

# ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

**Е. Г. ЖИЛЯКОВ**  
**А. А. ЧЕРНОМОРЕЦ**  
**В. А. ГОЛОЩАПОВА**

Белгородский  
государственный  
университет

e-mail: [Zhilyakov@bsu.edu.ru](mailto:Zhilyakov@bsu.edu.ru)

В работе представлены результаты экспериментальных исследований эффективности метода оптимальной фильтрации изображений на основе частотных представлений в заданном частотном субинтервале на примере модельных изображений.

Ключевые слова: оптимальная фильтрация, изображение, трансформанта Фурье, субинтервал.

## Введение

Актуальность выполнения исследований обусловлена тем, что одно из направлений интенсивного развития современных информационно-телекоммуникационных систем определяется тенденцией использования наиболее естественных для человека форм информационного обмена, и, прежде всего, в виде визуальных данных. Обработка изображений является важной задачей. Существующие методы выделения (фильтрации) значимых характеристик отдельных компонент изображения, некоторых периодических структур изображений не являются оптимальными с точки зрения аппроксимации трансформант Фурье в заданных частотных интервалах, в которых осуществляется фильтрация. Поэтому актуальной проблемой является создание математических моделей и методов фильтрации, позволяющих адекватно учитывать энергетические характеристики изображений в выбранных частотных интервалах. В работе [1] разработан и теоретически обоснован новый метод оптимальной линейной фильтрации изображений на основе частотных представлений, который является оптимальным в том смысле, что спектр получаемого в результате фильтрации изображения имеет наименьшее среднеквадратическое отклонение от спектра фильтруемого изображения в заданном двумерном частотном субинтервале, а вне этого субинтервала имеет наименьшее отклонение от нуля. В данной работе изложены результаты экспериментальных исследований эффективности указанного метода. В основе исследований лежит метод вычислительных экспериментов с использованием модельных данных.

## Теоретические основы метода оптимальной фильтрации изображений на основе частотных представлений

О частотных представлениях при обработке изображений [2] можно говорить, поскольку изображение, как функция с конечной или неограниченной областью определения, может быть представлено в виде суммы синусов и косинусов различных частот, умноженных на некоторые весовые коэффициенты

$$f_{ik} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^N F(u, v) e^{ju(i-1)} e^{jv(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где  $F(u, v)$  – значение трансформанты Фурье функции

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N f_{ik} e^{-ju(i-1)} e^{-jv(k-1)}, \quad u = 1, 2, \dots, M, \quad v = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Метод оптимальной фильтрации изображений на основе частотных представлений [1,3] позволяет для нахождения результатов  $Y_\Omega$  фильтрации изображения  $\Phi = (f_{ik})$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , в частотной двумерной области  $\Omega$  построить вычислительную процедуру, не вычисляя при этом трансформанту Фурье. Для фильтрации изображений предложено использовать следующий вариационный принцип: трансформанта Фурье  $Z(u, v)$  результата фильтрации  $Y_\Omega$ , является оптимальной в смысле евклидовой нормы ее отклонения в заданном частотном интервале  $\Omega$  от трансформанты Фурье  $F(u, v)$  исходного изображения  $\Phi$  и от нуля – вне данного интервала, т.е.

$$\iint_{(u,v) \in \Omega} |F(u,v) - Z(u,v)|^2 dudv + \iint_{(u,v) \notin \Omega} |Z(u,v)|^2 dudv \Rightarrow \min. \quad (3)$$

Указанному вариационному принципу соответствует следующее изображение  $Y_\Omega$

$$Y_\Omega = A^T \cdot \Phi \cdot B, \quad (4)$$

где матрицы  $A=(a_{i_1 i_2})$ ,  $i_1, i_2=1, 2, \dots, M$ , и  $B=(b_{k_1 k_2})$ ,  $k_1, k_2=1, 2, \dots, N$  (субполосные матрицы [2]), определяются соотношениями

$$a_{i_1 i_2} = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_2(i_1 - i_2)) - \sin(\alpha_1(i_1 - i_2))}{\pi(i_1 - i_2)}, & i_1 \neq i_2, \\ \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\pi}, & i_1 = i_2, \end{cases} \quad b_{k_1 k_2} = \begin{cases} \frac{\sin(\beta_2(k_1 - k_2)) - \sin(\beta_1(k_1 - k_2))}{\pi(k_1 - k_2)}, & k_1 \neq k_2, \\ \frac{\beta_2 - \beta_1}{\pi}, & k_1 = k_2. \end{cases} \quad (5)$$

Значения

$$0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \leq \pi \quad (6)$$

задают границы частотного субинтервала  $\Omega$ .

Важным свойством определенного таким образом результата фильтрации является то, что указанный метод не допускает растекания энергии двумерного сигнала за пределы заданной частотной области.

### **Концептуальные основы экспериментальных исследований**

В ходе вычислительных экспериментов проводился сравнительный анализ оценки доли энергии изображения  $Y_{Opt}$ , полученного в результате оптимальной фильтрации,

$$\delta_{\Omega Opt} = \frac{\|Y_{Opt}\|^2 - P_\Omega(Y_{Opt})}{\|Y_{Opt}\|^2} = 1 - \frac{P_\Omega(Y_{Opt})}{\|Y_{Opt}\|^2}, \quad (7)$$

где  $\|Y_{Opt}\|^2$  – энергия изображения  $Y_{Opt}$  в области определения трансформанты Фурье,

$P_\Omega(Y_{Opt})$  – доля энергии изображения  $Y_{Opt}$  в частотном субинтервале  $\Omega$ , определяемая на основании соотношения

$$P_\Omega(Y_{Opt}) = \text{tr}ec(A_\Omega^T Y_{Opt} B_\Omega Y_{Opt}^T). \quad (8)$$

с соответствующими характеристиками изображений, полученных при реализации известных частотных фильтров [4]:

– идеальный фильтр (результат фильтрации  $Y_{Ideal}$ ),

$$H_{Ideal}(u,v) = \begin{cases} 1, & u \in [-\pi, \pi], \quad v \in [-\beta_2, -\beta_1] \cup [\beta_1, \beta_2], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (9)$$

– фильтр Баттерворта порядка  $n=2$  (результат фильтрации  $Y_{Butterw}$ ),

$$H_{Butterw}(u,v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D_1(u,v)}{D_0}\right)^{2n} + \left(\frac{D_2(u,v)}{D_0}\right)^{2n}}, \quad (10)$$

где  $D_0$  – частота среза,  $D_1(u,v)$ ,  $D_2(u,v)$  – расстояние между точкой  $(u,v)$  и осями симметрии  $l_1, l_2$  фильтра,

– Гауссов фильтр (результат фильтрации  $Y_{Gaussian}$ ),

$$H_{Gaussian}(u,v) = \exp\left(-\frac{D_1^2(u,v)}{2D_0^2}\right) + \exp\left(-\frac{D_2^2(u,v)}{2D_0^2}\right), \quad (11)$$

где  $D_0$  – частота среза,  $D_1(u,v)$ ,  $D_2(u,v)$  – расстояния между точкой  $(u,v)$  и осями симметрии  $l_1, l_2$  фильтра.

Построение фильтров осуществлено на основании параметров частотного субинтервала, в котором выполнялась оптимальная фильтрация.

Соответствующие оценки доли энергии результатов фильтрации (изображения  $Y_{Ideal}$ ,  $Y_{Butterw}$ ,  $Y_{Gaussian}$ ), которая сосредоточена вне выбранного частотного субинтервала  $\Omega$ , имеют следующий вид

$$\delta_{\Omega Ideal} = 1 - \frac{P_{\Omega}(Y_{Ideal})}{\|Y_{Ideal}\|^2}, \quad (12)$$

$$\delta_{\Omega Butterw} = 1 - \frac{P_{\Omega}(Y_{Butterw})}{\|Y_{Butterw}\|^2}, \quad (13)$$

$$\delta_{\Omega Gaussian} = 1 - \frac{P_{\Omega}(Y_{Gaussian})}{\|Y_{Gaussian}\|^2}. \quad (14)$$

Отметим, что вычисления как относительной доли «просачивания» энергии за пределы частотного субинтервала оказались доступными, благодаря разработанному в [1] методу вычисления долей энергии (8).

Для получения большей наглядности при оценивании различий оптимальной фильтрации и фильтрации с помощью известных фильтров представляется естественным построить графики соответствующих характеристик выходных последовательностей фильтров.

Сравнительный анализ в работе выполнен, исследуя параметры фильтров и результаты их применения в различных подобластях двумерной области (подобласти получены при фиксированных значениях одной из независимых переменных частотного пространства). Однако, данный факт не снижает важности полученных результатов в виду известного свойства преобразования Фурье (преобразование Фурье можно записать так, что переменные в нем оказываются разделенными).

### **Результаты вычислительных экспериментов**

Экспериментальные исследования целесообразно осуществлять на основе обработки модельных сигналов. Генерирование значений модельного изображения (рис. 1)  $\Phi = (f_{ik})$ ,  $i = 1, 2, \dots, 512$ ,  $k = 1, 2, \dots, 512$ , размерностью  $512 \times 512$  пикселей, осуществляется на основе соотношения

$$f_{ik} = a_1 \sin(2\pi f_1 k) + a_2 \sin(2\pi f_2 k) + a_3 \sin(2\pi f_3 k) + a_4 \sin(2\pi f_4 k) + a_5 \sin(2\pi f_5 k), \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, 512, k = 1, 2, \dots, 512,$$

где

$$f_1 = 0.0193; f_2 = 0.0208; f_3 = 0.0279, f_4 = 0.0295, f_5 = 0.0311,$$

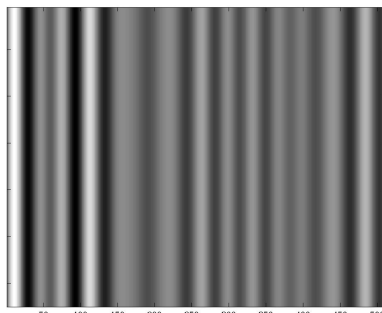
$$a_1 = 3.2; a_2 = 2.9; a_3 = 3.5, a_4 = 2.1, a_5 = 2.2.$$

Такие значения частот позволяют осуществить исследование различных аспектов фильтрации и, прежде всего, влияния энергии исходного сигнала за пределами частотного субинтервала на ее результаты.

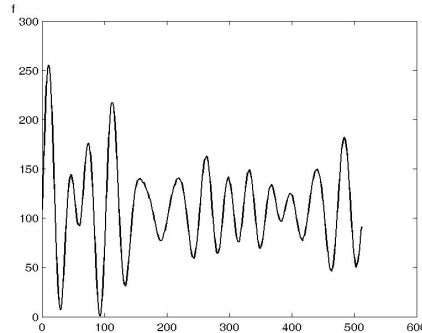
Фильтрация модельного сигнала (15) на основании метода оптимальной фильтрации изображений на основе частотных представлений осуществлялась в следующих частотных субинтервалах:

$$\Omega_i : \{\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi, \beta_1 = \beta_{01} + \Delta\beta(i-1), \beta_2 = \beta_{02} + \Delta\beta(i-1)\}, i = 1, 2, \dots, 15, \quad (16)$$

где  $\Delta\beta$  – величина смещения границ очередного частотного субинтервала.



а



б

Рис. 1. Модельное изображение:  
а – в виде изображения, б – профиль

В ходе экспериментов были использованы следующие значения границ частотного субинтервала

$$\beta_{01} = 0.035\pi, \beta_{02} = 0.04\pi, \Delta\beta = 0.0025\pi. \quad (17)$$

В табл. 1 представлены значения долей энергии выходных последовательностей оптимального и других анализируемых фильтров, находящихся вне заданного частотного интервала, вычисленные согласно (7), (12)-(14).

Таблица 1

**Оценка долей энергии результатов фильтрации вне частотного субинтервала  $\Omega$**

№	Границы частотного субинтервала $\Omega$		$\delta_{\Omega Opt}$	$\delta_{\Omega Ideal}$	$\delta_{\Omega Butterw}$	$\delta_{\Omega Gaussian}$
	$\beta_1$	$\beta_2$				
1	0.035 $\pi$	0.04 $\pi$	0.13211	0.28323	0.27313	0.27189
2	0.0375 $\pi$	0.0425 $\pi$	0.3492	0.30822	0.31119	0.31036
3	0.04 $\pi$	0.045 $\pi$	0.13101	0.55406	0.55503	0.55472
4	0.0425 $\pi$	0.0475 $\pi$	0.34099	0.72638	0.55996	0.60419
5	0.045 $\pi$	0.05 $\pi$	0.41356	0.86981	0.87022	0.87001
6	0.0475 $\pi$	0.0525 $\pi$	0.23196	0.56816	0.57263	0.57082
7	0.05 $\pi$	0.055 $\pi$	0.34246	0.58755	0.6305	0.62484
8	0.0525 $\pi$	0.0575 $\pi$	0.12423	0.22294	0.22436	0.22396
9	0.055 $\pi$	0.06 $\pi$	0.33214	0.63152	0.6312	0.63129
10	0.0575 $\pi$	0.0625 $\pi$	0.40426	0.85964	0.7762	0.8095
11	0.06 $\pi$	0.065 $\pi$	0.1968	0.41986	0.4204	0.42016
12	0.0625 $\pi$	0.0675 $\pi$	0.24863	0.57319	0.57095	0.57158
13	0.065 $\pi$	0.07 $\pi$	0.4328	0.92163	0.92157	0.92155
14	0.0675 $\pi$	0.0725 $\pi$	0.47163	0.69156	0.69313	0.69208
15	0.07 $\pi$	0.075 $\pi$	0.20767	0.7969	0.68474	0.7815

Легко видеть, что относительные доли «просачивания» энергии за пределы частотного субинтервала у выходных последовательностей идеального, Гауссова фильтров и фильтра Баттерворта существенно больше.

Как показано в ходе экспериментов выходная последовательность оптимального фильтра определяется только трансформантой Фурье в выбранном частотном субинтервале. В отличие от этого, на выходную последовательность идеального, Гауссова фильтров и фильтра Баттерворта влияет энергия входного изображения, сосредоточенная вне выбранного частотного интервала. Это различие легко обнаружить на рис. 2, на котором представлены абсолютные значения трансформант Фурье выходных последовательностей оптимального и других фильтров.

Далее представлены результаты фильтрации модельного изображения (рис. 1) в частотном субинтервале

$$\Omega: \{\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi, \beta_1 = 0.04\pi, \beta_2 = 0.045\pi\}.$$

На рис. 2 приведены абсолютные значения трансформант Фурье при  $u=0.22\pi$ ,  $v \in [0.03\pi, 0.075\pi]$  исходного изображения и результатов фильтрации, полученных при применении оптимального и других фильтров в заданном частотном субинтервале  $\Omega$ .

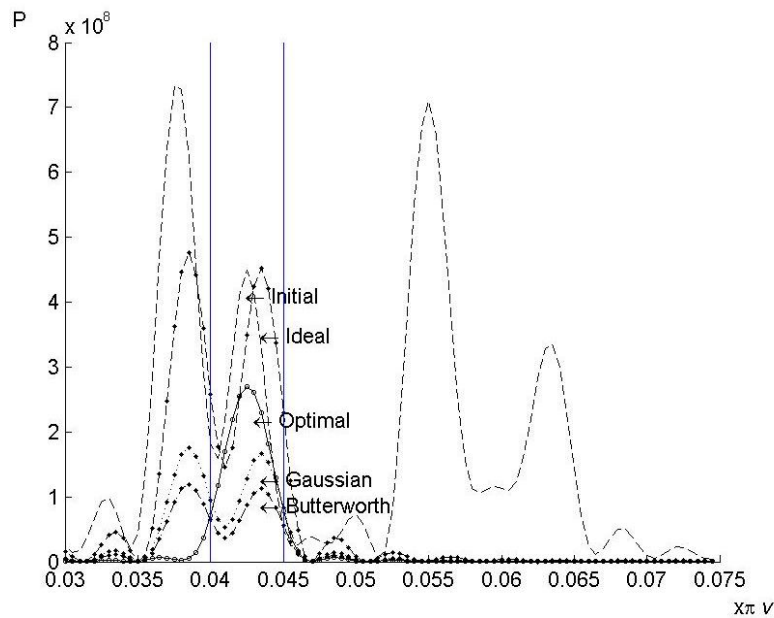


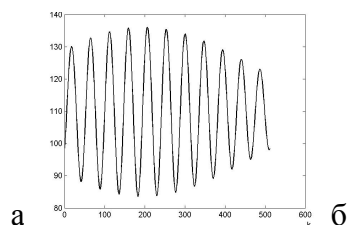
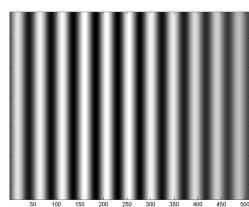
Рис. 2. Трансформанты Фурье (абсолютные значения) в частотном субинтервале  $\alpha_1=0, \alpha_2=\pi, \beta_1 = 0.04\pi, \beta_2 = 0.045\pi$  при  $u=0.22\pi$ . ----- – исходного изображения; выходных последовательностей фильтров: —◆—◆— – оптимальный, -◆-◆- – идеальный, ·◆·◆· – Баттерворта, ·◆····◆· – Гауссов,

На рис. 3 влияние дополнительной энергии исходного изображения, сосредоточенной вне выбранного частотного субинтервала у его левой границы (рис. 2), проявляется в наличии существенных изменений яркости пикселей изображений (рис. 3в, 3д, 3ж), являющихся результатами фильтрации с помощью фильтров, отличных от оптимального фильтра, и в наличии биений на графиках соответствующих профилей изображений.

### Выводы

Результаты вычислительных экспериментов как с модельными изображениями, так и с реальными фотоснимками в цифровом виде показывают, что относительные доли «просачивания» энергии за пределы указанного частотного субинтервала у выходных последовательностей частотных фильтров, основанных на применении ДПФ, существенно больше, чем у разработанного метода.

В ходе экспериментов показано, что энергия входного изображения, сосредоточенная вне выбранного частотного интервала, влияет на выходную частотных фильтров, основанных на применении ДПФ, в значительно большей степени, чем на результат, полученный на основании метода оптимальной фильтрации. Данное влияние проявляется как на графиках значений соответствующих трансформант Фурье, так и на изображениях, полученных в результате фильтрации.



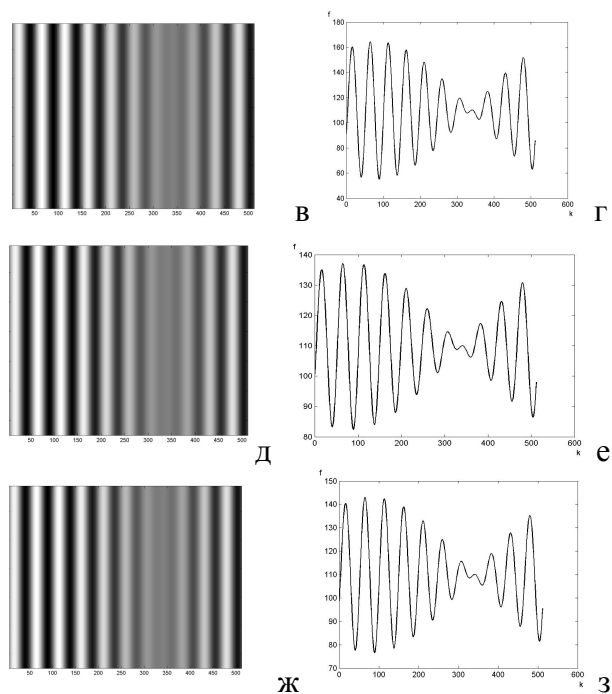


Рис. 3. Результаты фильтрации (изображение и профиль) на основании фильтров: а, б – оптимальный, в, г – идеальный, д, е – Баттерворта, ж, з – Гауссов

### Литература

1. Жилияков, Е.Г. Вариационные алгоритмы анализа и обработки изображений на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2008. – 146 с.
2. Жилияков, Е.Г. Методы анализа и построения функций по эмпирическим данным на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.
3. Жилияков, Е.Г. Оптимальная фильтрация изображений на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники. – Сер. ЭВТ, 2008. – Вып. 1. – С. 118-131.
4. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений [Текст] / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2006. – 1072 с.

## ON EFFICIENCY OF IMAGE OPTIMAL FILTRATION METHOD

**E. G. ZHILYAKOV**  
**A. A. CHERNOMORETS**  
**V. A. GOLOSCHAPOVA**

*Belgorod State University*

*e-mail:*  
*Zhilyakov@bsu.edu.ru*

Using model image, the experimental research results of efficiency of the image optimal filtration method on the basis of frequency representations in the specified frequency subintervals are given in the work.

Key words: optimal filtration, image, Furie transformant, subinterval.