УДК 532.511

АНАЛИЗ СТРУКТУРА ГАМИЛЬТОНИАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЕТРОВЫХ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ

А.Н. Сердюченко

Национальный университет кораблестроения им. адм. С. О. Макарова, 54025, г. Николаев, просп. Героев Сталинграда, 9, Украина, e-mail: san@cte.nk.ukrtel.net

Рассмотрено применение механики Гамильтона к исследованию гидродинамики нелинейных ветровых волн в открытом и глубоком океане. Внимание сосредоточено на исключении неканонической переменной – вертикальной проекции скорости на волновой поверхности из гамильтоновской формулировки волновой задачи. Выделено три основных группы методов в решении данной проблемы, это 1)проекционные или, другими словами, спектральные методы, 2) дифференциальные и 3) интегральные методы. Показано, что во всех случаях техника исключения не является тривиальной, она существенно связана со степенью нелинейности волн и порождает достаточно громоздкие алгоритмы. Приведены также результаты расчетов канонических и неканонических переменных для периодических волн Стокса и укрученных ветровых волн, близких к предельным волнам. Показано формирование особенностей в окрестности гребней волн.

Ключевые слова: гамильтонова механика сплошных сред, гамильтониан, канонические переменные, ветровые волны на воде, нелинейность.

Введение

Начиная с первых работ В.Е.Захарова, Дж. Майлза [1, 2], в 60-70-е годы прошлого столетия внимание исследователей привлекла возможность применения хорошо отработанного формализма классической нелинейной гамильтоновой механики [3 – 5] к исследования волновых движений на воде. Затем техника гамильтоновского формализма нашла свое применение в нелинейных задачах для других сплошных сред – волоконной оптике, плазме, электродинамике и др. [6 – 9]. Основательный обзор возможностей гамильтоновой механики для различных сплошных сред можно найти в работах [6, 7].

Применительно к волнам на воде перспективность применения гамильтоновой механики была связана в первую очередь с возможностью преодоления одной из ключевых трудностей соответствующей краевой задачи – формулировки нелинейных граничных условий на неизвестной волновой границе области жидкости [2, 10]. Кроме того привлекательной выглядела и хорошо отработанная в классической механике техника канонических преобразований гамильтоновского формализма [4, 5]. Однако для поверхностных волн формулировка уравнений движения в терминах механики Гамильтона оказалась не замкнутой относительно канонических переменных – ординат волновой поверхности и поверхностных значений потенциала скоростей частиц жидкости. В уравнения входила также вертикальная проекция скоростей на волновой поверхности и поэтому возникла проблема исключения этой неканонической переменной из уравнений Гамильтона для волн на воде.

Естественно, что этой в общем технической проблеме удалялось внимание исследователями, было разработано ряд методов замыкания уравнений Гамильтона для волн на глубокой воде [10 – 12], в жидкости ограниченной глубины [9, 13, 14]. Результаты показали, что имеет место нетривиальная ситуация: алгоритмы замыкания оказались громоздкими, а при их разработке существенным являлось допущение о слабой нелинейности волн. В то же время в достаточно сильных штормах в океане ветровые волны достигают и сильной степени нелинейности: гребни особо крутых волн укручиваются, опрокидываются и частично разрушаются [15]. Поэтому целью данной статьи является, во-первых, анализ существующих методов исключения неканонических переменных в гамильтоновском формализме для волн на воде и, во-вторых, их обобщение на сильно нелинейные волны с большими градиентами волновой поверхности.

Базовые соотношения и уравнения

Будем рассматривать поверхностные ветровые волны в глубоком и безграничном океане, жидкость считать идеальной, однородной и баротропной, а ее движение – безвихревым с потенциалом скоростей $\varphi(\bar{x}, z, t)$, где $\bar{x} = (x, y)$ – декартовы координаты в плоскости тихой воды и вертикальная координата z направлена вверх. В данной работе внимание будет сосредоточено на описании движения ветровых волн в достаточно развитом и интенсивном шторме на интервалах квазистационарности (порядка 30–40 мин по времени) [16], что дает право пренебречь эффектами давления ветрового потока на волновой поверхности, поскольку это давление по крайней мере на три порядка меньше волновых давлений в жидкости [17]. Естественно, ветровое давление влияет на волновые движения, но это влияние проявляется на временных интервалах протяженностью, по крайней мере, в несколько часов (синоптических интервалах) [16]. Кроме того, основное внимание будет уделено крупномасштабной энергонесущей компоненте в спектре нерегулярного волнового поля с длинами волн порядка 100–200 м, высотами до 15–25 м., слабо выраженной трехмерностью и умеренной нерегулярностью волновой поверхности.

При указанных соотношениях высот и длин волн их следует считать нелинейными и использовать общие уравнения гидродинамики потенциальных волновых движений [18]. На языке гамильтоновой механики сплошных сред [6 – 8] эти уравнения записываются следующим образом. Функция Гамильтона (далее гамильтониан), определенная как сумма кинетической и потенциальной энергий волнового движения, имеет вид

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\rho \iint_{(\bar{S}_o)} \left(\int_{-\infty}^{\zeta_w} \bar{v}_w^{\,2} dz + g\zeta_w^2 \right) d\bar{x}\,, \tag{1}$$

где ρ – плотность жидкости; $\bar{v}_w = (v_x, v_y, v_z) = \nabla\varphi$ – поле скоростей частиц жидкости в волнах ($\nabla = (\tilde{\nabla}, \partial/\partial z) = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ – оператор Гамильтона); $z = \zeta_w(x, y, t)$ – уравнение волновой поверхности; g – ускорение свободного падения и S_o – область, покрытая волнами в плоскости тихой воды и также для краткости обозначено $d\bar{x} \equiv dxdy$.

Парой канонических переменных в гамильтоновой формулировке являются ординаты волновой поверхности $\zeta_w(\bar{x}, t)$ и поверхностное значение потенциала скоростей на волновой поверхности $\psi^s(\bar{x}, t) = \varphi[\bar{x}, t, \zeta_w(\bar{x}, t)] \equiv (\varphi)^s$ (верхний индекс s далее будет указывать на принадлежность величины к свободной волновой поверхности) [2, 10]. Определение вариационных производных от гамильтониана (1) по каноническим переменным ζ_w, ψ^s порождает пару уравнений Гамильтона следующего вида [6, 10, 12]

$$\frac{\partial \zeta_w}{\partial t} = \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \psi^s} = -\left(\tilde{\nabla}\zeta_w \cdot \tilde{\nabla}\psi^s\right) + w^s\left[1 + \left(\tilde{\nabla}\zeta_w\right)^2\right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial \psi^s}{\partial t} = -\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \zeta_w} = -g\zeta_w - \frac{1}{2}\left(\tilde{\nabla}\psi^s\right)^2 + \frac{1}{2}\left(w^s\right)^2\left[1 + \left(\tilde{\nabla}\zeta_w\right)^2\right], \tag{3}$$

где $w^s(\bar{x}, t) \equiv (v_z)^s$ – вертикальная проекция скорости $\bar{v}$ на волновой поверхности.

Укажем на некоторые особенности уравнений (2), (3). Во-первых, отметим, что при получении вариационных производных по каноническим переменным необходимо обращаться к специальным предельным переходам в окрестности волновой поверхности, поскольку переменная ζ_w входит в Гамильтониан в том числе и как граница, а переменная ψ^s вообще входит неявно [6, 7, 9]. Во-вторых, эти уравнения физически являются кинематическим и динамическим граничными условиями на волновой поверхности и они соответствуют эйлеровому описанию волновых движений [18, 19]. Поэтому данная формулировка не может описывать эффекты опрокидывания гребней особо крутых (нелинейных) ветровых волн, когда возникает многозначность в функции $\zeta_w(\bar{x},t)$ (рис. 1). Это, в частности, ограничивает область применимости гамильтоновского формализма в данном виде для изучения сильно нелинейных ветровых волн на воде. И, в-третьих, в уравнения (2), (3) входит третья неканоническая переменная w^s – вертикальная проекция скорости на волновой поверхности, и это является вполне естественным, поскольку уравнение Лапласа для потенциала скоростей в жидкости $\nabla^2\varphi = 0$ имеет второй порядок по всем координатам. Появление в уравнениях Гамильтона неканонической переменной w^s требует либо дополнения уравнений (2), (3) третьим уравнением, либо определения переменной w^s через канонические переменные ζ_w, ψ^s. Этому вопросу и будет уделено основное внимание в данном изложении.

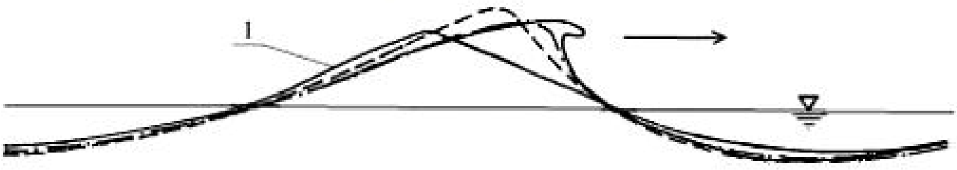

Рис. 1. Профили ветровых волн с различной степенью укрученности гребней;
1 – симметричная волна Стокса

Гамильтониан (1) можно далее несколько модифицировать, если вычислить интеграл по вертикальной координате и использовать дифференциальное соотношение $\tilde{\nabla}\psi^s = (\tilde{\nabla}\varphi)^s + w^s\tilde{\nabla}\zeta_w$. Это приводит последовательно к выражениям

$$\begin{aligned} \mathrm{H} &= \frac{1}{2}\rho\iint\limits_{(S_o)}\left\{\psi^s\left[w^s - \left(\tilde{\nabla}\zeta_w\cdot(\tilde{\nabla}\varphi)^s\right)\right] + g\zeta_w^2\right\}d\bar{x} = \\ &= \frac{1}{2}\rho\iint\limits_{(S_o)}\left\{\psi^s\left[w^s\left[1+\left(\tilde{\nabla}\zeta_w\right)^2\right] - \left(\tilde{\nabla}\zeta_w\cdot\tilde{\nabla}\psi^s\right)+\right] + g\zeta_w^2\right\}d\bar{x}. \end{aligned} \tag{4}$$

К сожалению, наличие функциональной связи $w^s(\zeta_w, \psi^s)$ не позволяет использовать для вариационных производных от гамильтониана выражение (4) и вынуждает исходить из базового соотношения (1).

По определению «лишняя» переменная w^s и канонические переменные (ζ_w, ψ^s) связаны совершенно очевидными соотношениями

$$w^s = \varphi_z(\bar{x},t;\zeta_w),\ \psi^s = \varphi(\bar{x},t;\zeta_w), \tag{5}$$

где использовано индексное обозначение для производной по координате z.

Однако поиск оператора явной зависимости $w^s(\zeta_w, \psi^s)$ уже встречает довольно существенные трудности. В периодической литературе разработано ряд методов определения этой зависимости, однако все они основаны на допущении о слабой нелинейности волновых движений (малости крутизны волн и углов волнового склона). Поэтому обратимся сначала к слабо нелинейным волнам на поверхности воды.

Слабо нелинейные волны

Приближение слабой нелинейности позволяет использовать спектральные представления волнового поля и асимптотические ряды в предположении малых нелинейных взаимодействий между спектральными компонентами [1, 7, 11, 12]. Вообще спектральные разложения играют очень важную роль в гамильтоновском формализме для сплошной среды, поскольку они, с одной стороны, относятся к классу канонических преобразований а, с другой стороны, являются инструментом для дискретизации канонических переменных путем перехода к дискретному множеству Фурье-трансформант. Только после этого можно ставить вопрос о применении арсенала канонических преобразований, накопленного в классической механике Гамильтона [5], с целью дальнейшей редукции Гамильтониана системы. В нашей задаче для начального волнового поля преобразование Фурье по пространственным координатам для всех основных переменных имеет вид

$$\varphi(\bar{x}, z, t) = \sum_{(\bar{k})} \tilde{\varphi}_{\bar{k}}(t) \exp\left(\left|\bar{k}\right| z + i(\bar{k} \cdot \bar{x})\right), \quad \left|\bar{k}\right| = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}\,; \tag{6}$$

$$(\zeta_w, \psi^s, w^s)(\bar{x}, t) = \sum_{(\bar{k})} (\tilde{\zeta}_{\bar{k}}, \tilde{\psi}_{\bar{k}}, \tilde{w}_{\bar{k}})(t) \exp i(\bar{k} \cdot \bar{x}), \tag{7}$$

где $\tilde{\varphi}_{\bar{k}} \equiv \tilde{\varphi}(\bar{k})$ и аналогичные величины под знаками сумм являются Фурье-трансформантами; $\bar{k} = (k_x, k_y)$ – вектор волнового числа элементарной гармоники в спектральном разложении начального волнового поля; $\sum_{(\bar{k})}$ определяет двойную сумму по точечному множеству всех значений волновых чисел в декартовом прямоугольнике $[-k_x^{\max}; k_x^{\max}] \times [-k_y^{\max}; k_y^{\max}]$, $k_{x,y}^{\max}$ – максимальные значения проекций волнового числа.

Отметим, что для слабо нерегулярной компоненты волнового поля со слабой трехмерностью $k_y^{\max} << k_x^{\max}$, а продольные волновые числа k_x в основном концентрируются в окрестности некоторого характерного значения k_0. При равномерной дискретизации для адекватного описания движения волнового поля на интервалах квазистационарности ветрового волнения (порядка 35–40 мин.) необходимо не менее 10^3 базовых гармоник основного порядка (т.е. без учета кратных гармоник, порождаемых нелинейными взаимодействиями третьего, четвертого и более высоких порядков). Однако использование специальных технологий дискретизации [20], основанных на рандомизации дискретных значений и более плотной их концентрации в окрестности максимума спектра волнового поля, позволяет примерно на порядок снизить число базовых гармоник, что существенно снижает объемы вычислений. Кроме того, все Фурье-трансформанты $(\tilde{\varphi}_{\bar{k}}, \tilde{\zeta}_{\bar{k}}, \tilde{\psi}_{\bar{k}}, \tilde{w}_{\bar{k}})$ будут являться также функциями времени через нелинейные взаимодействия между отдельными гармониками в спектральных разложениях (6), (7).

Таким образом, в формулировке (6), (7) исключение неканонической переменной w^s из уравнений Гамильтона сводится к отысканию зависимости для Фурье-трансформант $\tilde{w}_{\bar{k}}(\tilde{\zeta}_{\bar{k}}, \tilde{\psi}_{\bar{k}})$. Для этого необходимо подставить разложения (6), (7) в базовые определения (5), использовать для экспонент $\exp[|\bar{k}|\sum_{(\bar{k})}\tilde{\zeta}_{\bar{k}}\exp i(\bar{k}\cdot\bar{x})]$ разложение в ряд Тейлора, а окончательные результаты получить в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра, характеризующего степень нелинейности волн. Громоздкость соответствующих зависимостей очевидна и поэтому практически удается получить не более одного-трех приближений по малому параметру (показательным примером является работа [12]). В отдельных работах, например, [14] процедура исключения неканонических переменных $\tilde{w}_{\bar{k}}$ вообще не выделяется как отдельный этап решения, а «погружена» в общую цепочку канонических преобразований гамильтоновых переменных $(\tilde{\zeta}_{\bar{k}}, \tilde{\psi}_{\bar{k}})$ – переход к нормальным переменным, исключение нерезонансных взаимодействий и пр. Данный подход можно назвать проекционным или, другими словами, спектральным из-за ключевой роли спектрального представления переменных задачи.

Более общим представляется следующий метод, разработанный в [13] для поверхностных волн в жидкости конечной глубины. Согласно этому методу, выражение $[w^s - (\tilde{\nabla}\zeta_w \cdot (\tilde{\nabla}\varphi)^s)]$, которое входит в гамильтониан (5) и является линейным по неканоническим переменным w^s, $(\tilde{\nabla}\varphi)^s$, представляется некоторым оператором $G(\zeta_w)\psi^s$, который определяется только каноническими переменными (ζ_w, ψ^s). При этом полагается, что для слабо нелинейных волн оператор $G(\zeta_w)$ можно записать в виде асимптотического ряда $G(\zeta_w) = \sum_j \varepsilon^j G_j(\zeta_w)$ по степеням положительного малого параметра $\varepsilon << 1$.

Для волн на глубокой воде алгоритм реализуется следующим образом. Использовав для величин w^s и φ ряды (6), (7), а также снова разложив экспоненты в объемном потенциале в ряды Тейлора, получим для операторов $G_j(\zeta_w)$ следующие рекуррентные соотношения (в плоскости волновых чисел элементарных гармоник $\bar{k}$)

$$G_j(\zeta_w) = \frac{\zeta_w^j}{j!}\left(\left|\bar{k}\right|^{j+1} - i\left(\tilde{\nabla}\zeta_w \cdot \bar{k}\right)\left|\bar{k}\right|^j\right) - \sum_{l<j}\frac{1}{(j-l)!}G_l(\zeta_w)\zeta_w^{j-l}\left|\bar{k}\right|^{j-l}, \qquad (8)$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Далее необходимо вернуться из плоскости волновых чисел в физическую плоскость координат $\bar{x}$. С этой целью напомним, что множитель $\bar{k} = (k_x, k_y)$ в (8) связан с действием оператора $D = -i\tilde{\nabla}$ на потенциал φ, а множитель $|\bar{k}| = (\bar{k}\cdot\bar{k})^{1/2} = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ в (8) может быть определен как результат действия дифференциального оператора в виде $|D| = [-\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\nabla}]^{1/2}$. Тогда окончательно получим для членов ряда $G_j(\zeta_w)$ следующую рекуррентную зависимость

$$G_j(\zeta_w) = \frac{1}{j!}\left(\zeta_w^j\left|D\right|^{j+1} + \left(D\zeta_w^j \cdot D\right)\left|D\right|^{j-1}\right) - \sum_{l=0}^{j-1}\frac{1}{(j-l)!}G_l(\zeta_w)\zeta_w^{j-l}\left|D\right|^{j-l}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (9)$$

Несколько первых членов ряда $G_j(\zeta_w)$, $j = 0\ldots 4$ были получены в явном виде и приведены к самосопряженной форме

$$
\begin{aligned}
&G_0 = |D|, \qquad G_1 = D\cdot\zeta_w D - |D|\cdot\zeta_w |D|,\\
&G_2 = -\frac{1}{2!}\Big[|D|^2\cdot\zeta_w^2|D| + |D|\cdot\zeta_w^2|D|^2 - 2|D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w|D|\Big],\\
&G_3 = \frac{1}{3!}\Big[\big(|D|^3\cdot\zeta_w^3|D| + |D|\cdot\zeta_w^3|D|^3\big) - 2|D|^2\cdot\zeta_w^3|D|^2 + 3\big(|D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w^2|D|^2 +\\
&\quad + |D|^2\cdot\zeta_w^2|D|\cdot\zeta_w|D|\big) - 3\big(|D|\cdot\zeta_w(D\zeta_w)^2|D| + |D|\cdot(D\zeta_w)^2\zeta_w|D|\big) -\\
&\quad - 6|D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w|D|\Big],\\
&G_4 = \frac{1}{4!}\Big[2(|D|\cdot\zeta_w^4|D|^4 + |D|^4\cdot\zeta_w^4|D|) + 3(|D|^2\cdot\zeta_w^4|D|^3 + |D|^3\cdot\zeta_w^4|D|^2) +\\
&\quad + 4(|D|^3\cdot\zeta_w^3|D|\cdot\zeta_w|D| + |D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w^3|D|^3) + 6|D|^2\cdot\zeta_w^2|D|\cdot\zeta_w{}^2|D|^2 -\\
&\quad - 12(|D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w^2|D|^2\cdot\zeta_w|D| + |D|\cdot\zeta_w|D|^2\cdot\zeta_w^2|D|\cdot\zeta_w|D|) -\\
&\quad - 12(|D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w^2|D|^2 + |D|^2\cdot\zeta_w^2|D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w|D|) -\\
&\quad - 24(|D|\cdot(D\zeta_w)^2\zeta_w^2|D|^2 + |D|^2\cdot\zeta_w^2(D\zeta_w)^2|D|) -\\
&\quad - 24|D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w|D|\cdot\zeta_w|D|\Big],
\end{aligned} \tag{10}
$$

где операторы D и $|D|$ действуют на все выражение, стоящее справа от них. Формально с помощью рекуррентной формулы (9) можно получить и следующие члены операторного ряда, однако приведение их к каноническому виду с симметричной самосопряженной структурой требует чрезвычайно громоздких преобразований.

Таким образом, использование асимптотического ряда $\sum_j \varepsilon^j G_j(\zeta_w)\psi^s$ для неканонических переменных трансформирует гамильтониан (4) и уравнения Гамильтона (2), (3) к виду

$$
\mathrm{H} = \frac{1}{2}\rho\iint\limits_{(S_c)}\Big[\psi^s\sum_j \varepsilon^j G_j(\zeta_w)\psi^s + g\zeta_w^2\Big]d\bar{x}, \tag{11}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial\zeta_w}{\partial t} = \sum_j \varepsilon^j G_j(\zeta_w)\psi^s,\\
&\frac{\partial\psi^s}{\partial t} = -g\zeta_w - \frac{1}{2}\big(\tilde{\nabla}\psi^s\big)^2 + \frac{1}{2}\Big[\big(\tilde{\nabla}\zeta_w\cdot\tilde{\nabla}\psi^s\big) + \sum_j \varepsilon^j G_j(\zeta_w)\psi^s\Big]^2\Big[1+\big(\tilde{\nabla}\zeta_w\big)^2\Big]^{-1}.
\end{aligned}
\right\} \tag{12}
$$

Подчеркнем, что получить уравнения (12) прямыми вариациями гамильтониана (11), к сожалению, практически невозможно из-за довольно сложной дифференциальной структуры операторов $G_j(\zeta_w)$ согласно (10).

Приведенные зависимости являются более общими, чем при использовании Фурье-трансформант в явном виде, однако и они не применимы для сильно нелинейных волн, поскольку операторы $G_j(\zeta_w)$ содержат степени волновых ординат $\zeta_w{}^m$ и особенно степени градиентов $(\tilde{\nabla}\zeta_w)^m$, которые с увеличением порядка нелинейности волн начинают резко возрастать, что нарушает сходимость ряда для оператора $G(\zeta_w)$. При опрокидывании гребня сильно нелинейной волны вообще $|\tilde{\nabla}\zeta_w| \to \infty$ и в окрестности гребня фактически формируется особенность.

Данный подход можно назвать дифференциальным из-за формы представления результирующих зависимостей (10), которые включают градиенты волновой поверхности $\tilde{\nabla}\zeta_w$. Отметим ещё, что элементы дифференциального подхода рассматривались также в работах [2, 9].

Таким образом, проблема исключения неканонической переменной w^s из гамильтониана и уравнений Гамильтона в принципе решена для слабо нелинейных волн, хотя и связана с довольно громоздкими формулами для соответствующих зависимостей в приближениях по нелинейности. Однако эта проблема остается актуальной для сильно нелинейных волн, для которых при укручивании гребней волн градиенты волнового склона резко возрастают, а насыщенность волнового профиля кратными связанными гармониками оказывается достаточно сильной. Из-за этого спектральные разложения и асимптотические ряды описанного выше типа являются мало эффективными и нужны другие подходы и методы, один из которых и рассмотрен ниже.

Сильно нелинейные волны

Как было сказано выше, сильно нелинейные волны характеризуются большими градиентами волновой поверхности, для них не применим метод суперпозиции, и поэтому попытаемся получить другие выражения для вертикальной проекции скорости $w^s = (\varphi_z)^s$. С этой целью проинтегрируем уравнение неразрывности поля скоростей $\varphi_{zz} + \tilde{\nabla}^2\varphi = 0$ по вертикальной координате z в пределах $(-\infty;\ \zeta_w]$, что приводит к зависимостям

$$w^s = \left(\varphi_z\right)^s = -\int_{-\infty}^{\zeta_w} \tilde{\nabla}^2\varphi\, dz = \left((\tilde{\nabla}\varphi)^s \cdot \tilde{\nabla}\zeta_w\right) - \tilde{\nabla}\cdot \int_{-\infty}^{\zeta_w} \tilde{\nabla}\varphi\, dz, \qquad (13)$$

где, напомним, $\tilde{\nabla}\varphi = (v_x, v_z)$ и имеет место соотношение $(\tilde{\nabla}\varphi)^s = \tilde{\nabla}\psi^s - w^s\tilde{\nabla}\zeta_w$.

Зависимости в (13) содержат объемный потенциал φ (или его градиенты по координатам в плоскости тихой воды) под знаком интегралов и для его определения используем классическую интегральную формулу Грина, которую запишем в виде [21]

$$\varphi(p,t) = \frac{1}{4\pi}\iint_{(Z_w)} \left\{\varphi_n(p^s,t)G(p,p^s) - \varphi(p^s,t)G_n(p,p^s)\right\} dZ_w(p^s), \qquad (14)$$

где $p(\bar{x}, z)$ – заданная точка в области жидкости; $p^s(\bar{\xi}, \zeta = \zeta_w)$, $\bar{\xi} = (\xi, \eta)$ – текущая точка на волновой поверхности $Z_w(p^s) = \zeta_w(\xi, \eta, t) - \zeta = 0$; $G(p, p^s) = R^{-1}(p, p^s)$ – простейшая функция Грина краевой задачи для потенциала волновых движений [18,21] – величина, обратная расстоянию между точками в области и на волновой поверхности, и индекс n указывает на производную по внешней нормали $\bar{n}$ к поверхности Z_w.

Если выразить все величины в правой части уравнения (14) через поверхностные величины w^s и ψ^s, а затем подставить выражение для потенциала в соотношение (13), то окончательно получим следующее линейное интегральное уравнение относительно «лишней» переменной w^s

$$w^s(\bar{x}) - \frac{1}{4\pi}\iint_{(S_0)} w^s(\bar{\xi})\Gamma_w(\bar{x}, \bar{\xi})d\bar{\xi} = \frac{1}{4\pi}\iint_{(S_0)} \Gamma_\psi(\bar{x}, \bar{\xi})\psi^s(\bar{\xi})d\bar{\xi}, \qquad (15)$$

где ядра Γ_w, Γ_ψ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_w(\bar{x}, \bar{\xi}) = [1 + (\tilde{\nabla}_\xi\zeta_w)^2](G_z)^s, \\ &\Gamma_\psi(\bar{x}, \bar{\xi}) = [(\tilde{\nabla}_\xi\zeta_w \cdot \tilde{\nabla}_\xi(G_z)^s) - \partial(G_z)^s/\partial\zeta_w(\bar{\xi})] - \\ &\qquad -(G_z)^s(\tilde{\nabla}_\xi\zeta_w \cdot \tilde{\nabla}_\xi), \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

и $(G_z)^s = [\zeta_w(\bar{\bar{\xi}}) - \zeta_w(\bar{x})] \Big/ \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + [\zeta_w(\bar{\bar{\xi}}) - \zeta_w(\bar{x})]^2 \right]^{3/2}$, оператор Гамильтона $\tilde{\nabla}_{\xi}$ действует по переменным $\bar{\bar{\xi}}$ и для краткости записи зависимость гидродинамических характеристик волн от времени не указана.

Крупномасштабная компонента ветрового волнения является слабо трехмерной, так что зависимость гидродинамических характеристик волн вдоль гребней (т.е. по поперечной координате y) примерно на порядок медленнее, чем по продольной координате x в направлении бега волн, и поэтому уравнение (15) допускает существенные упрощения. В предельном приближении плоских волн можно ввести комплексные переменные $\tilde{z} = x + iz$, $\tilde{v} = v_x - iv_z$ и использовать для поля скоростей интегральную формулу Коши [18]

$$\tilde{v}(\tilde{z}) = -\frac{i}{2\pi} V.P.\int_{Z_w} \frac{\tilde{v}(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta} - \tilde{z}} d\tilde{\zeta}, \tag{17}$$

где теперь Z_w – уравнение волнового профиля в области определения волновых движений $\tilde{\zeta} = \zeta + i\zeta_w$, $z < \zeta_w$ и также берется главное значение интеграла (17).

Тогда, если разделить в (17) действительную и мнимую части, подставить полученные выражения для проекций волновых скоростей в первую форму зависимости (13) и проинтегрировать по вертикальной координате, то снова получим интегральное уравнение относительно неканонической переменной w_s, которое приводится к виду

$$w^s(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{(L)} w^s(\xi) \Gamma_w(\xi, x) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{(L)} \psi^s(\xi) \Gamma_\psi(\xi, x) d\xi, \tag{18}$$

где теперь ядра Γ_w, Γ_ψ имеют вид

$$\Gamma_w(\xi, x) = \frac{\Delta\zeta_w (1 + {\zeta_{wx}}^2)}{({\Delta\zeta_w}^2 + \Delta x^2)^2}, \quad \Gamma_\psi(\xi, x) = \frac{\Delta x - \Delta\zeta_w \zeta_{wx}}{({\Delta\zeta_w}^2 + \Delta x^2)^2}, \tag{19}$$

и также $\Delta x = x - \xi$, $\Delta\zeta_w = \zeta_w(x) - \zeta_w(\xi)$, а L – длина интервала интегрирования.

При $\xi \to x$ ядра интегралов (19) определяются следующими асимптотиками $\Gamma_w(\xi, x) \to \zeta_{wx} / |\Delta x|$, $\Gamma_\psi(\xi, x) \to (1 - {\zeta_{wx}}^2) \big/ [(1 + {\zeta_{wx}}^2) |\Delta x|]$. Поскольку при $|\zeta_{wx}| \to \infty$ также и $w^s \to 0$, то укручивание переднего фронта ветровой волны не порождает особенности в уравнении (18.) Решение (18) можно искать, например, методом резольвентных ядер [22].

Таким образом, в рамках соотношения (13) для получения явной зависимости $w^s(\psi^s, \zeta_w)$ необходимо решать интегральные уравнения (15) для трехмерных волн или (18) для плоских волн. Следовательно, в общем случае связь между переменной w^s и каноническими переменными (ψ^s, ζ_w) является нелокальной и ее присоединение к дифференциальным уравнениям Гамильтона (12) трансформирует задачу в интегро-дифференциальную. Полученные выше дифференциальные соотношения для зависимости $w^s(\psi^s, \zeta_w)$ в виде асимптотических рядов являются по сути аппроксимацией интегральных зависимостей, поскольку с возрастанием порядка возмущения возрастают и порядки старших производных от канонических переменных, расчет которых при конечно-разностной их интерпретации требует привлечения все большего семейства точек в окрестности расчетной точки.

Отметим еще, что в работе [11] также был разработан интегральный метод, основанный на рекуррентном решении линейных краевых задач для потенциалов в возмущениях в процессе исключения неканонической переменной. Однако и этот метод также требовал использования рядов Фурье, асимптотических разложений и рядов Тейлора, что возможно только для слабо нелинейных волн на воде.

Периодические стационарные модели нелинейных волн на воде

Наиболее простыми являются периодические стационарные модели нелинейных волн на воде. Это в первую очереди классическая модель свободных волн Стокса [18], а также периодическая модель ветровых волн, полученная недавно автором [23]. В таких моделях пренебрегается обменом энергией между кратными равновесными гармониками, а также появляется возможность связать независимые переменные в фазовую координату $\theta(x,t)$

$$\theta(x,t) = k(x+ct), \quad c = c_0\left(1+\frac{1}{2}\delta_w^2+\frac{1}{8}\delta_w^4+0\left(\delta_w^6\right)\right),$$

где обозначено $c_0 = \sqrt{g/k} = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ – фазовая скорость линейного приближения, $\delta_w = \pi h_w/\lambda$ – крутизна волнового склона, h_w, λ – высота и длина волн.

Для волн Стокса крутизна волны $h_w/\lambda \le 1/7$, а для ветровых волн примерно $h_w/\lambda \le 1/9$ из-за эффекта укручивания и опрокидывания гребней волн.

Полезно рассмотреть канонические и неканонические переменные для этого класса моделей волн на воде. Асимптотические разложения в ряды по степеням малого параметра – крутизны волн, а также численные расчеты показали следующее. На рис. 2 приведен профиль и продольный градиент волны Стокса с крутизной 1/8, т.е. близкой к предельной (на оси абсцисс указаны номера точек дискретизации). Для предельной крутизны 1/7 на гребне сформируется угловая точка, а в градиенте возникнет разрыв первого рода. Таким образом, в уравнениях Гамильтона в этой точке будет иметь место особенность. На рис. 3, 4 показаны поверхностные значения потенциала и вертикальной скорости, рассчитанные асимптотическими и численными методами. Как видно, независимые методы дают близкие результаты и, кроме того, нет тенденции к формированию особенности для данных величин в окрестности гребня волны.

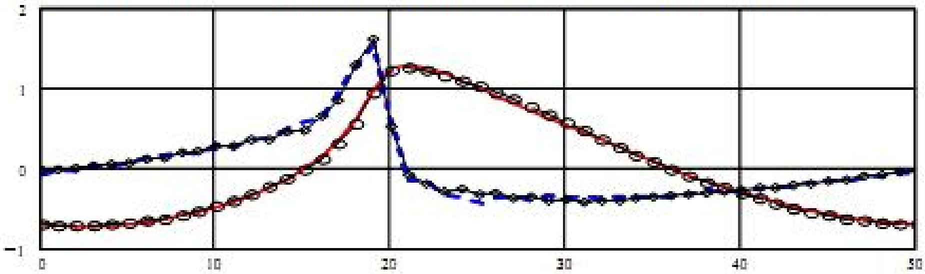

Рис. 2. Профиль периодической волны Стокса $2\zeta_w / h_w$ и ее продольный градиент ζ_{wx}/δ_w (◊◊◊◊◊)

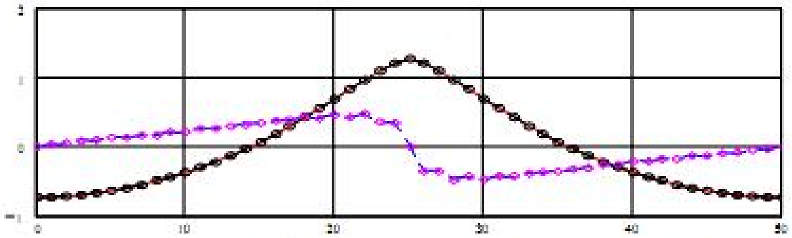

Рис. 3. Поверхностный потенциал $\psi^s/(c_0 h_w/2)$ на основе асимптотических оценок (------) и (××××), а также численных расчетов методом полуобратной задачи [23] (○○○○) для волны Стокса

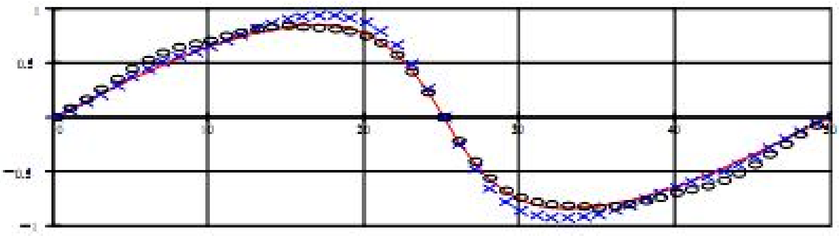

Рис. 4. Вертикальная скорость $w^s/(c_0\delta_w)$ на основе асимптотических оценок (------) и (+ + + +), а также численных расчетов методом полуобратной задачи [23] (○○○○) для волны Стокса

На рис. 5 показаны профиль и его продольный градиент для периодической ветровой волны также с крутизной 1/8. Как видно, с увеличением степени укрученности переднего фронта волны в градиенте возникнет разрыв второго рода и соответствующая особенность в уравнениях Гамильтона. Далее на рис. 6 приведены результаты численных расчетов поверхностных значений продольной и вертикальной проекций скоростей и продольного градиента потенциала. Мелкие осцилляции на графиках связаны с численными расчетами на основе дифференциальных соотношений [23] и при удержании в волновом профиле не более 25 кратных гармоник. Как видно, в вертикальной скорости и градиенте потенциала имеют место резкие изменения значений в окрестности переднего фронта волны и здесь также поэтому можно ожидать формирования особенности при полном опрокидывании гребня волны.

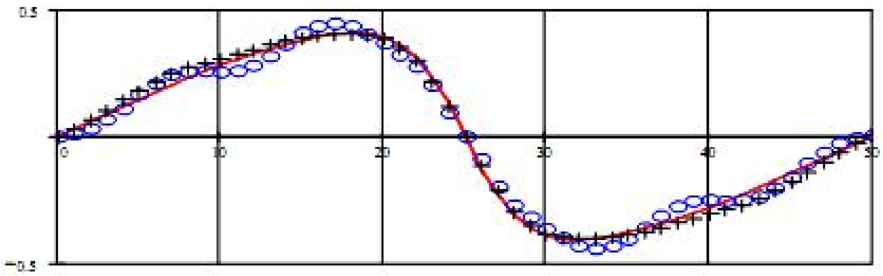

Рис. 5. Профиль периодической ветровой волны $2\zeta_w/h_w$ и ее продольный градиент ζ_{wx}/δ_w (◊ ◊ ◊ ◊ ◊)

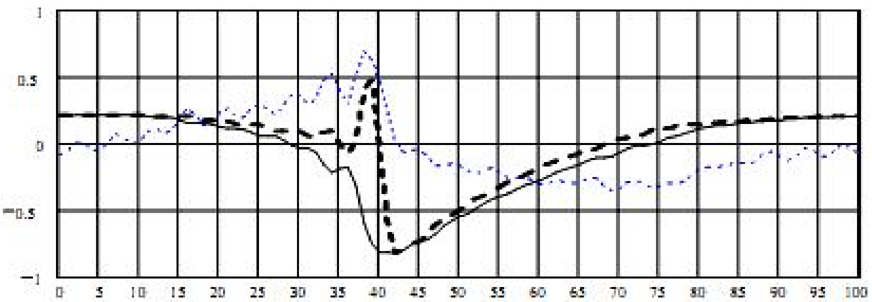

Рис. 6. Поверхностные значения продольной скорости $v_x^s/(c_0\delta_w)$ (——), вертикальной скорости $v_z^s/(c_0\delta_w)$ (· · · · ·) и градиента потенциалу $\psi_x^s/(c_0 h_w/2)$ (– – – –)– в периодической ветровой волне

Таким образом, для сильно нелинейных моделей волн, для которых на гребнях волн могут формироваться угловые точки (волны Стокса) или гребни могут опрокидываться (ветровые волны), в уравнениях Гамильтона следует ожидать появление особенностей в окрестности гребней волн. Эти особенности не только будут усложнять процедуры исключения неканонической переменной из уравнений Гамильтона, но и создавать дополнительные трудности при решении самих уравнений.

Заключение

В работе рассмотрен один из аспектов применения гамильтоновского формализма к исследованию гидродинамики нелинейных ветровых волн на воде – исключение неканонических переменных из гамильтониана и уравнений Гамильтона. Как оказалось, эта, вообще говоря, техническая процедура существенно связана со степенью нелинейности волн и порождает достаточно громоздкие алгоритмы. В основном разработанные методы применимы для слабо нелинейных волн, когда можно еще использовать спектральный анализ для нерегулярных волновых полей. При переходе к сильно нелинейным волнам определенные надежды можно возлагать на использование интегральных уравнений, определяющих нелокальную связь между каноническими и неканоническими переменными. Численные расчеты этих переменных даже для сравнительно простых периодических моделей волн (симметричных волн Стокса и укрученных ветровых волн) указывают на возможные дополнительные трудности, обусловленные формированием особенностей в окрестности гребней предельно крутых волн.

Литература

1. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // Прикл. матем. и техн. физика. – 1968. – № 2. – С. 86-91.
2. Miles J.W. On Hamilton's principle for surface waves // J. Fluid Mech. – 1977. – Vol. 83. – Part 1. – P. 153-158.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
5. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
6. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Гамильтоновской формализм для нелинейных волн // Успехи физ. наук. – 1997. – Т. 167, № 11. – С. 1137-1168.
7. Конторович В.М. Линейные и нелинейные волны (элементарное введение в теорию гамильтоновых переменных с приложениями к физике и астрофизике) // Радиофизика и радиоастрономия. – 2001. – Т. 19, № 3. – С. 165-211.
8. Гуленко В.В., Гущин В.В. Гамильтонова формулировка нелинейных динамических уравнений // Доклады АН Украины. – 1994. – № 3. – С. 73–77.
9. Alstrom P. Surface waves. Patterns, Instabilities and Turbulence. – Niels Bohr Institute Publ. – 1999. – 132 p.
10. Benjamin T.B., Olver P.J. Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves // J. Fluid Mech. – 1982. – Vol. 125. – P. 137-185.
11. Dommermuth D.J., Yue D.K.P. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves // J. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 184. – P. 267-288.
12. Krasitsky V.P. On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves // J. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 272. – P. 1-20.
13. Craig W., Groves M.D. Hamiltonian long-wave approximations to the water-wave problem // Wave Motion. – 1994. – Vol. 19, № 4. – P. 367-390.
14. Stiassnie M., Shemer L. On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves // J. Fluid Mech. – 1984. – Vol. 143. – P. 47-67.
15. Зейтунян Р.Х. Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны // Успехи физ. наук. – 1995. – Т. 165, № 12. – С. 1403-1456.
16. Монин А.С. О задачах исследования поверхности океана // Изв. АН СССР (Сер. ФАО). – 1985. – Т. 21, № 1. – с. 3-11.
17. Давидан И.Н., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс. – Л.: Гидрометеоиздат, 1978. – 286 с.
18. Buckles J., Hanratty T.J., Adrian R.J. Turbulent flow over large-amplitude wavy surface // J. Fluid Mech. – 1984. – Vol. 140. – P. 27-44.
19. Сердюченко А.Н. Обобщенная модель спектрального представления морского нерегулярного волнения // Вісник ОНМУ. – Одеса: ОНМУ, 2007. – Вип. 22. – С. 69-82.
20. Метод граничных интегральных уравнений / Под ред. Круз Т., Риццо Ф.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 210 с.

21. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М.: ИЛ, 1960. – 299 с.
22. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977. – 815 с.
23. Сердюченко А.М. Гідродинаміка гранично крутих вітрових хвиль // Доповіді НАН України. – 2001. – № 10. – С. 35-41.

ANALYSIS OF THE STRUCTURE OF HAMILTONIAN FOR NONLINEAR WIND WAVES ON DEEP WATER

A.N. Serdjuchenko

National Shipbuilding University, Gerojev Stalingrada Av., 9, Nikolayev, 54025, Ukraine,
e-mail: san@cte.nk.ukrtel.net

The application of Hamiltonian mechanics into the investigations of hydrodynamics of nonlinear wind waves in open and deep ocean is considered. The main attention has been paid on the problem of excluding of no canonical variable –vertical velocity of surface fluid particles – from the Hamiltonian formulation of the wave problem. Three main approaches are determined in the solution of the problem. The first one may be called as spectral and the second and third approaches – as differential and integral approaches correspondently. It has been shown that excluding technique depends on the nonlinearities degree of the waves and is not trivial anyway (in all cases). Some numerical results for both canonical and non canonical variables in periodic Stokes waves an asymmetric wind waves are considered too. It has been shown the formation of singularity in the vicinity of the wave crests.

Key words: Hamiltonian mechanics, Hamiltonian function, canonical variables, surface water waves, nonlinearity of wave motion.