

**ЖЕСТКОЕ НЕКОГЕРЕНТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ  
БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ В КРИСТАЛЛАХ**

В.В. Сыщенко, А.И. Тарновский

Белгородский государственный университет, 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14,  
e-mail: syshch@bsu.edu.ru

Некогерентное тормозное излучение электронов высокой энергии в кристалле обусловлено тепловым разбросом атомов относительно их равновесных положений в решетке. В настоящей работе развита процедура моделирования некогерентного излучения, основанная на квазиклассических формулах теории тормозного излучения. Продемонстрирована значительная ориентационная зависимость интенсивности жесткого некогерентного излучения при углах падения электронов на плотно упакованную атомами кристаллографическую ось, близких к критическому углу аксиального каналирования. В работе представлены новые результаты, относящиеся, в частности, к излучению в толстых кристаллах и учитывающие коллимацию излучения. Результаты моделирования находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** тормозное излучение, жесткие фотоны, электрон, позитрон, кристалл, длина когерентности, когерентный, некогерентный, моделирование.

**Введение**

При движении быстрых заряженных частиц в кристалле вдоль какой-либо кристаллографической оси или плоскости возможно явление каналирования, когда частицы движутся в каналах, образованных атомными цепочками или плоскостями кристалла (см., например, [1-3]). В процессе каналирования имеет место перераспределение потока частиц в кристалле. Благодаря этому возможно как увеличение, так и уменьшение выхода процессов, связанных с малыми прицельными параметрами. Это связано с тем фактом, что положительно заряженные частицы в режиме каналирования не могут приблизиться на малые расстояния к атомным ядрам в решетке, поэтому такие частицы будут сталкиваться с ядрами реже, чем в отсутствие каналирования. Для отрицательно заряженных частиц имеет место обратный эффект. Если же угол разориентации кристалла существенно превышает критический угол каналирования, эффект перераспределения потока частиц в кристалле отсутствует [3]. Таким образом, в случае разориентации кристалла на углы порядка критического угла каналирования должна иметь место существенная ориентационная зависимость выхода процессов, связанных с малыми прицельными параметрами. Такая ориентационная зависимость наблюдалась ранее для выхода ядерных реакций, дельта-электронов и ряда других процессов (см., например, [2, 3, 5-7]).

В работах [8, 9] с помощью процедуры, основанной на квазиклассической теории тормозного излучения, исследовалась аналогичная ориентационная зависимость интенсивности некогерентного излучения релятивистских электронов и позитронов при движении частиц в кристалле вблизи плотно упакованной атомами кристаллографической оси и плоскости. В настоящей статье представлены новые результаты, учитывающие коллимацию излучения, регистрируемого в экспериментах. Такой учет оказывается существенным при исследовании излучения в толстых кристаллах, когда частица может существенно отклониться от первоначального направления движения за счет многократного рассеяния. Результаты моделирования сравниваются с полученными ранее в Харьковском физико-техническом институте экспериментальными данными [6] по ориентационной зависимости выхода фотонов в области энергий, близких к энергии излучающего электрона.



### Методика

Процесс тормозного излучения релятивистского электрона развивается в большой пространственной области вдоль импульса частицы, называемой длиной когерентности,  $l_{coh} \sim 2\varepsilon\varepsilon'/m^2c^3\omega$ , где  $\varepsilon$  – энергия начального электрона,  $\omega$  – частота излученного фотона,  $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$ ,  $m$  – масса электрона,  $c$  – скорость света в вакууме [3, 10]. В широкой области частот излучения длина когерентности будет превышать межатомные расстояния в веществе:

$$l_{coh} \gg a. \quad (1)$$

В этом случае эффективная константа взаимодействия электрона с атомами решетки может оказаться большой по сравнению с единицей, что позволяет использовать квазиклассическое приближение для описания излучения электрона в кристалле. При этом в дипольном приближении спектральная плотность тормозного излучения описывается формулой [3, 11]

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{e^2\omega}{2\pi c^4} \int_{\delta}^{\infty} \frac{dq}{q^2} \left[ 1 + \frac{(\hbar\omega)^2}{2\varepsilon\varepsilon'} - 2\frac{\delta}{q} \left( 1 - \frac{\delta}{q} \right) \right] |\mathbf{W}_q|^2, \quad (2)$$

где  $\delta = m^2c^3\omega/2\varepsilon\varepsilon' \sim l_{coh}^{-1}$ , а величина

$$\mathbf{W}_q = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}}_{\perp}(t) e^{icqt} dt \quad (3)$$

представляет собой фурье-образ ускорения электрона в направлении, ортогональном его начальной скорости  $\mathbf{v}$ .

Основной вклад в интеграл (2) вносят малые значения  $q$ ,

$$q \sim \delta. \quad (4)$$

С другой стороны, характерные расстояния, на которых ускорение электрона в поле атома в (3) отлично от нуля, по порядку величины равны радиусу экранирования атомного потенциала  $R$ . Соответствующие промежутки времени, в течение которых подинтегральное выражение в (3) будет отлично от нуля, составляют  $\Delta t \sim R/c$ . Но в силу условия (1) в интересующей нас области частот  $\delta \ll R^{-1}$ . Поэтому мы можем представить  $\mathbf{W}_q$  в виде [12]

$$\mathbf{W}_q = c \sum_n \mathcal{G}_n e^{icqt_n}, \quad (5)$$

где  $\mathcal{G}_n$  – двумерный угол рассеяния электрона при столкновении с  $n$ -ым атомом,  $t_n$  – момент времени, когда происходит столкновение.

Угол рассеяния на атоме как функцию прицельного параметра столкновения легко найти из уравнения движения электрона в поперечной плоскости [1-3]

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = -\frac{c^2 e}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} U(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Выбирая потенциал атома в виде экранированного потенциала Кулона,  $U(r) = (Z|e|/r) \exp(-r/R)$ , где  $Z$  – атомный номер, находим, что

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}_n) = \frac{2Ze|e|}{\varepsilon R} K_1\left(\frac{\rho_n}{R}\right) \frac{\mathbf{p}_n}{\rho_n}, \quad (7)$$

где  $K_1(x)$  – модифицированная функция Бесселя третьего рода (функция Макдональда),  $\rho_n$  – прицельный параметр  $n$ -ого столкновения.

Рассмотрим излучение, возникающее при падении электрона на кристалл под малым углом  $\psi$  к одной из плотно упакованных атомами кристаллографических осей (оси  $z$ ). Известно [3], что усреднение выражения для  $|\mathbf{W}_q|^2$  по тепловым колебаниям атомов в кристалле приводит к расщеплению этой величины (а с ней и интенсивности излучения) на сумму двух слагаемых, описывающих когерентные и некогерентные эффекты в излучении:

$$\begin{aligned} \langle |\mathbf{W}_q|^2 \rangle = & c^2 \sum_{n,m} e^{iqc(t_n - t_m)} \langle \mathcal{G}(\rho_n + \mathbf{u}_n) \rangle \langle \mathcal{G}(\rho_m + \mathbf{u}_m) \rangle + \\ & + c^2 \sum_n \left\{ \langle (\mathcal{G}(\rho_n + \mathbf{u}_n))^2 \rangle - \langle \mathcal{G}(\rho_n + \mathbf{u}_n) \rangle^2 \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\rho_n = \rho(t_n) - \rho_n^0$  – прицельный параметр столкновения с  $n$ -ым атомом в его равновесном положении  $\rho_n^0$ ,  $\rho(t)$  – траектория электрона в плоскости, ортогональной оси  $z$ ,  $\mathbf{u}_n$  – тепловое смещение  $n$ -го атома относительно положения равновесия.

В области частот, удовлетворяющей условию

$$l_{coh} \ll a / \psi, \quad (9)$$

где  $a$  – расстояние между двумя ближайшими параллельными атомными цепочками, основной вклад в интенсивность излучения вносит слагаемое, описывающее некогерентные эффекты [3]. Подстановка формулы (7) для угла рассеяния на отдельном атоме во второе слагаемое (8) приводит к следующему выражению для некогерентной части:

$$|\mathbf{W}_{incoh}|^2 = \frac{4Z^2 e^4 c^2}{\varepsilon^2 R^2} \sum_n F(\rho_n), \quad (10)$$

где

$$F(\rho) = \left\langle \left( K_1 \left( \frac{|\rho + \mathbf{u}|}{R} \right) \right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{\rho + \mathbf{u}}{|\rho + \mathbf{u}|} K_1 \left( \frac{|\rho + \mathbf{u}|}{R} \right) \right\rangle^2.$$

Формула (2) описывает интенсивность излучения отдельного электрона, движущегося по заданной траектории. Излучение однородного пучка частиц единичной плотности характеризуется эффективностью излучения, равной интенсивности (2), проинтегрированной по прицельным параметрам падения частицы на мишень

$$\frac{dK}{d\omega} = \int \frac{dE}{d\omega} d^2 \rho_0. \quad (11)$$

В частности, для излучения в поле отдельного атома использование (7) приводит (с логарифмической точностью, обусловленной неприменимостью дипольного приближения на прицельных расстояниях, меньших  $\rho_{min} = \hbar / mc$ ) к формуле Бете-Гайтлера

$$\frac{dK}{d\omega} = \hbar \omega \frac{d\sigma_{BH}}{d\omega} = \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^2} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{(\hbar \omega)^2}{\varepsilon \varepsilon'} \right) \ln \left( \frac{mRc}{\hbar} \right). \quad (12)$$



Интересующую нас эффективность некогерентного излучения в кристалле удобно сравнивать с эффективностью излучения в аморфной среде (при равном числе  $N$  соударений с атомами). Легко видеть, что отношение этих двух величин будет равно

$$N_\gamma = \frac{\int d^2 \rho_0 \left( \frac{dE}{d\omega} \right)_{incoh}}{N \hbar \omega \frac{d\sigma_{BH}}{d\omega}} = \frac{\int d^2 \rho_0 \sum_n F(\rho_n)}{2\pi N R^2 \ln\left(\frac{mRc}{\hbar}\right)}, \quad (13)$$

где интегрирование по  $d^2 \rho_0$  означает интегрирование по всем возможным точкам влета электрона в кристалл в пределах одной элементарной ячейки.

Прицельные параметры столкновений с атомами  $\rho_n$  определяются по траектории электрона в кристалле, найденной путем численного моделирования, детали которого обсуждаются в [8, 9, 13]. Интегрирование по  $d^2 \rho_0$  может быть выполнено методом Монте-Карло.

Отметим, что среднее значение квадрата угла некогерентного рассеяния  $\langle \vartheta^2 \rangle_{incoh}$  описывается формулой, совпадающей с (10) с точностью до множителя  $c^2$ :

$$\langle \vartheta^2 \rangle_{incoh} = \frac{4Z^2 e^4}{\varepsilon^2 R^2} \sum_n F(\rho_n). \quad (14)$$

Таким образом, при моделировании траектории электрона в кристалле наличие некогерентного рассеяния на тепловых колебаниях атомов можно учесть прибавлением к каждой из компонент скорости электрона в плоскости  $(x, y)$  в момент столкновения с  $n$ -ым атомом случайной величины, подчиняющейся распределению Гаусса с дисперсией, равной  $(2Z^2 e^4 c^2 / \varepsilon^2 R^2) F(\rho_n)$ .

### Результаты и их обсуждение

Рассмотрим излучение, возникающее при падении электрона на кристалл под малым углом  $\psi$  к одной из плотно упакованных атомами кристаллографических осей. Формула (8) показывает, что не только излучение, но и само рассеяние можно рассматривать как суперпозицию когерентной и некогерентной частей. Наличие когерентного рассеяния на атомах, составляющих цепочку, приводит к возможности приближенно описывать движение частицы в поле цепочки как движение в непрерывном потенциале (то есть в потенциале совокупности атомов, усредненном вдоль оси цепочки). При этом компонента импульса частицы, параллельная оси цепочки, будет сохраняться, и задача о движении в непрерывном потенциале сводится к двумерной. Если энергия поперечного движения частицы  $\varepsilon_\perp = \varepsilon \psi^2 / 2$  не превышает высоты барьера, создаваемого непрерывным потенциалом цепочки, становится возможным явление каналирования. В режиме каналирования траектории электронов будут локализованы вблизи осей атомных цепочек, что приведет увеличению доли столкновений с атомами с малыми значениями прицельного параметра по сравнению с движением в аморфной среде. Канализованные позитроны, напротив, не смогут приблизиться к осям цепочек на достаточно малые расстояния, и доля близких столкновений с атомами будет меньше, чем в аморфной среде. Таким образом, при углах падения, много меньших критического угла аксиального каналирования [1-3]  $\psi_c = \sqrt{2U_R(0)/\varepsilon} \approx \sqrt{4Ze^2/\varepsilon a_z}$ , эффективность некогерентного излучения электронов в кристалле будет превышать



эффективность излучения в аморфной среде; для позитронов ситуация будет противоположной.

При углах падения, намного превышающих критический угол аксиального каналирования, все возможные значения прицельных параметров столкновений с атомами кристалла становятся равновероятными, как в аморфной среде, и эффективность некогерентного излучения становится (с точностью до фактора Дебая-Валлера) равной эффективности излучения в аморфной среде [9].

Возможность некогерентного рассеяния частиц на тепловых колебаниях атомов решетки приводит к ослаблению описанного выше эффекта, так как частица, столкнувшись с отдельным атомом, может рассеяться на большой угол и покинуть канал (так называемое деканалирование).

Конкретные параметры моделирования были выбраны в соответствии с условиями экспериментов, описанных в [6]. В одном из них регистрировалось излучение электронов с энергией  $\varepsilon = 800$  МэВ, падающих на кристалл кремния ( $Z = 14$ ,  $R = 0.194$  Å) под малым углом  $\psi$  к оси  $\langle 111 \rangle$  в жесткой области спектра ( $\hbar\omega = 700$  МэВ), где определяющий вклад вносит некогерентный механизм тормозного излучения. На рис. 1 приведены экспериментальные данные ([6], Fig. 1b) и результаты моделирования, проведенного с учетом как когерентного рассеяния электронов в непрерывных потенциалах атомных цепочек, так и некогерентного рассеяния на тепловых колебаниях атомов, а также расходимости пучка электронов, составляющего в обсуждаемом эксперименте порядка  $5 \cdot 10^{-4}$  рад. Отметим, что с ростом угла падения  $\psi$  начинает сказываться влияние атомных плоскостей кристалла, подробно описанное в [8, 9].

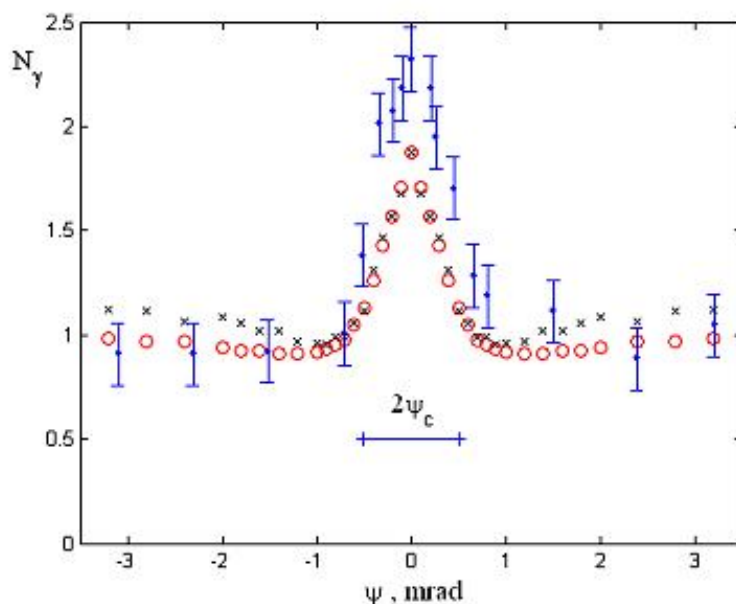


Рис. 1. Выход фотонов с энергией  $\hbar\omega = 700$  МэВ в зависимости от угла падения электронов с энергией  $\varepsilon = 800$  МэВ по отношению к оси  $\langle 111 \rangle$  монокристалла кремния толщиной 30 микрон [6] (экспериментальные точки) и относительная эффективность некогерентного излучения электронов по результатам моделирования на основе формулы (9) с учетом некогерентного рассеяния электронов на тепловых колебаниях атомов решетки и расходимости пучка, при условии, когда ось пучка электронов параллельна плоскости  $(2\bar{1}1)$  (кружки) и плоскости  $(\bar{1}10)$  (крестики). Критический угол аксиального каналирования составляет в данном случае  $5,1 \cdot 10^{-4}$  рад

В случае падения частиц на толстый кристалл становится существенным также учет коллимации излучения. Действительно, в эксперименте [6] пучок регистрируемых фотонов был ограничен коллиматором с углом раствора  $\theta_{coll} = 2mc^2 / \varepsilon$ . Поскольку характерные углы тормозного излучения релятивистских частиц составляют именно такую величину, использование формулы (2), описывающую интегральную по углам интенсивность тормозного излучения, является вполне оправданным. Однако, при прохождении через толстый кристалл частица может за счет некогерентного рассеяния на тепловых колебаниях атомов отклониться на значительный угол относительно своего первоначального направления движения. Излучение частицы, генерируемое на соответствующих участках траектории, не даст вклада в суммарный выход фотонов, регистрируемый в эксперименте с коллимацией излучения. Этот эффект учтен при моделировании некогерентного излучения электронов с энергией 800 МэВ, падающих под малым углом к оси  $\langle 110 \rangle$  кристалла алмаза толщиной 300 микрон (рис. 2).

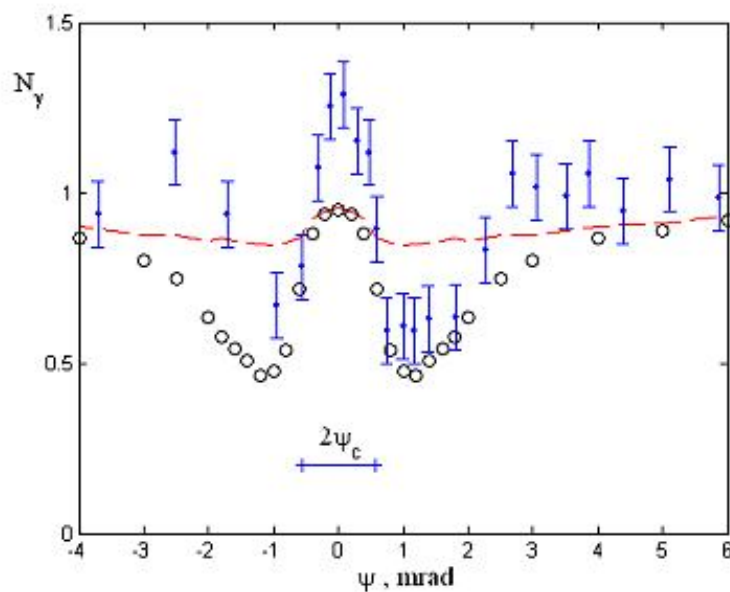


Рис. 2. Выход фотонов с энергией  $\hbar\omega = 700$  МэВ в зависимости от угла падения электронов с энергией  $\varepsilon = 800$  МэВ по отношению к оси  $\langle 110 \rangle$  монокристалла алмаза толщиной 300 микрон [6] (экспериментальные точки) и относительная эффективность некогерентного излучения электронов по результатам моделирования на основе формулы (9) с учетом некогерентного рассеяния электронов на тепловых колебаниях атомов решетки и расходимости пучка электронов (штриховая линия), а также коллимации излучения (кружки). Критический угол аксиального каналирования составляет в данном случае  $5,6 \cdot 10^{-4}$  рад, угол коллимации  $\theta_{coll} = 1,25 \cdot 10^{-3}$  рад

Таким образом, многократное рассеяние электронов на атомах кристалла при учете коллимации излучения приводит с ростом толщины кристалла к двоякому эффекту. С одной стороны, в результате деканализирования высота пика вблизи  $\psi = 0$  уменьшается с ростом толщины кристалла. С другой стороны, рассеяние на большие углы в области  $\psi \sim \psi_c$  выбрасывает многие электроны из области коллимации, что приводит к углублению провала вблизи  $\psi \sim \psi_c$ . Результат совместного действия этих двух процессов можно проследить на рис. 3, где представлены результаты моделиро-



вания жесткого некогерентного излучения на кристаллах разной толщины при прочих равных условиях.

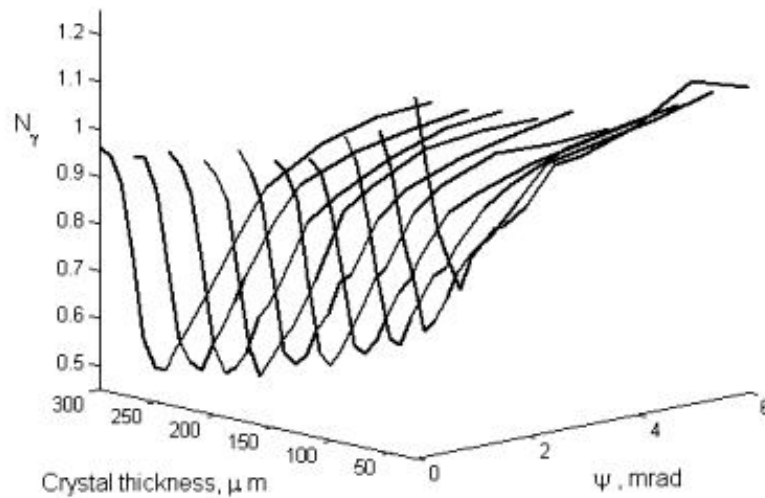


Рис. 3. Результаты моделирования при условиях рис. 2 для кристаллов различной толщины

#### Заключение

Результаты моделирования показывают существенную зависимость выхода некогерентного тормозного излучения от ориентации кристалла по отношению к пучку падающих частиц при углах падения, близких к критическому углу аксиального каналирования. Эта ориентационная зависимость обусловлена особенностями динамики заряженных частиц в кристалле и приводит к существенной зависимости от условий коллимации излучения. Результаты моделирования некогерентного излучения электронов находятся в хорошем согласии с результатами экспериментов [6], в которых измерялась ориентационная зависимость выхода фотонов с энергией, близкой к энергии излучающих электронов, когда вклад некогерентного механизма излучения является определяющим.

Работа выполнена при поддержке внутриуниверситетского гранта БелГУ.

#### Литература

1. Линдхард Й. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц // УФН. 1969. Т. 99, вып. 2. С. 249-296.
2. Gemmell D.S. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystal // Rev. of Mod. Phys. 1974. V. 46. P. 129-228.
3. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе. М.: Наука, 1993. 344 с.
4. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф., Трутень В.И., Гриненко А.А., Сыщенко В.В. Динамика заряженных частиц высоких энергий в прямых и изогнутых кристаллах // УФН. Т. 165, № 10. С. 1165.
5. Boldyshev V.F., Kasilov V.I., Kovalenko G.D. et al. // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. 1988. V. B 33. P. 30.
6. Sanin V.M., Khvastunov V.M., Boldyshev V.F. and Shul'ga N.F. Orientation effects in intensity and polarization of  $\gamma$ -radiation emitted by 1 GeV electrons in single crystals // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. 1992. V. B 67. P. 251-255.
7. Uggerhøj U.I. The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields // Rev. Mod. Phys. 2005. V. 77. P. 1131.
8. Shul'ga N.F., Syshchenko V.V. Simulation of incoherent bremsstrahlung of high energy electrons and positrons in a crystal // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B. 2005. V. 227. P. 125-131.
9. Сыщенко В.В., Тарновский А.И., Шульга Н.Ф. Моделирование некогерентного излучения быстрых частиц в ориентированном кристалле // Поверхность. 2008. № 4. С. 80-86.

10. Тер-Микаелян М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1969. 457 с.
11. Шульга Н.Ф., Сыщенко В.В. Метод классических траекторий в теории излучения электронов высоких энергий во внешнем поле // Изв. Академии Наук, Серия Физическая. 2000. Т. 64, № 11. С. 2168-2173.
12. Shul'ga N.F., Truten' V.I., Syshchenko V.V. Coherent radiation of electrons with ultrahigh energies in crystals // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B. 1996. V. 119. P. 55-58.
13. Сыщенко В.В., Тарновский А.А. Моделирование траектории релятивистского электрона в кристалле // Компьютерное моделирование 2008: Труды международной конференции. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008, с. 238-241.

## HARD INCOHERENT RADIATION FROM FAST PARTICLES IN CRYSTALS

V.V. Syshchenko, A.I. Tarnovsky

Belgorod State University, 308007, Belgorod, Studencheskaya St., 14,  
e-mail: syshch@bsu.edu.ru

Incoherent bremsstrahlung by high energy electrons in crystal is due to the thermal spread of atoms in relation to their equilibrium positions in the lattice. The simulation procedure for incoherent radiation based on semiclassical formulae of bremsstrahlung theory is developed in the present article. Substantial orientation dependence of hard incoherent radiation intensity is demonstrated under the angles of the electron's incidence onto crystallographic axis densely packed with atoms close to the critical channeling angle. New results concerning to radiation in thick crystals and taking the collimation of the radiation into account are presented in the paper. The results of simulation are in good agreement to the experimental data.

**Key words:** bremsstrahlung, hard photons, electron, positron, crystal, coherence length, coherent, incoherent, simulation.