

ФОТОФОРЕЗ КРУПНОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДЫ

А.А. Плесканев

Белгородский государственный университет
308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14
pleskanev@bsu.edu.ru

Рассмотрено движение нагретой сплюснутой сфероидальной частицы, возникающее при неоднородном нагреве поверхности частиц внутренними источниками тепла, функция плотности распределения которых считается известной. Движение частицы происходит в вязкой, сжимаемой газообразной среде, коэффициенты молекулярного переноса которой, являются функциями температуры.

Ключевые слова: нагретая сфероидальная частица, функция распределения, коэффициенты переноса.

При взаимодействии электромагнитного излучения с аэрозольной частицей, внутри нее происходит выделение тепловой энергии, что приводит к неоднородному нагреву поверхности частицы. Газ, взаимодействуя с неоднородно нагретой поверхностью, начинает двигаться вдоль поверхности в направлении возрастания температуры (тепловое скольжение). Тепловое скольжение вызывает появление фотофоретической силы, под действием которой аэрозольная частица приходит в движение. Когда величина фотофоретической силы становится равной величине силы вязкого сопротивления среды, частица начинает двигаться с постоянной скоростью – скоростью фотофореза.

Рассмотрим установившееся фотофоретическое движение твердой нагретой аэрозольной частицы, форма поверхности которой представляет собой сплюснутый сфероид. Нагрев поверхности частицы осуществляется внутренними источниками тепла, объемная плотность распределения которых q_p известна. Считается, что газообразная среда занимает все пространство и на бесконечности покоится.

Температура поверхности частицы может намного превышать температуру среды, что приводит к необходимости рассматривать динамическую вязкость μ_g , теплопроводность λ_g и плотность ρ_g как функции температуры. В данной работе, зависимость динамической вязкости и теплопроводности от температуры рассматривалась как степенная:

$$\mu_g = \mu_\infty t_g^\alpha, \quad \lambda_g = \lambda_{g\infty} t_g^\alpha \quad \text{и} \quad \lambda_p = \lambda_{p\infty} t_p^\gamma, \quad (1)$$

где $\mu_\infty = \mu_g(T_\infty)$, $\lambda_{g\infty} = \lambda_g(T_\infty)$, $\lambda_{p\infty} = \lambda_p(T_\infty)$. Здесь и далее $t_g = T_g/T_\infty$, $t_p = T_p/T_\infty$ – безразмерные температуры; индекс “g” указывает на газообразную среду, “p” – на частицу, “∞” обозначает параметры газообразной среды вдали от частицы.

Свяжем систему отсчета с центром движущейся частицы, при этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, чтобы ось z совпадала с осью симметрии сфероида. В этом случае задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком газа со скоростью U_∞ ($U_\infty = -U_p$, где U_p – скорость движения частицы). Решение проводится в системе координат сплюснутого сфероида $(\varepsilon, \eta, \phi)$.

Обтекание твердого сфероида будет описываться линеаризованной системой уравнений:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu_g \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right] \right), \quad (i, k, j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{U}_g) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(\lambda_g \nabla T_g) = 0, \quad \operatorname{div}(\lambda_p \nabla T_p) = -q_p, \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\varepsilon = \varepsilon_0: U_\varepsilon = 0, \quad U_\eta = K_{\text{из}} \frac{v_g}{T_g} (\nabla T_g \cdot \mathbf{e}_\eta),$$

$$T_g = T_p; \lambda_g (\nabla T_g \cdot \mathbf{e}_\varepsilon) = \lambda_p (\nabla T_p \cdot \mathbf{e}_\varepsilon) + \sigma_0 \sigma_1 (T_g^4 - T_\infty^4), \quad (5)$$

$$\varepsilon \rightarrow \infty: \mathbf{U}_g \rightarrow U_\infty \cos \eta \mathbf{e}_\varepsilon - U_\infty \sin \eta \mathbf{e}_\eta, \quad P_g \rightarrow P_\infty, T_g \rightarrow T_\infty, \quad (6)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0: T_p \neq \infty. \quad (7)$$

Здесь T_g, T_p – температура газообразной среды и частицы соответственно; U_ε и U_η – радиальная и тангенциальная компоненты массовой скорости \mathbf{U}_g в сферoidalной системе координат; U_∞ – величина скорости набегающего потока; $K_{\text{из}}$ – коэффициент теплового скольжения; σ_0 – интегральная степень черноты; σ_1 – постоянная Стефана-Больцмана; \mathbf{e}_ε и \mathbf{e}_η – единичные векторы сферoidalной системы координат.

В граничных условиях на поверхности частицы (5) учтено условие прилипания для нормальной и условие скольжения для тангенциальной компоненты массовой скорости, а также, равенство температур и непрерывность потоков тепла. В качестве граничных условий на бесконечности приняты условия (6). Конечность физических величин отражена в граничном условии (7).

Для нахождения силы, действующей на нагретую твердую аэрозольную частицу, и скорости ее движения, необходимо знать поле температуры, как вне частицы, так и внутри нее.

Поскольку при решении задачи предполагается малость числа Рейнольдса ($\operatorname{Re}_x \ll 1$), то можно считать, что набегающий поток оказывает лишь возмущающее воздействие. В связи с этим, решение системы уравнений теплопереноса будем искать в виде разложения по малому параметру ξ :

$$t_g = t_{g0} + \xi t_{g1} + \dots, \quad t_p = t_{p0} + \xi t_{p1} + \dots,$$

где $\xi = \operatorname{Re}_x = \rho_\infty U_\infty a / \mu_\infty$, $t_g = T_g / T_\infty$, $t_p = T_p / T_\infty$.

При решении задачи мы ограничимся поправками первого порядка малости по ξ . С учетом степенной зависимости коэффициентов теплопроводности (1) уравнения (4) можно записать в виде:

$$\Delta t_g^{1-\alpha} = 0, \quad \Delta t_p^{1-\gamma} = -\frac{1+\gamma}{\lambda_{px} T_\infty} q_p, \quad (8)$$

с граничными условиями:

для нулевых приближений

$$t_{g0} = t_{p0}, \quad \lambda_{gx} t_{g0}^\alpha \frac{\partial t_{g0}}{\partial \lambda} = \lambda_{px} t_{p0}^\gamma \frac{\partial t_{p0}}{\partial \lambda} + \sigma_0 \sigma_1 h_0 T_\infty^3 (t_{p0}^4 - 1), \quad (9)$$

для первых приближений

$$t_{g1} = t_{p1}, \lambda_{gx} t_{g0}^{\alpha} \left(\frac{\partial t_{g1}}{\partial \lambda} + \alpha \frac{t_{g1}}{t_{g0}} \frac{\partial t_{g0}}{\partial \lambda} \right) = \lambda_{px} t_{p0}^{\gamma} \left(\frac{\partial t_{p1}}{\partial \lambda} + \gamma \frac{t_{p1}}{t_{p0}} \frac{\partial t_{p0}}{\partial \lambda} \right) + 4\sigma_0 \sigma_1 h_0 T_x^3 t_{p0}^3 t_{p1}. \quad (10)$$

Общее решение уравнений (8) с учетом конечности физических величин (7) имеет вид:

$$t_g = t_{g0} + \xi t_{g1}, \quad t_p = t_{p0} + \xi t_{p1}, \quad (11)$$

где нулевые приближения по ξ :

$$t_{g0} = (H_0 + \Gamma_0 \operatorname{arccctg} \lambda)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (12)$$

$$t_{p0} = \left(B_0 + I_0 \operatorname{arccctg} \lambda + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \operatorname{arccctg} \lambda f_0 d\lambda - \operatorname{arccctg} \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} f_0 d\lambda \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}; \quad (13)$$

и первые приближения по ξ :

$$t_{g1} = \frac{\cos \eta}{(1+\alpha)t_{g0}^{\alpha}} \{ H_1 \lambda + \Gamma_1 (\lambda \operatorname{arccctg} \lambda - 1) \}, \quad (14)$$

$$t_{p1} = \frac{\cos \eta}{(1+\gamma)t_{p0}^{\gamma}} \left[B_1 \lambda - I_1 (\lambda \operatorname{arccctg} \lambda - 1) - \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda \operatorname{arccctg} \lambda - 1) f_1 d\lambda + \right. \\ \left. + (\lambda \operatorname{arccctg} \lambda - 1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda f_1 d\lambda \right]. \quad (15)$$

$$\text{Здесь } I_0 = \frac{1+\gamma}{4\pi c \lambda_{px} T_x} \int q_p dV, I_1 = \frac{3(1+\gamma)}{4\pi c^2 \lambda_{px} T_x} \int q_p z dV, f_0 = -\frac{1+\gamma}{2\lambda_{px} T_x} \int c^2 (\lambda^2 + x^2) q_p dx,$$

$$f_1 = -\frac{3(1+\gamma)}{2\lambda_{px} T_x} \int c^2 (\lambda^2 + x^2) q_p x dx, \quad h_0 = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{2\sqrt{1+\lambda_0^2}} \ln \frac{\sqrt{1+\lambda_0^2} + 1}{\sqrt{1+\lambda_0^2} - 1} \right),$$

$z = c\lambda x$, $x = \cos \eta$, $\lambda = \operatorname{sh} \varepsilon$, значение $\lambda = \lambda_0$ соответствует поверхности сфероида.

Постоянные интегрирования B_0 , B_1 , Γ_0 , Γ_1 и H_1 , входящие в (12) – (15), определяются из граничных условий (3) – (4). В частности:

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 0,$$

$$B_1 = \frac{(1+\gamma)t_{p0}^{\gamma}}{(1+\alpha)t_{g0}^{\alpha}} \Gamma_1 \left(\operatorname{arccctg} \lambda_0 - \frac{1}{\lambda_0} \right) + I_1 \left(\operatorname{arccctg} \lambda_0 - \frac{1}{\lambda_0} \right),$$

$$\Gamma_1 = \frac{1+\alpha}{1+\gamma} \frac{t_{g0}^{\alpha}}{t_{p0}^{\gamma}} \frac{I_1}{\lambda_0 (1+\lambda_0^2) \Delta},$$

где

$$\Delta = (1-\delta) \operatorname{arccctg} \lambda_0 + \delta \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_0} + \frac{4\sigma_0 \sigma_1 h_0 T_x^3 t_{p0}^3}{\lambda_{px} t_{p0}^{\gamma}} (\lambda_0 \operatorname{arccctg} \lambda_0 - 1),$$

$$\delta = \frac{\lambda_{gx} t_{g0}^{\alpha}}{\lambda_{px} t_{p0}^{\gamma}} = \frac{\lambda_{gx}}{\lambda_{px}}.$$

Зная, поля температуры вне и внутри неравномерно нагретого сфероида можно найти фотофоретическую силу и скорость.

В [2] показано, что распределение скоростей имеет вид:

$$U_z(\varepsilon, \eta) = \frac{U_\infty}{c \operatorname{ch} \varepsilon H_z} [A_1 G_1(\lambda) + A_2 G_2(\lambda) + c^2 G_3(\lambda)] \cos \eta,$$

$$U_\eta(\varepsilon, \eta) = -\frac{U_\infty}{2c H_z} [A_1 G_4(\lambda) + A_2 G_5(\lambda) + c^2 G_6(\lambda)] \sin \eta.$$

Вид функций G_i приведен в [2]. Сила, действующая на сфероид, определяемая интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы [1]:

$$\mathbf{F} = -4\pi \frac{\mu_g U_\infty}{c} A_2 \mathbf{n}_z$$

Определяя A_2 из граничных условий на поверхности частицы находим, что полная сила F , действующей на сфероидальную частицу, нагреваемой внутренними источниками тепла q_p , аддитивно складывается из силы вязкого сопротивления среды F_u и фотофоретической силы F_{ph} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_u + \xi_3 \mathbf{F}_{ph}, \tag{16}$$

где

$$\mathbf{F}_u = 4\pi \mu_\infty U_\infty c \frac{G_1' G_3 - G_1 G_3'}{G_1' G_2 - G_1 G_2'} \mathbf{n}_z, \tag{17}$$

$$\mathbf{F}_{ph} = 6\mu_\infty K_\alpha \frac{v_g}{t_{g0}} \frac{G_1}{G_1' G_2 - G_1 G_2'} \frac{(\lambda_0 \operatorname{arccctg} \lambda_0 - 1)}{c^2 \lambda_{px} T_\infty \lambda_0 (1 + \lambda_0^2) \Delta} \int_V q_p z dV \cdot \mathbf{n}_z. \tag{18}$$

Приравнивая полную силу (16) к нулю, получаем следующее выражение для фотофоретической скорости твердой нагретой сфероидальной частицы в вязкой газообразной среде:

$$\mathbf{U}_{ph} = \xi_3 K_\alpha \frac{v_g}{t_{g0}} \frac{2G_1}{G_2 G_1' - G_1 G_2'} \frac{3(\lambda_0 \operatorname{arccctg} \lambda_0 - 1)}{4\pi c^3 \lambda_{px} T_\infty \lambda_0 (1 + \lambda_0^2) \Delta} \int_V q_p z dV \mathbf{n}_z, \tag{19}$$

Значения функция $G_1 - G_3$, входящих в выражения (17) – (19) берутся при средней температуре поверхности частицы t_s , которая связана с распределением плотности тепловых источников q_p соотношением

$$\frac{t_s^{1+\alpha} - 1}{\operatorname{arccctg} \lambda_0} - (t_s^4 - 1) \frac{1+\alpha}{\lambda_{px}} (1 + \lambda_0^2) h_0 \sigma_0 \sigma_1 T_\infty^3 = \frac{1+\alpha}{4\pi c \lambda_{gx} T_\infty} \int_V q_p dV.$$

Численные расчеты показали, что нагрев поверхности оказывает существенное влияние на силу и скорость фотофореза, при этом роль формы частицы (отношения полуосей сфероида) становится ощутимой лишь, когда она значительно отличается от сферической. На рис. 1 приведены кривые, построенные для случая, когда частица поглощает электромагнитное излучение интенсивностью I как абсолютно черное тело.

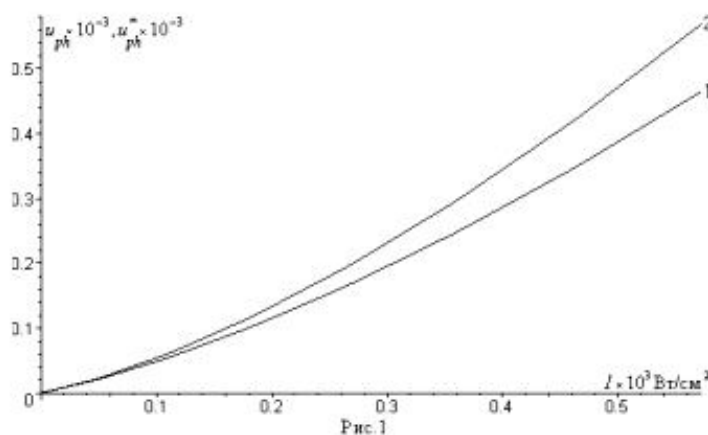


Рис. 1. Зависимость u_{ph} (кривая 1) и u_{ph}^* (кривая 2) от интенсивности падающего излучения для медной частицы в воздухе ($b/a = 0,75$)

В этом случае

$$q_p(\varepsilon, \eta) = \begin{cases} -\frac{\operatorname{ch} \varepsilon \cos \eta}{c(\operatorname{ch}^2 \varepsilon - \sin^2 \eta)} I & , \pi/2 \leq \eta \leq \pi, \quad \varepsilon_0 - \delta\varepsilon \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0; \\ 0 & 0 \leq \eta \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$\int_V q_p dV = \pi a^2 I \quad \text{и} \quad \int_V q_p z dV = -\frac{2}{3} \pi I a^2 b$$

Кривая 2 соответствует оценке величины u_{ph} по формуле, полученной для случая малых относительных перепадов температуры, в которой значения коэффициентов молекулярного переноса брались при средней температуре поверхности сфероида. Как видно из рисунка она дает завышенный результат. При сравнительно малой интенсивности падающего излучения нагрев поверхности частицы незначителен и кривые u_{ph} и u_{ph}^* совпадают.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. – 736 с.
2. Малай Н.В., Плесканев А.А. Применение обобщенных степенных рядов для получения точного решения линеаризованного уравнения Навье-Стокса с учетом сжимаемости газообразной среды и зависимости коэффициентов молекулярного переноса от температуры // Деп. в ВИНТИ. 2006. № 1053-В2006.

PHOTOPHORESIS OF LARGE AEROSOL SPHEROIDAL PARTICLE TAKING INTO ACCOUNT NONLINEAR MEDIUM CHARACTERISTICS

A.A. Pleskanev

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia
pleskanev@bsu.edu.ru

The nascent motion of large spheroidal particle in the presence of inhomogeneous heating internal heat sources of particle surface is considered. Assume that, heat sources distribution function is known. The gaseous medium is viscous and molecular transport coefficients are functions of temperature.

Key words: heating spheroidal particle, distribution function, transport coefficients.