положительного преобразования бинарное отношение $\succ$, удовлетворяющее аксиоме Парето, является конусным отношением с острым выпуклым конусом, содержащим неотрицательный ортант R_+^m и не содержащим начало координат. Обратно, всякое конусное отношение с конусом указанного выше типа удовлетворяет аксиоме Парето и является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования.

В данной работе рассмотрим следующую задачу с взаимно зависимой информацией.

Задача. Пусть даны две непустые группы критериев A и B, состоящие из r и t критериев соответственно, причем $r+t \leqq m$ и $A \cap B = \varnothing$. Не теряя общности, перенумеруем критерии таким образом, чтобы в группу A входили функции $f_1, f_2, \ldots, f_r$, а в группу B – $f_{r+1}, \ldots, f_{r+t}$. Дополнительная информация об относительной важности критериев (И) состоит из двух сообщений: группа критериев A важнее группы критериев B с двумя наборами положительных параметров w_i для всех $i \in A$ и w_j для всех $j \in B$; группа критериев B важнее группы A с двумя наборами положительных параметров γ_j для всех $j \in B$ и γ_i для всех $i \in A$.

Указанным сообщениям, согласно определению 1.2, соответствуют такие вектора

$$y^1 = (w_1, \ldots, w_r, -w_{r+1}, \ldots, -w_{r+t}, 0, \ldots, 0), \quad y^2 = (-\gamma_1, \ldots, -\gamma_r, \gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_{r+t}, 0, \ldots, 0), \tag{2}$$

что $y^1 \succ 0_m$, $y^2 \succ 0_m$,. На геометрическом "языке" это означает, что конусу K конусного отношения предпочтения $\succ$ принадлежат вектора (2).

Сужение множества Парето на основе взаимно зависимой информации

В том случае, когда задан набор информации, состоящий из нескольких сообщений об относительной важности критерии, необходимо убедиться, что данная информация является непротиворечивой (совместной).

Определение 5 [7]. Набор векторов (2) будем называть *непротиворечивым*, если существует хотя бы одно бинарное отношение $\succ^*$, для которого выполняются аксиомы 2-4 и соотношения $y^1 \succ^* 0_m, \ldots, y^k \succ^* 0_m$.

Согласно критерию непротиворечивости, полученному в работе [4], набор векторов (2) непротиворечив, тогда и только тогда, когда существуют номера $i \in A$ и $j \in B$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{w_i}{\gamma_i} > \frac{w_j}{\gamma_j}. \tag{3}$$

Пусть соотношение (3) выполняется для всех $i \in A$ и всех $j \in B$. Причем каждая из групп A и B состоит более чем из одного критерия.

Докажем следующее вспомогательное утверждение

Лемма. Пусть M – совокупность всех неотрицательных линейных комбинаций набора векторов $e^1, \ldots, e^m$, y^1, y^2, где $e^1, \ldots, e^m$ – единичные орты пространства R^m, y^1, y^2 вектора вида (2).

Включение $y \in M$ выполняется тогда и только тогда, когда имеют место неравенства

$$\min_{i \in A} \frac{y_i}{w_i} + \min_{j \in B} \frac{y_j}{w_j} \geqq 0, \tag{4}$$

$$\min_{i \in A} \frac{y_i}{\gamma_i} + \min_{j \in B} \frac{y_j}{\gamma_j} \geqq 0, \tag{5}$$

$$y_s \geqq 0, \ \forall s \in I \setminus \{A \cup B\}. \tag{6}$$

Доказательство. По определению конуса M, включение $y \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такой вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2)$ с неотрицательными компонентами, что $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2$, или в подробной записи

$$\begin{aligned} y_i &= \lambda_i + \mu_1 w_i - \mu_2 \gamma_i, \ \forall i \in A, \\ y_j &= \lambda_j - \mu_1 w_j + \mu_2 \gamma_j, \ \forall j \in B, \\ y_s &= \lambda_s, \ \forall s \in I \setminus \{A \cup B\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Необходимость. Пусть $y \in M$, а значит верно (7). Докажем, что имеют место соотношения (4) – (6).

Неравенство (6) очевидным образом выполняется из последнего равенства системы (7), так как $\lambda_s \geqq 0$ для всех $s \in I \setminus \{A \cup B\}$.

Подставим в $\frac{y_i}{w_i} + \frac{y_j}{w_j}$ выражения для y_i, y_j из системы (7). В силу предположения, что (3) выполняется для всех $i \in A$ и всех $j \in B$, получим

$$\frac{y_i}{w_i} + \frac{y_j}{w_j} = \frac{\lambda_i}{w_i} + \frac{\lambda_j}{w_j} + \mu_2 \left(\frac{\gamma_j}{w_j} - \frac{\gamma_i}{w_i} \right) \geqq 0 \quad \forall i \in A, \ \forall j \in B$$

или

$$\frac{y_i}{w_i} \geqq \max_{j \in B} \left(-\frac{y_j}{w_j} \right) = -\min_{j \in B} \left(\frac{y_j}{w_j} \right) \quad \forall i \in A.$$

Так как последнее неравенство справедливо для всех $i \in A$, то получим (4).

Теперь в $\frac{y_i}{\gamma_i} + \frac{y_j}{\gamma_j}$ подставим выражения для y_i, y_j из (7). Справедливость неравенства (5) доказывается аналогично выше проведенным рассуждениям.

Достаточность. Здесь, используя неравенства (4) – (6), нужно установить справедливость равенств (7).

Пусть неравенства (4) – (6) выполняются для произвольного $y \in M$. Выберем такие номера $i_1, i_2 \in A$, что $\frac{y_{i_1}}{w_{i_1}} \leqq \frac{y_i}{w_i}$, $\frac{y_{i_2}}{w_{i_2}} \leqq \frac{y_i}{w_i}$ для всех $i \in A$. И выберем номера $j_1, j_2 \in B$ таким образом, чтобы $\frac{y_{j_1}}{\gamma_{j_1}} \leqq \frac{y_j}{\gamma_j}$, $\frac{y_{j_2}}{\gamma_{j_2}} \leqq \frac{y_j}{\gamma_j}$ для всех $j \in B$.

Из неравенств (4) – (6) следует существование таких неотрицательных чисел $\lambda^1, \lambda^2, \lambda_s$, что имеют место равенства

$$\frac{y_{i_1}}{w_{i_1}} + \frac{y_{j_1}}{w_{j_1}} = \lambda^1, \tag{8}$$

$$\frac{y_{i_2}}{\gamma_{i_2}} + \frac{y_{j_2}}{\gamma_{j_2}} = \lambda^2, \tag{9}$$

$$y_s = \lambda_s \ \forall s \in I \setminus \{A \cup B\}. \tag{10}$$

Заметим, что в силу выбора номеров $i_1, i_2 \in A$, $j_1, j_2 \in B$, верно: $y_{i_1} > 0 \Leftrightarrow y_{i_2} > 0$ и $y_{j_1} > 0 \Leftrightarrow y_{j_2} > 0$.

Возможны следующие случаи:

1. $y_{j_1} > 0$, $y_{i_1} > 0$;
2. $y_{j_1} > 0$, $y_{i_1} < 0$;
3. $y_{j_1} < 0$, $y_{i_1} > 0$;
4. $y_{i_1} < 0$, $y_{j_1} < 0$;

Рассмотрим первый случай. Из равенств (9), (10) вытекает справедливость системы (7) при $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \frac{y_{j_2}}{\gamma_{j_2}}$, $\lambda_i = y_i + \gamma_i \frac{y_{j_2}}{\gamma_{j_2}}$, $\lambda_j = y_j - \gamma_j \frac{y_{j_2}}{\gamma_{j_2}}$, $\lambda_s = y_s$. В силу выбора номеров $i_1, i_2 \in A$, $j_1, j_2 \in B$ все компоненты вектора $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2)$ неотрицательны. В частности,

$$\lambda_i = y_i + \gamma_i \frac{y_{j_2}}{\gamma_{j_2}} \geqq y_{i_2} + \gamma_{i_2} \frac{y_{j_2}}{\gamma_{j_2}} = \lambda^2 \geqq 0, \quad \lambda_j = y_j - \gamma_j \frac{y_{j_2}}{\gamma_{j_2}} = \gamma_j \left(\frac{y_j}{\gamma_j} - \frac{y_{j_2}}{\gamma_{j_2}} \right) \geqq 0.$$

Второй случай совпадает с первым.

В третьем случае справедливость системы (7) вытекает из (8), (10). При этом $\mu_1 = -\frac{y_{j_1}}{w_{j_1}}$, $\mu_2 = 0$, $\lambda_i = y_i + w_i \left(\frac{y_{j_1}}{w_{j_1}} \right)$, $\lambda_j = y_j - w_j \left(\frac{y_{j_1}}{w_{j_1}} \right)$.

Четвертый случай не возможен в силу равенств (8), (9).

Теорема. Пусть отношение предпочтения $\succ$ удовлетворяет аксиомам 1-4 и задан непротиворечивый набор информации (И), причем неравенства (3) выполняются для всех $i \in A$ и $j \in B$. Тогда для любого непустого множества выбираемых оценок $C(Y)$ имеют место включения

$$C(Y) \subset \hat{P}(Y) \cap P(Y),$$

где $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ – множество векторов, отвечающих множеству парето-оптимальных решений в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных решений *X* и новым векторным критерием g размерности $p = m - |A| - |B| + 2$ с компонентами

$$g_1 = \min_{i \in A} \frac{f_i}{w_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j}{w_j}, \; g_2 = \min_{i \in A} \frac{f_i}{\gamma_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j}{\gamma_j}, \; g_s = f_s, \; \forall s \in I \setminus \{A \cup B\}. \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим символом *K* острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения $\succ$. Наличие информации об относительной важности (И) означает, что для векторов (2) выполняются соотношения $y^1 \succ 0_m$, $y^2 \succ 0_m$. Данные соотношения равносильны включениям $y^1 \in K$, $y^2 \in K$. Кроме того, $R_+^m \subset K$.

Обозначим через M выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1,...,e^m$, y^1, y^2. Так как конус M является подмножеством острого конуса *K*, то он также является острым конусом.

Покажем, что образующими конуса M являются все векторы набора $e^1,...,e^m$, y^1, y^2. Предположим, что вектор e^s, $s \in (A \cup B)$, представляется в виде линейной неотрицательной комбинации

$$e^s = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{m} \lambda_k e^k + \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2, \tag{12}$$

то найдутся $i \in A$, $i \neq s$ и $j \in B$, $j \neq s$, для которых $-\lambda_i = \mu_1 w_i - \mu_2 \gamma_i$, $-\lambda_j = -\mu_1 w_j + \mu_2 \gamma_j$. Отсюда следуют неравенства $\mu_1 w_i - \mu_2 \gamma_i \leqq 0$, $-\mu_1 w_j + \mu_2 \gamma_j \leqq 0$, равносильные неравенствам $\frac{w_j}{\gamma_j} \geqq \frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \frac{w_i}{\gamma_i}$, не совместимым с (3).

Если же вектор e^s таков, что $s \in I \setminus (A \cup B)$, то равенство (12) сразу влечет противоречие $1 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{m} \lambda_k \cdot 0 + \mu_1 \cdot 0 + \mu_2 \cdot 0$.

Теперь допустим, что вектор y^1 представляется в виде $y^1 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e^k + \mu y^2$. Тогда для каждого $j \in B$ имеет место противоречивое равенство $-w_j = \lambda_j + \mu \gamma_j$ отрицательного и неотрицательного чисел.

Аналогично вектор y^1 невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации указанных выше векторов.

Таким образом, конус M совпадает с множеством всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций вида

$$\lambda_1 e^1 + \ldots + \lambda_m e^m + \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2,$$

и в силу леммы 3.1 конус M совпадает с множеством ненулевых решений системы неравенств (4) – (6).

Из включений $M \subset K$ вытекают включения $C(Y) \subset \hat{P}(Y)$, где $\hat{P}(Y) = \{y^* \in Y \mid \nexists\ y \in Y : y - y^* \in M\}$ представляет собой множество недоминируемых элементов множества *Y*, упорядоченного конусным отношением с конусом *M*.

Пусть $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$, $f(x) \neq f(x^*)$ при $x, x^* \in M$. Благодаря доказанному выше совпадению множества решений (4) – (6) и конуса *M*, включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются следующие неравенства

$$\min_{i \in A} \frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{w_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j(x) - f_j(x^*)}{w_j} \geqq 0, \tag{13}$$

$$\min_{i \in A} \frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{\gamma_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j(x) - f_j(x^*)}{\gamma_j} \geqq 0, \tag{14}$$

$$f_s(x) - f_s(x^*) \geqq 0, \ \forall s \in I \setminus \{A \cup B\},$$

причем здесь хотя бы одно неравенство – строгое.

Докажем, что из неравенств (13), (14) следует

$$\min_{i \in A} \frac{f_i(x)}{w_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j(x)}{w_j} \geqq \min_{i \in A} \frac{f_i(x^*)}{w_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j(x^*)}{w_j}, \quad \min_{i \in A} \frac{f_i(x)}{\gamma_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j(x)}{\gamma_j} \geqq \min_{i \in A} \frac{f_i(x^*)}{\gamma_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j(x^*)}{\gamma_j}.$$

Рассмотрим неравенство (13). Предположим противное. Пусть выполняется

$$\min_{i \in A} \frac{f_i(x)}{w_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j(x)}{w_j} < \min_{i \in A} \frac{f_i(x^*)}{w_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j(x^*)}{w_j}.$$

Следовательно, найдутся такие номера $i_1 \in A$, $j_1 \in B$, что $\frac{f_{i_1}(x)}{w_{i_1}} = \min_{i \in A} \frac{f_i(x)}{w_i}$, $\frac{f_{j_1}(x)}{w_{j_1}} = \min_{j \in B} \frac{f_j(x)}{w_j}$ и справедливо

$$\frac{f_{i_1}(x)}{w_{i_1}} + \frac{f_{j_1}(x)}{w_{j_1}} < \min_{i \in A} \frac{f_i(x^*)}{w_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j(x^*)}{w_j} \leqq \frac{f_{i_1}(x^*)}{w_{i_1}} + \frac{f_{j_1}(x^*)}{w_{j_1}}.$$

Тогда

$$\min_{i \in A} \frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{w_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j(x) - f_j(x^*)}{w_j} \leqq \frac{f_{i_1}(x) - f_{i_1}(x^*)}{w_{i_1}} + \frac{f_{j_1}(x) - f_{j_1}(x^*)}{w_{j_1}} < 0.$$

Получили противоречие с неравенством (13). Аналогично проводится доказательство и для неравенства (14).

Из доказанного вытекает, что $g(x) \geq g(x^*)$. Отсюда следует, что $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ – это множество парето-оптимальных векторов, отвечающих множеству парето-оптимальных решений в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных решений X и новым векторным критерием g, определяемым равенствами (11). С учетом включений $C(Y) \subset \hat{P}(Y)$ и $C(Y) \subset P(Y)$ вытекает $C(Y) \subset \hat{P}(Y) \cap P(Y)$.

Пример. Рассмотрим задачу многокритериального выбора с векторным критерием $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x))$ и отношением предпочтения $\succ$, для которого выполняются аксиомы 1-4. Пусть группа A состоит из первых трех критериев, а группа B – из четвертого и пятого критериев. Предположим, что имеется информация о том, что группа A важнее группы B с двумя наборами параметров $\{1, 5, 3\}$, $\{1, 2\}$, а группа B важнее группы A с наборами параметров $\{2, 1, 4\}$ и $\{3, 7\}$. Согласно следствию 2.1, данный набор взаимно зависимой информации непротиворечив, причем неравенства вида (3) выполняются для всех $i \in A$ и $j \in B$. Рассмотрим два возможных решения x^1, x^2, при которых векторный критерий принимает значения $f(x^1) = (3, 0, 2, 4, 4)$, $f(x^2) = (1, 2, 3, 0, 2)$. Нетрудно заметить, что решению x^1 соответствуют наибольшие значения по первой, четвертому и пятому критериям, а x^2 – по второму и третьему. Воспользуемся теоремой 3.1, для того чтобы сделать выбор между двумя парето-оптимальными решениями – x^1, x^2. Для этого необходимо рассмотреть новую задачу многокритериального выбора с множеством $X = \{x^1, x^2\}$ и новым векторным критерием $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$. Вычислим значения $g(x)$

$$g_1(x^1) = \min\{\frac{3}{1}, \frac{0}{5}, \frac{2}{3}\} + \min\{\frac{4}{1}, \frac{4}{2}\} = 2, \quad g_2(x^1) = \min\{\frac{3}{2}, \frac{0}{1}, \frac{2}{4}\} + \min\{\frac{4}{3}, \frac{4}{7}\} = \frac{4}{7},$$

$$g_1(x^2) = \min\{\frac{1}{1}, \frac{2}{5}, \frac{3}{3}\} + \min\{\frac{0}{1}, \frac{2}{2}\} = \frac{2}{5}, \quad g_2(x^2) = \min\{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{4}\} + \min\{\frac{0}{3}, \frac{2}{7}\} = \frac{1}{2}.$$

В результате мы должны исключить из рассмотрения вариант x^2, поскольку ему соответствуют наименьшие значения по каждому из критериев g_1, g_2. Выбранным решением в данной задаче будет x^1.

Литература

1. Figueira, J. Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys / J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott. – Springer, 2005.
2. Goodwin, P. Decision analysis for management judgment (3rd Edition) / P. Goodwin, G. Wright. – John Wiley and Sons, 2004.
3. Noghin, V. D. Relative importance of criteria: a quantitative approach / V. D. Noghin // J. Multi-Criteria Decision Analysis. – 1997. – V. 6. – P. 355-363.
4. Ногин, В. Д. Учет взаимно зависимой информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений / В. Д. Ногин, О. Н. Климова // ЖВМиМФ. – 2006. – Т. 46, № 12. – С. 2178-2190.
5. Ногин, В. Д. Использование набора количественной информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений / В. Д. Ногин, И. В. Толстых // ЖВМиМФ. – 2000. – Т. 40, № 11. – С. 1593-1601.
6. Ногин, В. Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето / В.Д. Ногин // ЖВМиМФ. – 2002. – Т. 42, № 7. – С. 951-957.
7. Ногин, В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход / В. Д. Ногин . – 2-изд., испр. и доп. – М. : Физматлит, 2005. – 176 с.
8. Подиновский, В. В. Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / В. В. Подиновский // Многокритериальные задачи принятия решений. – 1978. – С. 48 – 82.

THE PARETO SET REDUCTION BASED ON MUTUALLY DEPENDENT INFORMATION AND WITH USING OF NONLINEAR FUNCTIONS

O.N. KLIMOVA

Saint-Petersburg State University

A multicriteria choice problem with interdependent information on the relative importance of two groups of criteria is considered. The functions of minimum are used to derive upper bounds for the unknown set of selected solutions.

Key words: decision making, multicriteria optimization, Pareto set, reduction of the Pareto set.