О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ГЛАВНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Б.А. ТАТАРИНОВИЧ[1]
М.И. БИДЫЛО[1]
А.А. ЧЕРНОМОРЕЦ[2]

[1]Харьковский национальный аграрный университет

[2]Белгородский государственный университет

e-mail: Chernomorets@bsu.edu.ru

В работе предложен метод повышения точности решения главной геодезической задачи и способ натурной проверки его работоспособности.

Ключевые слова: главная геодезическая задача, погрешность расчета длины дуги, эллиптический интеграл

Важность проблемы разработки эффективных методов решения главной геодезической задачи обусловлена потребностью выполнения геодезических расчетов при решении многих задач по исследованию и измерению на различных территориях.

Как известно, возможность и точность решения главной геодезической задачи [1] зависит с одной стороны, от корректности исходных данных (расстояния/приращение долгот и широт, азимута в совокупности с расположением исходных/определяемых точек), так и метода решения задачи с другой. Косвенные методы [2] решения главной геодезической задачи очень чувствительны к указанным исходным данным и не работают при значительных расстояниях и изменениях азимута в северных широтах. Прямой метод решения указанной задачи по соотношениям сферодической геодезии позволяет с достаточной точностью решать эту задачу через рассмотрение сферического треугольника (рис.1), для которого длины сторон выражены в угловой мере *а*, *в*, *с*, причем а соответствует широте B_1, в – B_2.

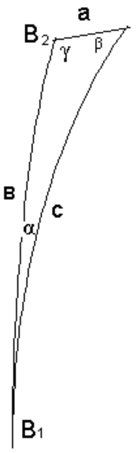

Рис. 1. Геометрические параметры главной геодезической задачи

Сторона *с* является или задаваемой (прямая задача) или определяемой (обратная задача). Некоторые из углов треугольника α, β, γ также являются или задаваемыми, или определяемыми.

Если бы решение задачи требовалось проводить только в градусной мере, то единственной проблемой было бы определение градусной длины геодезической линии от B_1 до B_2, которую необходимо было бы определять исходя из радиуса кривизны земной поверхности от первой точки до второй. Безусловно, на значительных расстояниях радиус кривизны меняется, и градусная мера длины геодезической линии есть величина, изменяемая в неравномерном темпе (собственно тоже самое мы имеем с изменением единичной длины дуги по сторонам *в* и *а*). Для реального решения в этом случае точность решения оценивается нормой различия длины меридианов для сферы и для эллипсоида.

Второй проблемный вопрос в этом решении состоит в связи градусной меры, а именно географических координат и стороны с её линейной мерой. Определение длины геодезической линии (т.е. стороны *с*) наиболее точно решается через криволинейный интеграл. Используют два пути разложения интегралов:

– разложение в ряды,
– методы решения дифференциальных уравнений.

Имеются ряд простых решений, которые обеспечивают удовлетворительные решения задач на малое расстояние соизмерения с длинами сторон геодезической сети.

Часто используется способ Шрейбера:

$$B_2 = B_0 - d'',$$

$$L_2 = L_1 - e'' ,$$

$$A_{21} = A_{21} \pm 180^\circ + (t - E)\rho'' ,$$

$$\delta = \frac{S}{C} V_1^2 ,$$

$$U_0 = \sigma \cos A_{12} ; \upsilon = \delta \sin A_{12} ,$$

$$U = U_0 (1 + \frac{\upsilon_0^2}{3}); \upsilon = \upsilon_0 (1 + \frac{\upsilon_0^2}{6}) ,$$

$$B_0 = B_1 + \rho'' U \left[V_1 - \frac{C^2}{4} U (3 \sin 2B_1 + 2 \cos 2B_1) \right] ,$$

$$\gamma = \frac{\upsilon V_0}{V_1^2} ; \lambda = \frac{\gamma}{\cos B_0} ; \tau = \lambda \sin B_0 ,$$

$$e'' = \lambda (1 - \frac{\tau^2}{3}) \rho'' ; d'' = \frac{t\gamma}{2} (1 + \frac{\lambda^2}{12}) ,$$

$$V_0 q'' ; t = \tau (1 - \frac{\lambda^2 + \tau^2}{6}) ,$$

$$E = \frac{U\upsilon}{2} ,$$

где V_1 и V_2 –вторые основные сфероидические функции, вычисленные по широте B_1 и B_2.

Приведённые формулы обеспечивают вычисление геодезических координат B_1 и V_2 с точностью вычисления до 0,0001”, а азимутов до 0,001”.

Для решения обратной геодезической задачи наиболее применимые формулы со средними аргументами (формулы Гаусса), имеющие следующий вид:

$$S \cos A_m = bM_m [1 - \frac{2l^2 - l^2 \sin^2 B_m}{24}] = Q ,$$

$$S \sin Am = lcoB_m N_m [1 - \frac{b^2 - l^2 \sin^2 B_m}{24}] = P ,$$

$$a = l \sin B_m [1 + \frac{3b^2 + 2l^2 - 2l^2 - 2l^2 \sin^2 B_m}{24}] ,$$

$$tgA_m = \frac{P}{Q} ,$$

$$S = Q \cos A_m = P \sin A_m = \sqrt{Q^2 + P^2} ,$$

$$A_{12} = A_m - a_{12} ,$$

$$A_{21} = A_m + a_{12} \pm 180^\circ .$$

Рассмотренные выше методы не решают задачу для значительных расстояний, особенно в северных широтах.

Наиболее точное решение этой задачи даёт взятие эллиптического интеграла:

$$\alpha_\mu = \int_{B_1}^{B_2} M(B) dB .$$

Целочисленное взятие этого интеграла будет заключаться в получении суммы некоторого количества элементарных (единичных) дуг (с увеличением количества рассматриваемых элементарных дуг растет точность решения), составляющих эту часть меридиана

$$\alpha_\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\pi}{360 \cdot 60 \cdot 60} \cdot M_i .$$

Решение данного выражения дает дискретный подход в целочисленных решениях через взятие первообразной функции [3] на границах интегрирования и в некотором множестве точек внутри интервала интегрирования.

Обозначим

$$\rho'' = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi}.$$

Тогда, используя различное количество точек внутри интервала интегрирования, можно указать следующие расчетные формулы:

а) для одной средней точки

$$\alpha_\mu = \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \cdot \frac{M_1 + M_{cp} + M_2}{3},$$

где M_{cp} – значение на середине интервала,

б) для двух средних точек

$$\alpha_\mu = \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \cdot \frac{M_1 + 2M_{cp} + M_2}{4},$$

в) для трёх средних точек

$$\alpha_\mu = \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \cdot \frac{M_1 + 3M_{cp} + M_2}{5},$$

г) для четырёх средних точек

$$\alpha_\mu = \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \cdot \frac{M_1 + 4M_{cp} + M_2}{6},$$

д) для *n* точек

$$\alpha_\mu = \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \cdot \frac{M_1 + \sum_{i=1}^{n} M_{cpi} + M_2}{n+2},$$

где M_{cpi} – значения на середине рассматриваемых интервалов по дуге эллипса (I = 1, 2, ..., n).

Взятие интеграла сводится к целочисленным процедурам разложения его в ряд или вычисление по правилу Симпсона через крайние и средние значения радиусов кривизны.

В данной работе предлагается не ограничиваться фиксированным количеством точек расчета, а брать их такое количество которое позволит обеспечить достаточную точность.

Оценка точности расчета длины дуги проводилась на дуге известной длины (вдоль меридиана). С целью проверки работоспособности предложенного метода, а также для проведения практических измерений на местности, были проведены следующие эксперименты.

Базисы были выбраны в меридианном, параллельном и произвольном направлении. Для каждого направления измерялись длины базисов с помощью приемников GPS в дифференциальном режиме, которые составили около 2 км. Эти длины являлась контрольными.

Базисы были разбиты на составляющие интервалы по количеству слагаемых в интеграле. Длины интервалов брались приблизительно одинаковыми, хотя это не являлось существенным. Длины составляющих интервалов определялись только для вычисления радиусов кривизны в данной точке.

Радиусы кривизны земной поверхности в данной точке измерялись по следующей методике. На концы внутреннего интервала ставились высокоточные теодолиты (1 сек) и производились замеры вертикальных углов между отвесной линией и встречно направленными лучами двух теодолитов. Расстояния между теодолитами измерялись лазерными дальномерами. Затем решался плоский треугольник, откуда вычислялся радиус кривизны в данной точке. Таким образом, были получены все необходимые для расчета радиусы кривизны, и по ним производилось вычисление интегралов и сравнение с исходным базисом, измеренным приемником GPS.

Полученные результаты полевых работ значительно уступали в точности теоретическим расчетам. Так погрешность определения радиусов кривизны составляла несколько процентов (исходя из длин дуг на поверхности и погрешности измерения вертикальных углов). Поэтому для более чистого эксперимента необходимо брать более длинные дуги и в этом случае погрешность эксперимента будет определяться длинной базиса с прямой видимостью, что при условии ночной видимости с источниками направленного излучения может составить несколько десятков километров. Это даст возможность получить погрешность в сотые доли процента. В этом случае погрешность измерений в полевых условиях может быть одного порядка с погрешностью, получаемой при теоретических расчетах.

Таким образом, предложенный в работе метод определения длины дуги является эффективным инструментом решения главной геодезической задачи.

Литература

1. Хаимов, З.С. Основы высшей геодезии / З.С. Хаимов. – М.: Недра, 1984. – 360 с.
2. Закатов, П.С. Высшая геодезия / П.С. Закатов. – М.: Мир, 1981. – 635 с.
3. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: АСТ, 2006. – 992 с.

A METHOD OF THE SOLUTION OF THE MAIN GEODETIC PROBLEM ON THE BASIS OF AN INTEGER SOLVING OF ELLIPTIC INTEGRAL

B.A. TATARINOVICH[1]
M.I. BIDYLO[1]
A.A. CHERNOMORETS[2]

[1] Kharkov national agrarian university

[2] Belgorod State University

e-mail: Chernomorets@bsu.edu.ru

In work the method of increasing of the main geodetic task solution accuracy and a way of natural verifying of its working capacity is offered.

Key words: the main geodetic problem, calculation error of an arch length, elliptic integral