

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 336.153

## ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ОЦЕНКИ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АСПЕКТОВ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

**Т.Н. СОЗОНОВА<sup>1)</sup>**  
**Н.С. ТИТОВА<sup>2)</sup>**  
**Н.В. ЩЕРБИНИНА<sup>3)</sup>**

<sup>1)</sup> *Белгородский государственный университет*

*e-mail: Sozonova@bsu.edu.ru*

<sup>2)</sup> *Белгородский государственный университет*

*e-mail: NTitova@bsu.edu.ru*

<sup>3)</sup> *Белгородский государственный университет*  
*e-mail: Shcherbinina@bsu.edu.ru*

В настоящее время в различных областях науки и техники широкое развитие получили системы, ориентированные на получение, обработку и хранение информации, представленной в виде изображений. В данной работе рассмотрены некоторые аспекты обработки изображений, в частности, передискретизация и увеличение четкости, на основе вариационных алгоритмов интерполяции и оценивание первой производной на основе частотных представлений.

Ключевые слова: интерполяция, оценка производной, частотное представление, передискретизация, четкость изображения.

Многие отрасли науки и техники, имеющие отношение к получению, обработке, хранению и передаче информации, в значительной степени ориентируются в настоящее время на развитие систем, в которых информация имеет характер изображений. Изображение, которое рассматривается как двумерный сигнал, является значительно более емким носителем информации, чем обычный одномерный (временной) сигнал. Вместе с тем, при решении многих научных и инженерных задач при работе с визуальными данными требуется в качестве промежуточного этапа проводить пересчет цифровых изображений на другую растровую сетку. В качестве примера таких задач можно привести коррекцию погрешностей аппаратуры (апертурные искажения камеры), перевод аэрокосмических изображений в географические проекции, приведение нескольких изображений к единому размеру, устранение перспективных искажений.

Одной из задач обработки изображений является передискретизация. К задаче передискретизации предъявляются высокие требования по точности, так как каждое преобразование ведет к накоплению ошибки. Таким образом, наилучшим является алгоритм, который производит набор необходимых преобразований за один этап и использует наиболее точный для данной задачи метод аппроксимации. В настоящее время во многих редакторах обработки изображений используются в основном билинейная и бикубическая интерполяция. Отметим, что интерполяция изображения может привести к сильному размытию последнего.

Еще одной из задач обработки изображений является увеличение четкости. Недостаточная четкость изображения может иметь множество объяснений: недостаточное разрешение используемой фототехники, увеличение или уменьшение размера изображения и др.



Таким образом, возникает необходимость при помощи обработки придать изображению такие качества, благодаря которым его восприятие человеком было бы по возможности комфортным. Часто бывает полезным подчеркнуть, усилить какие-то черты, особенности, нюансы наблюдаемой картины с целью улучшения ее субъективного восприятия.

Последнее - субъективность восприятия - сильно усложняет применение формализованного подхода в достижении данных целей. Поэтому, при обработке изображений для визуализации получили распространение методы, в которых часто отсутствуют строгие математические критерии оптимальности. Их заменяют качественные представления о целесообразности той или иной обработки, опирающиеся на субъективные оценки результатов.

В настоящее время известно много методов увеличения четкости изображений, например, такие как: шарпинг, линейное контрастирование, соляризация, препарирование, эквализация и т.д.

В данной работе предлагается использование новых вариационных алгоритмов интерполяции (для увеличения размера изображения) и оценивания производных (для увеличения четкости изображения), основанных на использовании класса целых аппроксимирующих функций ограниченной степени роста. К ним, в частности, относятся функции с финитной областью определения трансформант Фурье, то есть с финитными спектрами.

Учитывая, что изображение можно рассматривать как двумерный сигнал, интерполяция изображения может производиться в два этапа: вдоль оси OX и вдоль оси OY.



Рис. 1. Исходное изображение

Рассмотрим математические основы предлагаемых алгоритмов интерполяции и оценивания производных по одному направлению (вдоль оси OX).

Пусть в эквидистантных точках  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 0, \dots, N$  дан вектор значений сигнала

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u_0, \dots, u_N)^T, \\ u_i &= u(i\Delta t), \quad i = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

где символ T означает транспонирование.

Представляется целесообразным областью определения аппроксимирующей функции считать всю числовую ось, т.е.

$$-\infty \leq t \leq \infty, \quad (2)$$

При этом потребуем, чтобы в любой точке области определения существовали и были непрерывными производные любого порядка, причем выполнялись неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}^{(k)}(t)|^2 dt < \infty, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

В основе дальнейших построений используется представление

$$\hat{u}(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad (4)$$



которое позволяет по производной вычислить интерполирующую функцию. Очевидно, что при этом должны выполняться интерполяционные равенства

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}(i\Delta t) = u_i, i = 0, 1, \dots, N. \quad (5)$$

Для оценки производной будем использовать класса моделей целых функций, которые представимы в виде

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} F(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (6)$$

где

$$\Omega = [-\Omega_2, -\Omega_1) \cup [\Omega_1, \Omega_2); \Omega_1 < \infty; \quad \Omega_2 < \infty,$$

$F(\omega)$  - трансформанта Фурье, связанная с модельной функцией дуальным (7) соотношением

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7)$$

Выбор области определения  $\Omega$  трансформанты Фурье может быть продиктован априорными сведениями о свойствах сигнала.

Подстановка представления (7) в правую часть (6) позволяет получить соотношение для вычисления интерполирующей функции на основе трансформанты Фурье производной

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} F(\omega) \frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega/2} e^{\frac{j\omega t}{2}} d\omega, \quad (8)$$

так что условиям интерполяции (5) нетрудно придать вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} F(\omega) \frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t i}{2}\right)}{\omega \Delta t / 2} e^{\frac{j\omega \Delta t i}{2}} d\omega = v_i / \Delta t, \quad (9)$$

где

$$v_i = (u_i - u_0), i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Для отбора интерполирующей функции из класса целых предлагается использовать вариационный принцип минимизации евклидовой нормы производной. На основе представления (7) и равенства Планшереля (Парсеваля), этому принципу нетрудно придать вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} |F(\omega)|^2 d\omega = \min \quad (11)$$

Таким образом, задача сводится к поиску решения вариационной изопериметрической задачи, определяемой условием (11) и ограничениями вида (9). В работе показано, что искомое решение представимо в виде

$$F(\omega) \equiv \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t i}{2}\right)}{\omega \Delta t / 2} e^{\frac{j\omega \Delta t i}{2}}, \quad (12)$$

когда  $\omega \in \Omega$  и  $F(\omega) = 0$  нулю в противном случае.

Для вычисления вектора множителей Лагранжа  $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$  следует воспользоваться подстановкой представления (12) в левые части равенств (9). В результате нетрудно получить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которым должен удовлетворять набор коэффициентов

$$A\vec{\beta} = \vec{v} = (v_1, \dots, v_N)^T, \quad (13)$$



где

$$A = \{a_{ki}\}; \quad a_{ik} = \frac{1}{\pi} \int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2} \frac{\sin\left(\frac{xk}{2}\right) \sin\left(\frac{xi}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cos\left[\frac{x}{2}(k-i)\right] dx; \quad \bar{\Omega}_r = \Delta t \Omega_r, r = 1, 2. \quad (14)$$

В строгом смысле симметричная матрица с элементами вида (14) является положительно определенной. Отметим, что если интервал интегрирования в (14) удовлетворяет условию

$$\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 = N\Delta t(\Omega_2 - \Omega_1) \geq 2\pi, \quad (15)$$

то определитель матрицы  $A$  будет заметно больше нуля, следовательно решение СЛАУ вида (13) будет устойчивым. Отметим, что неравенство вида (15) всегда можно выполнить за счёт соответствующего определения размеров области определения трансформанты Фурье моделирующей (аппроксимирующей производную) целой функции. Иными словами, в указанном смысле решение сформулированных задач оценивания производной и интерполяции на основе соотношения (8) всегда существует.

Если же интервал интегрирования удовлетворяет условию

$$N(\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1) < \pi, \quad (16)$$

то значения элементов матрицы  $A$  будут близки и ее определитель будет близок к нулю, следовательно решение СЛАУ вида (13) будет неустойчивым. В этом случае при вычисления вектора  $\vec{\beta}$  предлагается использовать псевдообратную матрицу  $A^+$ , вычисляемую через ненулевые собственные числа и соответствующие им собственные векторы

$$A^+ = Q_1 L_1^{-1} Q_1^T, \quad (17)$$

где

$$L_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_J), \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_J > 0, \quad Q_1 = (\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_J).$$

На основе соотношений (12) и (14) нетрудно получить вычислительные формулы для интерполирующей функции (18) и оценки производной (19).

$$\hat{u}(\tau) = u_0 + \frac{\tau}{\pi} \sum_{i=1}^N \beta_i \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2} i\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)} \cos\left[\frac{\omega}{2}(\tau - i\Delta t)\right] d\omega, \quad (18)$$

$$f(\tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \beta_i \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2} i\right)}{\omega\Delta t/2} \cos\left[\omega(\tau - i\Delta t/2)\right] d\omega; \quad (19)$$

Отметим еще одну возможность организации вычислений. Если заранее известен набор  $\tau_k$ ,  $k = 1, \dots, L$  интервала  $[0, N\Delta t]$ , в которых предполагается в дальнейшем вычисление интерполирующих функций. Тогда, используя (18) и (19) с учетом СЛАУ (13) можно получить следующие вычислительные формулы:

Для интерполирующей функции

$$\hat{u} = (\hat{u}(\tau_1), \dots, \hat{u}(\tau_L))^T = u_0 \vec{e}_L + CA^+ \vec{v}, \quad (20)$$

где

$$\vec{e}_L = (1, \dots, 1)^T;$$

$$C = \{c_{ki}\};$$

$$c_{ki} = \frac{\tau_k}{\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau_k}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2} i\right)}{\left(\frac{\omega\tau_k}{2}\right) \left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)} \cos\left[\frac{\omega}{2}(\tau_k - i\Delta t)\right] d\omega; \quad (21)$$



Для оценки производной

$$\vec{f} = (f(\tau_1), \dots, f(\tau_L))^T = BA^+ \vec{v}, \quad (22)$$

где

$$B = \{b_{ki}\}, \quad k = 1, \dots, L; \quad i = 1, \dots, N.$$

$$b_{ki} = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2} i\right)}{\omega \Delta t / 2} \cos\left[\omega\left(\tau_k - i \Delta t / 2\right)\right] d\omega. \quad (23)$$

Удобство применения этих формул заключается в том, что матрицы А, В и С могут быть вычислены заранее, храниться в памяти ПК и многократно использоваться.

Рассмотрим применение предложенных алгоритмов интерполяции и оценки производной для обработки изображений. Пусть в качестве исходных данных имеем изображение размером  $N \times M$  ( $y=N, x=M$ ) пикселей.

1. Увеличение изображений в  $K$  раз.

Для увеличения изображения будем использовать предложенный вариационный алгоритм интерполяции.

На первом этапе осуществляем вычисление матриц  $A_x = \{a_{ij}\}$ ,  $i = (1:N-1), j = (1:N-1)$ , с элементами вида (14) и  $C_x = \{c_{ij}\}$ ,  $i = (1:(N-1)K), j = (1:N-1)$  с элементами вида (21).

Затем осуществляем интерполяцию исходного изображения предложенным вариационным методом вдоль оси ОХ по выражению

$$\hat{f}_x = f C_x A_x^+;$$

где  $\hat{f}_x$  - изображение, интерполированное вдоль оси ОХ,

$f$  - исходное изображение.

В результате получаем изображение, интерполированное вдоль оси ОХ, приведенное на рисунке 2.



Рис. 2. Интерполяция изображения вдоль оси ОХ

На втором этапе эксперимента осуществляем интерполяцию изображения, приведенного на рисунке 2 вдоль оси ОУ, для чего предварительно производим вычисление матриц  $A_y = \{a_{ij}\}$ ,  $i = (1:M-1), j = (1:M-1)$  с элементами вида (14) и  $C_y = \{c_{ij}\}$ ,  $i = (1:(M-1)K), j = (1:M-1)$  с элементами вида (21). Интерполяцию осуществляем по выражению

$$\hat{f} = C_y A_y^+ f_x,$$

где  $\hat{f}$  - интерполированное изображение.

В результате получим изображение размером  $5N \times 5M$  пикселей. Результаты эксперимента представлены на рисунке 3.



Рис. 3. Интерполированное изображение

Из приведенных данных видно, что предложенный алгоритм интерполяции может быть применен для увеличения размера изображения с приемлемой точностью.

#### 2. Увеличение четкости изображений.

Для увеличения четкости изображений предлагается использовать предложенный метод оценки производных.

На первом этапе эксперимента производилось вычисление матриц  $B_x = \{b_{ki}\}$ ,  $k = 1, \dots, N$ ;  $i = 1, \dots, N$  и  $B_y = \{b_{kj}\}$ ,  $k = 1, \dots, M$ ;  $j = 1, \dots, M$  с элементами вида (23) и осуществлялось вычисление второй смешанной производной по выражению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = B_x A^{-1} \cdot f \cdot B_y A^{-1},$$

где  $A_y = \{a_{ij}\}$  - матрица с элементами вида (14),  $f$  - исходное изображение.

Затем к исходному изображению добавлялось значение второй смешанной производной, то есть

$$\hat{f} = f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$



что позволило получить более четкие, в смысле субъективного восприятия, изображения. Результаты эксперимента приведены на рисунках 4 – 6.



Рис. 4. Исходное изображение (а), изображение после обработки (б)

После обработки изображения наблюдается увеличение четкости границ перехода от светлого тона к более темному.

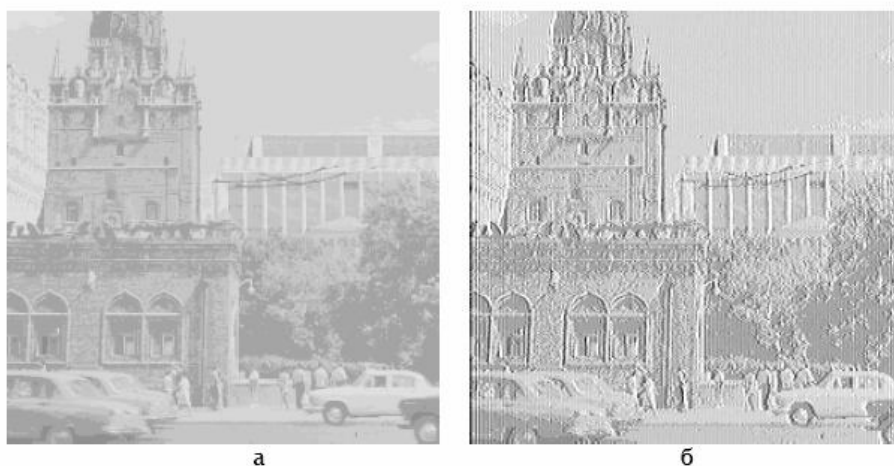


Рис. 5. Исходное изображение (а), изображение после обработки (б)

На данном рисунке наблюдается уменьшение «туманности» изображения, что дает возможность наблюдать мелкие детали изображения и увеличить субъективное восприятие изображения.

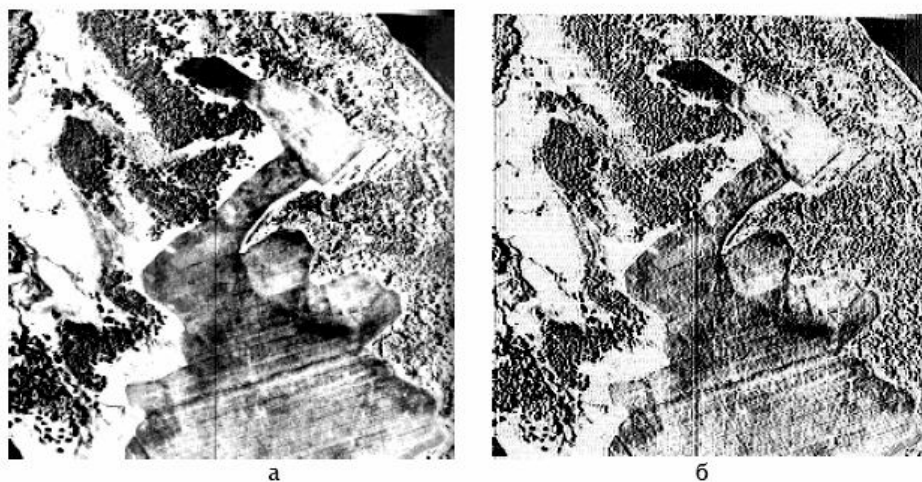


Рис. 6. Исходное изображение (а), изображение после обработки (б)



По результатам эксперимента видно, что предлагаемый алгоритм увеличения четкости изображений позволяет повысить детальность наблюдаемой картины, дает возможность наблюдения мелких деталей на всех участках изображения. А так же позволяет получить более четкие границы отдельных объектов, то есть производить оконтуривание, что может быть полезно в геологии, при обработке аэроснимков земной поверхности.

Очевидным достоинством предлагаемого алгоритма увеличения четкости изображений является его предельная простота. Следует отметить быстрдействие предлагаемого алгоритма, которое достигается за счет предварительного вычисления используемых матриц и хранения их в памяти компьютера. Вместе с тем, предлагаемый алгоритм обработки изображений приводит к очевидному субъективному улучшению визуального качества.

#### Литература

1. Ланцош, К. Практические методы прикладного анализа [Текст] : справ. рук. / К. Ланцош; пер. с англ. М. З. Кайнера. – М. : Физматгиз, 1961. – 524 с.
2. Хургин, Я. И. Фinitные функции в физике и технике [Текст] / Я.И. Хургин, В.П. Яковлев. – М. : Наука, 1971. – 408 с. : ил.
3. Жилияков, Е.Г. Вариационный метод оценивания производных и интерполяции сигналов по эмпирическим данным [Текст] / Е.Г. Жилияков, Т.Н. Созонова, И.Ю. Мисливец // Вестник Воронежского государственного университета, Серия: Системный анализ и информационные технологии. – Воронеж, 2006. – выпуск 2. – С.70-73.

## VARIATIONAL ALGORITHMS OF THE INTERPOLATION AND THE ESTIMATION OF THE FIRST DERIVED FOR IMAGE PROCESSING

**T.N. SOZONOVA<sup>1)</sup>**

**N.S. TITOVA<sup>2)</sup>**

**N.V. Shcherbinina<sup>3)</sup>**

<sup>1)</sup> *Belgorod state university  
e-mail: Sozonova@bsu.edu.ru*

<sup>2)</sup> *Belgorod state university  
e-mail: NTitova@bsu.edu.ru*

<sup>3)</sup> *Belgorod state university  
e-mail: Shcherbinina@bsu.edu.ru*

Nowadays in different areas of the science and technology broad development have got the systems, oriented on reception, processing and keeping the information, presented as the images. In the article some aspects of the image processing are considered, in particular, resampling and the sharpness increase, on the variational algorithms of interpolation and estimation of the first derived on the frequency presentations base.

Key words: Interpolation, estimation of the first derived, frequency presentation, resampling, image sharpness