УДК 517.983

О ВОЗМУЩЕНИИ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ, НЕЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Х.К. АВАД, А.В. ГЛУШАК

Белгородский государственный университет

e-mail: glushak@bsu.edu.ru

Доказывается однозначная разрешимость задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные, при возмущении уравнения нелинейным слагаемым.

Ключевые слова: уравнение дробного порядка, однозначная разрешимость задачи типа Коши, возмущение, подчиненный оператор.

В банаховом пространстве E рассмотрим следующую задачу типа Коши

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t) + F(t, B(t)u(t)), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0, \tag{1.2}$$

где $0 < \alpha < 1$, $D^{\alpha-1}u(t) = I^{1-\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)\, ds$ – левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha$ ($I^{1-\alpha}$ – тождественный оператор при $\alpha = 1$), $D^{\alpha}u(t) = \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}u(t)$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка α, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, A – линейный, замкнутый, плотно определенный оператор, $B(t)$ – также линейный, замкнутый, плотно определенный, но уже переменный и, вообще говоря, неограниченный оператор, наконец, $F(t,w)$ – нелинейный оператор, рассматриваемый как возмущение оператора A.

Условие 1. (i) $u_0 \in D(A)$ ($D(A)$ – *область определения оператора* A).

(ii) *Оператор* A *таков, что при некотором* β, *удовлетворяющем неравенству* $\alpha \le \beta \le 1$, *равномерно корректна задача*

$$D^{\beta}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0. \tag{1.4}$$

Пусть $T_\beta(t)$ – *разрешающий оператор задачи* (1.3), (1.4), *т.е.*, $u(t) = T_\beta(t)u_0$, *и при этом*

$$\|T_\beta(t)\| \le M_1\ t^{\beta-1}, \quad M_1 > 0. \tag{1.5}$$

Укажем, что при $0 < \beta < 1$ равномерная корректность задачи (1.3), (1.4) исследовалась в [1, 2, 3], а при $\beta = 1$ оператор A должен быть генератором C_0-полугруппы.

Условие 2. (i) *Оператор $B(t)$ имеет не зависящую от t область определения D и при этом $D(A) \subset D$.*

(ii) *Для любого $x \in D$ функция $D^\alpha B(t)x$ принадлежит $C((0,\infty),E)$ и абсолютно интегрируема в нуле.*

(iii) *Для любого $x \in E$ существуют постоянные $\gamma \in (0,1)$, $M_2 > 0$ такие, что $T_\beta(\tau)x \in D$ (эффект сглаживания) и*

$$\|B(t)T_\beta(\tau)x\| \le \tfrac{M_2}{\tau^\gamma}\|x\|, \quad t,\tau \in (0,\infty). \tag{1.6}$$

Отметим, что если оператор $-A$ является сильно позитивным (терминология заимствована из [4]), т.е., если

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \tfrac{M_3}{1+|\lambda|}, \quad Re\ \lambda \ge 0,\ M_3 > 0,$$

то в условии 1 можно взять $\beta = 1$, а неравенство (1.6) означает, что оператор $B(t)$ подчинен дробной степени $(-A)^\gamma$ (см. [4, с. 298]). Перестановочность операторов A и $B(t)$ не предполагается.

Условие 3. (i) *Для любой функции $w(t)$ имеющей абсолютно интегрируемую дробную производную $D^\alpha w(t)$ функция $D^\alpha F(t,w(t))$ принадлежит $C((0,\infty),E)$ и абсолютно интегрируема в нуле.*

(ii) *Для $w = 0$ справедливо неравенство* $\|F(t,0)\| \le C_0(1+t^{\mu-1})$, $\mu > 0$, $C_0 > 0$.

(iii) *Оператор $F(t,w)$ удовлетворяет равномерному по $t \ge 0$ условию Липшица*

$$\|F(t,w_2) - F(t,w_1)\| \le L\|w_2 - w_1\|.$$

Условие 4. *Банахово пространство E обладает свойством Радона-Никодима (см.* [5, *с.* 15]).

Например, рефлексивные банаховы пространства обладают этим свойством, а пространства $L_1(a,b)$, $C[a,b]$, c_0 (пространство последовательностей, сходящихся к нулю) не обладают.

Как будет доказано в дальнейшем, условия 1 – 4 обеспечат однозначную разрешимость задачи (1.1), (1.2).

При доказательстве нами будет использована функция (см. [6, с. 357])

$$f_{\tau,\nu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(tz - \tau z^\nu)\ dz, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\sigma > 0$, $\tau > 0$, $0 < \nu < 1$ и ветвь функции z^ν выбрана так, что Re $z^\nu > 0$ при Re $z > 0$. Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной z-плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Сходимость интеграла (1.7) обеспечивается множителем $\exp(-\tau z^\nu)$.

Если в интеграле, определяющем функцию $f_{\tau,\nu}(t)$ перейти от интегрирования по прямой $z = \sigma > 0$ к контуру, состоящему из двух лучей $z = r\exp(-i\theta)$ и $z = r\exp(i\theta)$, где $0 < r < \infty$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$, то при $t > 0$ для функции $f_{\tau,\nu}(t)$ получится представление

$$f_{\tau,\nu}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(tr\cos\theta - \tau r^\nu \cos\nu\theta)\sin(tr\sin\theta - \tau r^\nu \sin\nu\theta + \theta)\ dr. \quad (1.8)$$

Функция $f_{\tau,\nu}(t)$ неотрицательна и имеет место представление

$$\exp(-\tau\lambda^\nu) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) f_{\tau,\nu}(t)\ dt,\ \tau > 0,\ \lambda > 0,\ 0 < \nu < 1. \quad (1.9)$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1, 4 *и* $\alpha < \beta$. *Тогда задача*

$$D^\alpha u(t) = Au(t),\quad t > 0, \quad (1.10)$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0, \quad (1.11)$$

равномерно корректна, и ее разрешающий оператор определяется формулой

$$T_\alpha(t)u_0 = \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t) T_\beta(\tau) u_0\ d\tau, \quad (1.12)$$

где $\nu = \alpha/\beta$, *а функция* $f_{\tau,\nu}(t)$ *определяется равенством* (1.7).

Доказательство. Если задача типа Коши (1.3), (1.4) равномерно корректна и $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$, то, как доказано в [2], λ^β принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, для любого $x \in E$ справедливо представление резольвенты $R(\lambda^\beta) = (\lambda^\beta I - A)^{-1}$

$$R(\lambda^\beta)x = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) T_\beta(t) x\ dt, \quad (1.13)$$

и при этом для всех целых $n \geq 0$

$$\left\|\frac{d^n R(\lambda^\beta)}{d\lambda^n}\right\| \leq \frac{M\Gamma(n+\beta)}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^{n+\beta}},\quad Re\ \lambda > 0. \quad (1.14)$$

В банаховом пространстве E, обладающем свойством Радона-Никодима, выполнение неравенств (1.14) (даже для действительных $\lambda > 0$) является и достаточным условием равномерной корректности задачи (1.3), (1.4). При этом разрешающий оператор имеет вид

$$T_\beta(t)u_0 = D^{1-\beta}\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_0 - i\infty}^{\omega_0 + i\infty} \lambda^{\beta-1}\exp(\lambda t) R(\lambda^\beta) u_0\ d\lambda,\quad \omega_0 > 0. \quad (1.15)$$

Учитывая представления (1.13), (1.9) и оценку (1.5), при $\nu = \alpha/\beta$ будем иметь

$$R(\mu^\alpha)x = \int_0^\infty \exp(-\mu^\nu t) T_\beta(t) x\ dt = \int_0^\infty T_\beta(t) x\ dt \int_0^\infty \exp(-\tau\mu) f_{t,\nu}(\tau)\ d\tau.$$

Следовательно, в силу (1.8) справедливы неравенства

$$\left\|\frac{d^n R(\mu^\alpha)x}{d\mu^n}\right\| \leq$$

$$\leq M_1\|x\| \int_0^\infty t^{\beta-1}\ dt \int_0^\infty \tau^n \exp(-\tau\mathrm{Re}\ \mu)\ d\tau \int_0^\infty \exp(\tau s\cos\theta - ts^\nu\cos\nu\theta)\ ds =$$

$$= M_4\|x\|\int_0^\infty \tau^n \exp(-\tau \mathrm{Re}\ \mu)\ d\tau \int_0^\infty s^{-\alpha}\exp(\tau s\cos\theta)\ ds =$$

$$= M_5\|x\|\int_0^\infty \tau^{n-1+\alpha}\exp(-\tau \mathrm{Re}\ \mu)\ d\tau = \frac{M_6\Gamma(n+\alpha)\|x\|}{(\mathrm{Re}\ \mu)^{n+\alpha}},$$

что и доказывает равномерную корректность задачи (1.10), (1.11).

Разрешающий оператор этой задачи, в силу представлений (1.15), (1.13) и (1.7) имеет вид

$$T_\alpha(t)u_0 = D^{1-\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{\alpha-1}\exp(\lambda t)R(\lambda^\alpha)u_0\ d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty T_\beta(\tau)u_0 d\tau D_t^{1-\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{\alpha-1}\exp(\lambda t-\lambda^\nu\tau)\ d\lambda = \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\ d\tau.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В частном случае $\nu = \alpha/\beta = 1/2$ имеем

$$f_{\tau,1/2}(t) = \frac{\tau}{2t\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right),$$

и равенство (1.12) принимает вид

$$T_{\beta/2}(t)u_0 = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \tau\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right)T_\beta(\tau)u_0 d\tau.$$

Сформулируем далее доказанную в [7] теорему о разрешимости задачи типа Коши для неоднородного уравнения.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* 1, *а функция* $D^\beta h(t)$ *принадлежит* $C((0,\infty),E)$ *и абсолютно интегрируема в нуле. Тогда неоднородная задача*

$$D^\beta u(t) = Au(t) + h(t), \quad t > 0, \tag{1.16}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0 \tag{1.17}$$

имеет единственное решение, которое определяется равенством

$$u(t) = T_\beta(t)u_0 + \int_0^t T_\beta(t-\xi)h(\xi)\ d\xi. \tag{1.18}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1 – 4 *и* $\alpha < \beta \le 1$. *Тогда задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\|u(t)\| \le \frac{M_1\ \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|u_0\| + \frac{C_0\ M_1\ \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + \frac{C_0\ M_1\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}t^{\alpha+\mu-1} +$$

$$+L\ M_1\ M_2\Gamma(\beta)\ \Gamma(1-\beta\gamma)\big(t^{\alpha+\delta-1}\ E_{\delta,\alpha+\delta}\big(LM_2\ \Gamma(1-\beta\gamma)t^\delta\big)\ \|u_0\| +$$

$$+C_0\ t^{\alpha+\delta}E_{\delta,\alpha+\delta+1}\big(LM_2\ \Gamma(1-\gamma)t^\delta\big) + C_0\ \Gamma(\mu)\ t^{\alpha+\delta+\mu-1}E_{\delta,\alpha+\delta+\mu}\big(LM_2\ \Gamma(1-$$

$\gamma)t\delta,$

где $\delta = \nu(1-\gamma)$, $E_{\mu,\rho}(\cdot)$ *– функция типа Миттаг-Леффлера.*

Доказательство. Учитывая теоремы 1 и 2, сведем задачу (1.1), (1.2) к интегральному уравнению, которое в силу (1.12), (1.18) запишется в виде

$$u(t) = \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t) T_\beta(\tau) u_0 \, d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) T_\beta(\tau) F(s, B(s)u(s)) \, d\tau ds, \qquad (1.19)$$

где u_0, $T_\beta(\tau)u_0 \in D(A) \subset D$, $\nu = \alpha/\beta$. Обозначив $w(t) = B(t)u(t)$, получим

$$w(t) = \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t) B(t) T_\beta(\tau) u_0 \, d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) B(t) T_\beta(\tau) F\big(s, w(s)\big) \, d\tau ds. \quad (1.20)$$

Для решения интегрального уравнения (1.20) применим метод последовательных приближений, положив

$$w_0(t) = 0,$$

$$w_1(t) = \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t) B(t) T_\beta(\tau) u_0 \, d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) B(t) T_\beta(\tau) F(s,0) \, d\tau ds,$$

$$w_{n+1}(t) =$$
$$\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t) B(t) T_\beta(\tau) u_0 \, d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) B(t) T_\beta(\tau) F(s, w_n(s)) \, d\tau ds, \quad n \in N.$$

Используя неравенство (1.6) и условие 3(ii), оценим норму

$$\|w_1(t)\| \le$$
$$\le M_2 \, \|u_0\| \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(s) \tau^{-\gamma} \, d\tau + M_2 \, C_0 \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) \tau^{-\gamma} (1 + s^{\mu-1}) \, d\tau ds. \quad (1.21)$$

Учитывая определение функции $f_{\tau,\nu}(s)$ равенством (1.7), а также интегралы 2.3.4.1, 2.3.3.4 [8], получим

$$\int_0^\infty f_{\xi,\nu}(s) \xi^{-\gamma} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zs} \, dz \int_0^\infty \xi^{-\gamma} \exp(-\xi z^\nu) \, d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\gamma)}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zs} z^{-\nu(1-\gamma)} \, dz = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\nu(1-\beta\gamma))} s^{\nu(1-\gamma)-1}, \quad s > 0. \quad (1.22)$$

Учитывая равенство (1.22), из (1.21) выводим оценку

$$\|w_1(t)\| \le M_2 \|u_0\| \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\nu(1-\gamma))} t^{\nu(1-\beta\gamma)-1} + M_2 C_0 \frac{\Gamma(1-\beta\gamma) t^{\nu(1-\gamma)}}{\Gamma(\nu(1-\gamma)+1)} +$$

$$+ M_2 C_0 \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\mu) t^{\nu(1-\gamma)+\mu-1}}{\Gamma(\nu(1-\gamma)+\mu)} \le \frac{M_2 \, \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\delta)} \Big(t^{\delta-1} \|u_0\| + \frac{C_0}{\delta} t^\delta + \frac{C_0 \Gamma(\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\delta+\mu)} t^{\delta+\mu-1} \Big).$$

Используя условие 3(iii), аналогично оценим норму разности

$$\|w_2(t) - w_1(t)\| \le \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) \big\| B(t) T_\beta(\tau) (F(s,w_1) - F(s,0)) \big\| \, d\tau ds \le$$

$$\le \frac{L\ M_2^2\ \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\delta)}\int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{-\gamma}\left(s^{\delta-1}\|u_0\| + \frac{C_0}{\delta}s^{\delta} + \frac{C_0\Gamma(\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\delta+\mu)}s^{\delta+\mu-1}\right)\ d\tau ds \le$$

$$\le \frac{L\ M_2^2\ \Gamma^2(\delta/\nu)}{\Gamma(2\delta)}\left(t^{2\delta-1}\|u_0\| + \frac{C_0}{2\delta}t^{2\delta} + \frac{C_0\Gamma(2\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\delta+\mu)}t^{2\delta+\mu-1}\right). \qquad (1.23)$$

Учитывая (1.23), для $n \in N$ по индукции получаем

$$\|w_n(t) - w_{n-1}(t)\| \le \frac{L^{n-1}M_2^n\ \Gamma^n(\delta/\nu)}{\Gamma(n\delta)}\left(t^{n\delta-1}\|u_0\| + \frac{C_0}{n\delta}t^{n\delta} + \frac{C_0\Gamma(n\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(n\delta+\mu)}t^{n\delta+\mu-1}\right). \ (1.24)$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(w_n(t) - w_{n-1}(t))$ сходится равномерно в любом интервале $[t_0, t_1]$, $0 < t_0 < t_1$. Поэтому $w_n(t)$ на том же промежутке равномерно сходится к непрерывной на $[t_0, t_1]$ функции $w(t)$, которая удовлетворяет интегральному уравнению (1.20). В силу (1.24) для нее справедлива оценка

$$\|w(t)\| \le \sum_{n=1}^{\infty}\|w_n(t) - w_{n-1}(t)\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{L^k\ M_2^{k+1}\Gamma^{k+1}(\delta/\nu)}{\Gamma((k+1)\delta)} \quad \times$$

$$\times \quad \left(t^{(k+1)\delta-1}\|u_0\| + \frac{C_0}{(k+1)\delta}t^{(k+1)\delta} + \frac{C_0\ \Gamma((k+1)\delta)\ \Gamma(\mu)}{\Gamma((k+1)\delta+\mu)}t^{(k+1)\delta+\mu-1}\right) \le$$

$$\le M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\left(t^{\delta-1}\|u_0\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L^k\ M_2^k\Gamma^k(\delta/\nu)\ t^{k\delta}}{\Gamma((k+1)\delta)} + C_0t^{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L^kM_2^k\ \Gamma^k(\delta/\nu)\ t^{k\delta}}{\Gamma((k+1)\delta+1)} + \right.$$

$$\left. + C_0\Gamma(\mu)\ t^{\delta+\mu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L^kM_2^k\ \Gamma^k(\delta/\nu)\ t^{k\delta}}{\Gamma((k+1)\delta+\mu)}\right) =$$

$$= M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ \left(t^{\delta-1}E_{\delta,\delta}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^{\delta}\right)\|u_0\| + C_0t^{\delta}E_{\delta,\delta+1}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t\delta\right) + \right.$$

$$\left. + C_0\Gamma(\mu)t^{\delta+\mu-1}E_{\delta,\delta+\mu}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^{\delta}\right)\right), \qquad (1.25)$$

где $E_{\sigma,\rho}(\cdot)$ – функция типа Миттаг-Леффлера, $t \in [t_0, t_1]$, $0 < t_0 < t_1$.

Поскольку промежуток $[t_0, t_1]$ произвольный, то функция $w(t)$ – непрерывное на $(0, \infty)$ решение уравнения (1.20), удовлетворяющее на $(0, \infty)$ неравенству (1.25), т.е., абсолютно интегрируема в нуле. Более того, из равенства (1.20) и условия 2(ii) мы заключаем, что $D^{\alpha}w(t) \in C((0, \infty), E)$ и $D^{\alpha}w(t)$ абсолютно интегрируема в нуле.

Наконец, из равенства (1.19), с помощью теоремы 2, мы получаем решение $u(t)$ задачи (1.1), (1.2) в виде

$$u(t) = \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t)T_{\beta}(\tau)u_0\ d\tau + \int_0^t \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t-s)T_{\beta}(\tau)F(s, w(s))\ d\tau ds,$$

для которого, в силу (1.5), (1.25), (1.22) и условия 3(ii) справедлива оценка

$$\|u(t)\| \le \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t)\|T_{\beta}(\tau)u_0\|\ d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\left\|T_\beta(\tau)F(s,0)\right\|\ d\tau ds + \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\left\|T_\beta(\tau)(F(s,w(s)) - F(s,0)\right\|\ d\tau ds \le$$

$$\le \frac{M_1\ \Gamma(\beta) t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|u_0\| + \frac{C_0\ M_1\Gamma(\beta)\ t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{C_0\ M_1\Gamma(\beta)\Gamma(\mu)\ t^{\alpha+\mu-1}}{\Gamma(\alpha+\mu)} +$$

$$+\frac{L\ M_1\ M_2\ \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\|u_0\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\delta-1}E_{\delta,\delta}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ s^\delta\right)\ ds +$$

$$+\frac{C_0\ L\ M_1\ M_2\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\delta}E_{\delta,\delta+1}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)s^\delta\right)\ ds +$$

$$+\frac{C_0\ L\ M_1\ M_2\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\delta/\nu)\ \Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\delta+\mu-1}E_{\delta,\delta+\mu}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)s^\delta\right)\ ds =$$

$$= \frac{M_1\ \Gamma(\beta) t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|u_0\| + \frac{C_0\ M_1\Gamma(\beta)\ t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{C_0\ M_1\Gamma(\beta)\Gamma(\mu)\ t^{\alpha+\mu-1}}{\Gamma(\alpha+\mu)} +$$

$$+L\ M_1\ M_2\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\delta/\nu)\Big(t^{\alpha+\delta-1}E_{\delta,\alpha+\delta}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^\delta\right)\|u_0\| +$$

$$\left.\begin{matrix} +C_0\ t^{\alpha+\delta}E_{\delta,\alpha+\delta+1}\left(L\ M_2\ \Gamma\left(\frac{\delta}{\nu}\right)\ t^\delta\right) + \\ +C_0\ \Gamma(\mu)t^{\alpha+\delta+\mu-1}E_{\delta,\alpha+\delta+\mu}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^\delta\right)\end{matrix}\right),$$

при этом мы использовали равенство

$$I^\alpha\left(t^{\rho-1}\ E_{\sigma,\rho}(ct^\gamma)\right) = t^{\alpha+\rho-1}\ E_{\sigma,\alpha+\rho}(ct^\gamma),\quad \alpha,\ \rho,\ \gamma > 0.$$

Установим далее единственность решения задачи (1.1), (1.2). Пусть имеется другое решение, которое мы обозначим $U(t)$. Тогда в силу теорем 1 и 2

$$U(t) = \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\ d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)F(s,W(s))\ d\tau ds,$$

где $W(t)$ – решение интегрального уравнения (1.20).

Докажем единственность решения этого интегрального уравнения в классе непрерывных на $(0,\infty)$ функций, допускающих оценку

$$\|W(t)\| \le M_0 t^{\delta-1}e^{\omega t}, \tag{1.26}$$

где $\delta = \nu(1-\beta\gamma) < 1$. Отметим, что функции, для которых выполнена оценка (1.25), входят в указанный класс в силу известного (см. [9, с. 134]) асимптотического поведения функции Миттаг-Леффлера для $0 < \sigma < 2$

$$E_{\sigma,\rho}(z) = \frac{1}{\sigma}z^{(1-\rho)/\sigma}\exp\left(z^{1/\sigma}\right) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Gamma(\rho-\sigma j)\ z^j} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),\quad z\in R,\ z\to+\infty.$$

Пусть $b > 0$, $t \in (0,b]$, $\varepsilon_n \to 0$, n – достаточно большое натуральное число. Поскольку мы рассматриваем класс функций удовлетворяющий неравенству (1.26), то обозначим через

$$m=\sup_{t\in[0,b]}\left(t^{1-\delta}e^{-nt}||W(t)-w(t)||\right).$$

Учитывая равенство (1.22), после очевидных преобразований будем иметь

$$\|W(t)-w(t)\|\leq\frac{L\ M_2\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\delta)}\int_0^t(t-s)^{\delta-1}\|W(s)-w(s)\|\ ds=$$
$$=LM_2\Gamma(1-\gamma)\mathrm{I}^{\delta}(\|W(t)-w(t)\|).$$

Следовательно,

$$\|W(t)-w(t)\|\leq\frac{L\ M_2\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\delta)}\int\limits_0^t(t-s)^{\delta-1}s^{\delta-1}e^{\omega s}\ ds=LM_2\Gamma(1-\gamma)\mathrm{I}^{\delta}\left(t^{\delta-1}e^{\omega t}\right).$$

Продолжая этот процесс, придем к неравенству

$$\|W(t)-w(t)\|\leq\frac{L^kM_2{}^k\Gamma^k(1-\gamma)m}{\Gamma(k\delta)}\int\limits_0^t(t-s)^{k\delta-1}s^{\delta-1}e^{\omega s}\ ds\leq$$
$$=\frac{L^kM_2{}^k\Gamma^k(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma\left((k+1)\delta\right)}t^{(k+1)\delta-1}e^{\omega t}m,$$

откуда, переходя к супремуму, получим

$$m\leq\frac{L^kM_2{}^k\Gamma^k(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma\left((k+1)\delta\right)}b^{k\delta}m. \tag{1.27}$$

Множитель

$$\frac{L^kM_2{}^k\Gamma^k(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma\left((k+1)\delta\right)}b^{k\delta}$$

является общим членом ряда, определяющего функцию Миттаг-Леффлера, поэтому он стремится к нулю. Стало быть из (1.27) получаем

$$m=\sup_{t\in[0,b]}\left(t^{1-\delta}e^{-nt}\|W(t)-w(t)\|\right)=0,$$

откуда, в силу произвольности $b>0$, следует $W(t)\equiv w(t)$ при $t>0$, что и завершает доказательство единственности. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1 – 3 *и* $\alpha=\beta<1$. *Тогда задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\|u(t)\|\leq M_1\ t^{\alpha-1}\|u_0\|+\frac{C_0\ M_1}{\alpha}\ t^{\alpha}+\frac{C_0\ M_1\ \Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}\ t^{\alpha+\mu-1}+$$

$$+L\ M_1\ M_2\Gamma(\alpha)\ \Gamma(1-\gamma)\big(t^{\alpha-\gamma}\ E_{1-\gamma,\alpha-\gamma+1}(L\ M_2\Gamma(1-\gamma)\ t^{1-\gamma})\|u_0\|+$$

$$+C_0\ t^{\alpha-\gamma+1}E_{1-\gamma,\alpha-\gamma+2}(L\ M_2\Gamma(1-\gamma)\ t^{1-\gamma})+$$

$$+ C_0\ \Gamma(\mu)\ t^{\alpha-\gamma+\mu} E_{1-\gamma,\alpha-\gamma+\mu+1}(L\ M_2\Gamma(1-\gamma)\ t^{1-\gamma})\Big).$$

Доказательство. Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3, при этом для сведения к интегральному уравнению используется только теорема 2.

Замечание 2. Утверждение теоремы 4 справедливо и при $\alpha = \beta = 1$. В этом случае условие 2(ii) следует заменить следующим требованием: для любого $x \in D$ функция $B(t)x$ принадлежит $C^1([0,\infty), E)$.

Установим теперь теорему о непрерывной зависимости решения задачи (1), (2) от начальных условий.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и пусть $u_n(t)$ – последовательность решений задачи*

$$D^{\alpha}u_n(t) = Au_n(t) + F(t, B(t)u_n(t)), \quad t > 0, \tag{1.28}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u_n(t) = g_n \in D(A). \tag{1.29}$$

Если $g_n \to u_0 \in D(A)$, $Ag_n \to Au_0$, и $B(t)g_n$ сходится к $B(t)u_0$ равномерно по $t \in (0, b]$ для любого $b > 0$, то последовательность $u_n(t)$ решений задачи (1.28), (1.29) *сходится к решению $u(t)$ задачи* (1.1), (1.2) *равномерно по $t \in [t_0, b]$ для любых $0 < t_0 < b$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $U_n(t) = u_n(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g_n$, которая является решением задачи

$$D^{\alpha}U_n(t) = AU_n(t) + F\left(t, B(t)U_n(t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(t)g_n\right) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Ag_n, \tag{1.30}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}U_n(t) = 0. \tag{1.31}$$

В силу теорем 1 и 2 функция $U_n(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$U_n(t) = \int_0^t \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)\left(F\left(s, B(s)U_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(s)g_n\right) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Ag_n\right)\ d\tau ds.$$

Обозначив $W_n(t) = B(t)U_n(t)$, как и при доказательстве теоремы 3 получим

$$U_n(t) = \int_0^t \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)\left(F\left(s, W_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(s)g_n\right) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Ag_n\right) d\tau ds, \tag{1.32}$$

где $W_n(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$W_n(t) = \int_0^t \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)\left(F\left(s, W_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(s)g_n\right) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Ag_n\right)\ d\tau ds. \tag{1.33}$$

Пусть n, k достаточно большие натуральные числа, $\varepsilon > 0$. Учитывая (1.33), как и при доказательстве неравенства (1.27), получим

$$||W_n(t) - W_k(t)|| \le \frac{L\ M_2\Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} \|W_n(s) - W_k(s)\|\ ds +$$

$$+\frac{M_2\ \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1}\ s^{\alpha-1}(\|Ag_n - Ag_k\| + L\ \|B(s)g_n - B(s)g_k\|)\ ds,$$

$$m = \sup_{t\in[0,b]} \left(t^{1-\delta}e^{-\omega t}\|W_n(t) - W_k(t)\|\right) \le M_0 m + \varepsilon, \quad M_0 < 1.$$

Следовательно, $m \le \frac{\varepsilon}{1-M_0}$, и в силу полноты пространства E последовательность $t^{1-\delta}e^{-\omega t}W_n(t)$ сходится равномерно по $t \in [0,b]$ к непрерывной на $[0,b]$ функции $t^{1-\delta}e^{-\omega t}W(t)$. Таким образом, $W_n(t)$ сходится равномерно по $t \in [t_0,b]$, $0 < t_0 < b$ к функции $W(t)$, которая удовлетворяет неравенству (1.26), в силу условия 2(ii) принадлежит $D(A)$, при этом $AW(t) \in C((0,\infty),E)$ и абсолютно интегрируема в нуле.

Из равенства (1.32) вытекает равномерная по $t \in [t_0,b]$ сходимость $U_n(t)$ к функции

$$U(t) = \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)\left(F\left(s, W(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(s)u_0\right) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Au_0\right)\ d\tau ds,$$

которая является решением задачи (1.30), (1.31). Наконец, $u_n(t)$ равномерно по $t \in [t_0,b]$ сходится к функции $u(t) = U(t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_0$, которая удовлетворяет задаче (1.1), (1.2). Теорема доказана.

Замечание 3. Утверждение аналогичное утверждению теоремы 5 о непрерывной зависимости решения задачи (1.1), (1.2) от начальных условий справедливо и при $\alpha = \beta \le 1$.

Отметим также работу [10], в которой теорема о возмущении линейным оператором $B(t)$ доказана для уравнения, содержащего дробную производную Капуто, в предположении что оператор A – генератор аналитической полугруппы и $\beta = 1$. Из этой же работы заимствован следующий пример.

Пример. Пусть $E = L_2(R^n)$ и, следовательно, условие 4 выполнено (см. [5, с. 20]). На множестве $D(A) = W_2^{2m}(R^n)$ определим оператор $\mathbf{A}$ следующим образом

$$Au(t,x) = \sum_{|p|=2m} a_p(x)\frac{\partial^{p_1}\dots\partial^{p_n}u(t,x)}{\partial x_1^{p_1}\dots\partial x_n^{p_n}},$$

где $\sum_{|p|=2m} a_p(x)\xi^p \ge (-1)^{m+1}M_0|\xi|^{2m}$ для любых $x,\ \xi \in R^n$ (сильная эллиптичность); коэффициенты $a_p(x)$ при $|p| = 2m$ удовлетворяют равномерному в R^n условию Гельдера. Оператор A, таким образом, удовлетворяет условию 1 при $\beta = 1$.

Оператор $B(t)$ определим на $D = W_2^{2m-1}(R^n) \supset D(A)$ равенством

$$B(t)u(t,x) = \sum_{|p|\le 2m-1} a_p(t,x)\frac{\partial^{p_1}\dots\partial^{p_n}u(t,x)}{\partial x_1^{p_1}\dots\partial x_n^{p_n}} + \int_\Omega \sum_{|p|\le 2m-1} b_p(t,x,\xi)\frac{\partial^{p_1}\dots\partial^{p_n}u(t,\xi)}{\partial \xi_1^{p_1}\dots\partial \xi_n^{p_n}}\ d\xi,$$

где $\Omega \subset R^n$; коэффициенты $a_p(t,x)$ при $|p| \le 2m-1$ и каждом $t \ge 0$ непрерывны, ограничены по $x \in R^n$ и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $k > \alpha$ по t равномерно по $x \in R^n$; коэффициенты $b_p(t,x,\xi)$ непрерывны,

$$\int_{R^n}\int_{\Omega}\left|b_p(t,x,\xi)\right|^2 \, d\xi dx < +\infty,$$

$$\int_{R^n}\int_{\Omega}\left|b_p(t_2,x,\xi)-b_p(t_1,x,\xi)\right|^2 d\xi dx \le C|t_2-t_1|^k, \quad \alpha < k \le 1, \; C > 0.$$

Оператор $B(t)$ удовлетворяет условию 2 при некотором $\gamma \in (0,1)$.

Пусть оператор $F(t,w)$ удовлетворяет условию 3. Тогда при $u_0(x) \in W_2^{2m}(R^n)$, в силу теорем 3, 5 задача (1.1), (1.2) корректно поставлена и однозначно разрешима.

Замечание 4. Доказанные утверждения содержат, в частности, результаты о корректной разрешимости задачи типа Коши для неоднородного уравнения

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t) + B(t)u(t) + h(t),$$

если функция $h(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06 - 08 - 96312

Список литературы

1. Костин В.А. К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными. ДАН СССР. 1992. Т. 326. № 4. С. 597 - 600.
2. Глушак А.В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж. 2001. № 2. С. 74 - 77.
3. Глушак А.В., Поваляева Ю.В. О свойствах решений задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Spectral and Evolution Problems. Simferopol. 2004. V. 14. P. 163 - 172.
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука. 1966.
5. Arendt W., Batty C., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel. Boston. Berlin: Birkhäuser Verlag, 2001.
6. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир. 1967.
7. Глушак А.В. О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж. 2002. № 1. С. 121 - 123.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1981.
9. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 1966.
10. El-Borai M.M. Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations. Chaos. Solitons and Fractals. 2002. V. 14. P. 433 - 440.

ON A PETRURBATION OF AN ABSTRACT DIFFERENTIAL WITH RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVES BY NONLINEAR OPERATOR

H.K. AWAD, A.V. GLUSHAK

Belgorod State University

e-mail:glushak@bsu.edu.ru

Established that one-valued solvability of Cauchy problem for abstract differential equation contains fractional derivatives by perturbation equation with nonlinear operator.

Key words: equation of fractional order, one-valued solvability of Cauchy problem, subordinate operator.