

## К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ НА ФОТОФОРЕЗ ТВЕРДОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Н.В. Малай, Н.Н. Миронова

Белгородский государственный университет, 308007, г. Белгород, ул. Студенческая 14,  
e-mail: malay@bsu.edu.ru, mironovanadya@mail.ru

Рассмотрено влияние движения среды на фотофорез крупной аэрозольной частицы сфероидальной формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности.

**Ключевые слова:** фотофорез, аэрозольная частица, сфероид, движение среды.

### Введение

Известно, что твердая частица, взвешенная в термодинамически неравновесной газообразной среде, начинает двигаться. Причина такого движения может быть связана, в частности, с появлением градиента температуры вдоль поверхности частицы. В данной работе рассматривается случай, когда градиент температуры обусловлен неравномерным нагревом поверхности частицы за счет поглощения электромагнитного излучения. Такое движение в литературе называется фотофоретическим [1-3]. Фотофорез может играть существенную роль в атмосферных процессах; очистке промышленных газов от аэрозольных частиц; создании установок, предназначенных для селективного разделения частиц по размерам и т.д.

Механизм фотофореза можно кратко описать следующим образом. При взаимодействии электромагнитного излучения с частицей, внутри ее происходит выделение тепловой энергии, с некоторой объемной плотностью  $q_p$ , которые неоднородно нагревают частицу. Молекулы газа, окружающие частицу, после соударения с ее поверхностью отражаются от нагретой стороны частицы с большей скоростью, чем от холодной. В результате частица приобретает нескомпенсированный импульс, направленный от горячей стороны частицы к холодной. В зависимости от размеров и оптических свойств материала частицы более горячей сможет оказаться как освещенная, так и теневая сторона частицы. Поэтому имеет место как положительный (движение частицы в направлении излучения), так и отрицательный фотофорез. Кроме того, если поток излучения неоднороден по сечению, то может возникнуть поперечное относительно направления распространения электромагнитного излучения движение частицы в газе [4].

Многие частицы, встречающиеся в промышленных установках и природе, имеют форму поверхности отличную от сферической, например, сфероидальную. В опубликованных до настоящего времени работах по теории фотофоретического движения сфероидальных частиц (см. [5-6]) не учитывалось влияние конвективных членов теплопроводности (движения среды) на фотофорез. Озеен [7], Праудмен и Пирсон [8] для гидродинамической задачи, а Акривос и Тейлор [9] – для тепловой задачи показали, что вдали от частицы инерционные и конвективные члены становятся одного порядка с членами молекулярного переноса и поэтому обычный метод разложения по малому параметру дает известную погрешность, поскольку уже во втором приближении не позволяет строго удовлетворить граничным условиям на бесконечности и получить точное единое решение, однородно справедливое для всей области течения. В данной работе, используя метод сращиваемых асимптотических разложений, проводится оценка этого влияния.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим твердую аэрозольную частицу сфероидальной формы, взвешенную в газе с температурой  $T_\infty$ , плотностью  $\rho_g$  и вязкостью  $\mu_g$ . Здесь и далее индексы «g» и



« $p$ » будем относить соответственно к газообразной среде и частице; индексом « $\infty$ » — обозначены параметры газообразной среды на бесконечности, т.е. вдали от частицы и индексом « $S$ » — значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности частицы  $T_S$ . На частицу падает электромагнитное излучение, которое неоднородно нагревает её поверхность. Газ, взаимодействуя с неоднородно нагретой поверхностью, начинает двигаться вдоль поверхности в направлении возрастания температуры. Это явление называется тепловым скольжением газа. Механизм этого явления по своей физической природе аналогичен термофорезу, см. [10-11]. Тепловое скольжение вызывает появление фотофоретической силы. Под действием фотофоретической силы и силы вязкого сопротивления среды, частица начинает двигаться равномерно. Скорость равномерного движения частицы называют фотофоретической скоростью ( $U_{ph}$ ).

При теоретическом описании процесса фотофоретического движения частицы будем предполагать, что в силу малости времени тепловой релаксации процесс теплопереноса в системе частица – газообразная среда протекает квазистационарно. Движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса, и при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, т.е. когда  $(T_S - T_\infty)/T_\infty \ll 1$ , где  $T_\infty$  – температура газа на большом расстоянии от частицы. При выполнении этого условия коэффициенты теплопроводности, динамической и кинематической вязкости можно считать постоянными величинами. Задача решается гидродинамическим методом, т.е. решаются уравнения гидродинамики с соответствующими граничными условиями и считается, что фазовый переход отсутствует, частица однородна по своему составу и крупная. Для классификации аэрозольных частиц по размерам применяют критерий Кнудсена  $Kn = \lambda / R$ , где  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега молекул газообразной смеси,  $R$  – линейный размер частицы. Частицы называются крупными, если  $Kn \leq 0.01$ , умеренно крупными при  $0.01 \leq Kn \leq 0.3$  и мелкими при  $Kn \gg 1$ .

Падающее на частицу электромагнитное излучение поглощается частицей и распределяется по её объёму. В результате внутри частицы возникают источники тепловой энергии с плотностью  $q_p$ . Удобно ввести систему отсчета, связанную с центром масс движущейся частицы, а ось  $OZ$  ориентирована по направлению распространения однородного потока излучения (задача в этом случае сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком со скоростью  $U_\infty$ . Определенная в такой системе координат скорость газа на бесконечности, равна с обратным знаком величине скорости фотофореза,  $U_{ph} = -U_\infty$ ). Описание обтекания будем проводить в сферической системе координат  $(\varepsilon, \eta, \varphi)$ . Криволинейные координаты  $\varepsilon, \eta, \varphi$  связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями [12]:

$$x = c \operatorname{ch} \varepsilon \sin \eta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{ch} \varepsilon \sin \eta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{sh} \varepsilon \cos \eta, \quad (1.1)$$

$$x = c \operatorname{sh} \varepsilon \sin \eta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sh} \varepsilon \sin \eta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{ch} \varepsilon \cos \eta, \quad (1.2)$$

где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  в случае сплюснутого сфероида ( $a > b$ , формула (1.1)) и  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$  – в случае вытянутого сфероида ( $a < b$ , формула (1.2));  $a$  и  $b$  полуоси сфероида. При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, чтобы начало координат располагалось в центре сфероида, а ось  $OZ$  совпадала с осью симметрии сфероида.

В рамках сформулированных допущений распределение скорости  $U_g$ , давления  $P_g$  и температур  $T_g$  и  $T_p$  описываются следующей системой уравнений [13]:

$$\begin{aligned} \nabla P_g &= \mu_g \Delta U_g, \quad \operatorname{div} U_g = 0, \\ \rho_g c_{pg} (U_g \cdot \nabla) T_g &= \lambda_g \Delta T_g, \quad \Delta T_p = -q_p / \lambda_p \end{aligned} \quad (1.3)$$



Система уравнений (1.3) решалась со следующими граничными условиями в системе координат сплюснутого сфероида:

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad U_\varepsilon = 0, \quad U_\eta = K_{TS} \frac{v_g}{T_g} (\nabla T_g \cdot e_\eta),$$

$$T_g = T_p, \quad \lambda_g (\nabla T_g \cdot e_\varepsilon) = \lambda_p (\nabla T_p \cdot e_\varepsilon); \quad (1.4)$$

$$\varepsilon \rightarrow \infty, \quad U_\varepsilon = U_\infty \cos \eta, \quad U_\eta = -U_\infty \sin \eta, \quad T_g \rightarrow T_\infty, \quad P_g \rightarrow P_\infty; \quad (1.5)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad T_p \neq \infty. \quad (1.6)$$

Здесь  $U_\varepsilon, U_\eta$  – компоненты массовой скорости газа  $U_g$ ,  $e_\varepsilon, e_\eta$  – единичные векторы в сфероидальной системе координат;  $c_{pg}$  – теплоемкость при постоянном давлении;  $\nu_g, \mu_g$  – коэффициенты кинематической и динамической вязкости газа;  $\lambda_g, \lambda_p$  – коэффициенты теплопроводности газообразной среды и частицы соответственно;  $U_\infty = |U_\infty|$ ;  $K_{TS}$  – коэффициент теплового скольжения, выражение для которого определяется методами кинетической теории. При коэффициентах аккомодации тангенциального импульса и энергии, равных единице, газокинетический коэффициент (случай сферической частицы)  $K_{TS} \approx 1.152$  [10,11].

В граничных условиях (1.4) на поверхности частицы учтено: условие непроницаемости для нормальной и тепловое скольжение для касательной компонент массовой скорости, равенство температур и непрерывность потоков тепла. Поверхности частицы соответствует координатная поверхность  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . На большом расстоянии от частицы справедливы граничные условия (1.5), а конечность физических величин, характеризующих частицу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , учтено в (1.6).

Обезразмерим уравнение (1.3) и граничные условия (1.4)-(1.6), введя безразмерные координаты, температуру и скорость следующим образом:

$$y_k = \frac{x_k}{a}, \quad t = \frac{T}{T_\infty}, \quad V = \frac{U}{U_\infty}.$$

При  $Re = (\rho_g U_\infty a) / \mu_g \ll 1$  набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений гидродинамики следует искать в виде:

$$V_g = V_{g0} + Re V_{g1} + \dots, \quad P_g = P_{g0} + Re P_{g1} + \dots \quad (1.7)$$

Решение уравнения, описывающего распределение температуры вне частицы, будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений [14, 15]. Внутренние и внешние асимптотические разложения обезразмеренной температуры ищем в виде:

$$t_g(\varepsilon, \eta) = t_{g0}(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(Re) t_{gn}(\varepsilon, \eta), \quad (1.8)$$

$$t_g^*(\xi, \eta) = t_{g0}^*(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(Re) t_{gn}^*(\xi, \eta) \quad (1.9)$$

где  $\xi = Re \lambda$  – «сжатая» радиальная координата [14],  $\lambda = sh \varepsilon$ . При этом требуется, чтобы:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \rightarrow 0, \quad \frac{f_{n+1}^*}{f_n^*} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad Re \rightarrow 0$$

Недостающие граничные условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого в некоторую промежуточную область

$$t_g(\varepsilon \rightarrow \infty, \eta) = t_g^*(\xi \rightarrow 0, \eta) \quad (1.10)$$

Асимптотическое разложение решения внутри частицы, как показывают граничные условия на поверхности сфероида (1.4), следует искать в виде, аналогичном (1.8):

$$t_p(\varepsilon, \eta) = t_{p0}(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\text{Re}) t_{pn}(\varepsilon, \eta), \quad (1.11)$$

Относительно функций  $f_n(\text{Re})$  и  $f_n^*(\text{Re})$  предполагается лишь, что порядок их малости по  $\text{Re}$  увеличивается с ростом  $n$ .

С учетом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнение для температуры  $t_g^*$ :

$$\frac{\text{Pr}}{a} (V_g^* \cdot \nabla^*) t_g^* = \Delta^* t_g^*, \quad t_g^* \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty \quad (1.12)$$

$$V_g^*(\xi, \eta) = n_z + \text{Re} V_g^*(\xi, \eta) + \dots$$

Здесь  $\Delta = \Delta^*(\xi, \eta)$  – оператор Лапласа, полученный из  $\Delta$  заменой  $\lambda$  на  $\xi$ ;  $V_g^* = V_g^*(\xi, \eta)$ ;  $t_g^* = t_g^*(\xi, \eta)$ ;  $\text{Pr} = \mu_{\infty} c_{pg} / \lambda_g$  – число Прандтля;  $n_z$  – единичный вектор в направлении оси  $OZ$ .

Вид граничных условий (1.5) указывает на то, что решение в нулевом приближении для компонент массовой скорости следует искать в виде:

$$V_{\varepsilon}(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{c \text{ch} \varepsilon H_{\varepsilon}} G(\varepsilon) \cos \eta, \quad V_{\eta}(\varepsilon, \eta) = -\frac{1}{c H_{\varepsilon}} g(\varepsilon) \sin \eta \quad (1.13)$$

где  $G(\varepsilon)$ ,  $g(\varepsilon)$  – произвольные функции, зависящие от безразмерной радиальной координаты  $\varepsilon$ ,  $H_{\varepsilon} = c \sqrt{\text{ch}^2 \varepsilon - \sin^2 \eta}$  – коэффициент Ламэ.

## 2. Распределение температуры в окрестности сфероидальной частицы

При нахождении силы и скорости фотофореза ограничимся поправками первого порядка малости. Чтобы их найти, нужно знать поля температур вне и внутри частицы. Для этого необходимо решить уравнения (1.3) с соответствующими граничными условиями.

Построение решения начинается с определения нулевого члена внешнего разложения (1.9). В данном случае, очевидно, задаче удовлетворяет решение:

$$t_{g0}^* = 1 \quad (2.1)$$

Найдем нулевой член внутреннего разложения (1.8). Он удовлетворяет уравнению:

$$\Delta t_{g0} = 0 \quad (2.2)$$

с граничными условиями

$$t_{g0} = t_{p0}, \quad \lambda_g \frac{\partial t_{g0}}{\partial \varepsilon} = \lambda_p \frac{\partial t_{p0}}{\partial \varepsilon} \quad \text{при} \quad \varepsilon = \varepsilon_0. \quad (2.3)$$

Общее решение уравнения (2.3) имеет вид:

$$t_{g0} = \sum_{n=0}^{\infty} (Y_n P_n(\lambda) + L_n Q_n(\lambda)) \cdot P_n(\cos \eta) \quad (2.4)$$

здесь  $Y_n$ ,  $L_n$  – постоянные интегрирования,  $P_n$ ,  $Q_n$  – полиномы Лежандра первого и второго рода соответственно. Постоянные интегрирования  $Y_n$ ,  $L_n$  определяются из условия срашивания, для которого, внешнее решение должно быть разложено в ряд по  $\xi$ . Затем значения констант устанавливаются из требования соответствия поведения



членов полученного ряда при  $\xi \rightarrow 0$  и членов разложения (1.8) при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Для нулевых приближений сращивание тривиально, получаем  $Y_0 = 1$ ,  $Y_n = L_n = 0$  при  $n = 1, 2, \dots$ . Следовательно:

$$t_{g0} = 1 + L_0 \operatorname{arccctg} \lambda \quad (2.5)$$

При дальнейшем решении задачи нам необходимо знать поле температуры внутри частицы. Подставляя (1.11) в четвертое уравнение (1.3) получим следующее общее решение для  $t_p(\varepsilon, \eta)$ , удовлетворяющее условию конечности решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (отметим, что до первого приближения включительно, как будет показано ниже,  $f_0(\operatorname{Re}) = 1$ ,  $f_1(\operatorname{Re}) = \operatorname{Re}$ ):

$$t_p(\varepsilon, \eta) = t_{p0}(\varepsilon) + \operatorname{Re} t_{p1}(\varepsilon, \eta), \quad (2.6)$$

$$\text{где } t_{p0}(\lambda) = M_0 + N_0 \operatorname{arccctg} \lambda - \int_{\lambda_0}^{\lambda} W_0 \operatorname{arccctg} \lambda d\lambda + \operatorname{arccctg} \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} W_0 d\lambda, \quad (2.7)$$

$$t_{p1} = \cos \eta \left( M_1 c \lambda + N_1 (1 - \lambda \operatorname{arccctg} \lambda) + \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda \operatorname{arccctg} \lambda - 1) W_1 d\lambda - (\lambda \operatorname{arccctg} \lambda - 1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda W_1 d\lambda \right).$$

Здесь,  $\lambda = sh \varepsilon$ ,  $x = \cos \eta$ ,  $\lambda_0 = sh \varepsilon_0$ ,  $N_0 = \frac{1}{4\pi c \lambda_p T_\infty} \int_V q_p dV$ ,  $N_1 = \frac{3}{4\pi c^2 \lambda_p T_\infty} J$ ,

$J = \int_V q_p z dV$  – дипольный момент плотности тепловых источников,  $z = c \lambda x$ ,

$$W_n = \frac{2n+1}{2\lambda_p T_\infty} \int_{-1}^1 c^2 q_p (\lambda^2 + x^2) P_n(x) dx \quad (n \geq 0). \quad (2.8)$$

В формулах (2.8) интегрирование ведется по всему объему частицы.

Поскольку поле температуры внутри неравномерно нагретой частицы определено, мы можем найти постоянные интегрирования  $L_0$ ,  $M_0$ . Константы  $L_0$ ,  $M_0$ , входящие в (2.5) и (2.7), находим из граничных условий на поверхности частицы (2.3). В нашем случае они принимают вид:

$$L_0 = \gamma \lambda_0, \quad M_0 = 1 + \left( 1 - \frac{\lambda_g}{\lambda_p} \right) \gamma \lambda_0 \operatorname{arccctg} \lambda_0 \quad (2.9)$$

Здесь  $\gamma = t_S - 1$  – безразмерный параметр, характеризующий нагрев поверхности сфероиды;  $t_S = T_S / T_\infty$ ,  $T_S$  – средняя температура поверхности сфероиды, определяемая формулой:

$$\frac{T_S}{T_\infty} = 1 + \frac{1}{4\pi c \lambda_0 \lambda_g T_\infty} \int_V q_p dV \quad (2.10)$$

В (2.10) интегрирование ведется по всему объему частицы.

Для членов первого приближения внешнего разложения из (1.9) и (2.1) имеем:

$$t_g^*(\xi, \eta) = 1 + f_1^*(\operatorname{Re}) t_{g1}^*(\xi, \eta).$$

Видно, что для нахождения первого приближения для внешнего разложения необходимо сначала определить явный вид коэффициента  $f_1^*(\operatorname{Re})$ . Для этого в решении (2.5) перейдем к внешней переменной  $\xi$ . Тогда из (2.5) следует, что  $f_1^*(\operatorname{Re}) = \operatorname{Re}$ . Таким образом, получаем:

$$t_{g1}^*(\xi, \eta) = 1 + \operatorname{Re} t_{g1}^*(\xi, \eta) \quad (2.11)$$

Подставляя (22) в (10) и удерживая члены порядка  $\operatorname{Re}$  получим:

$$\Delta^* t_{g1}^* - \frac{\operatorname{Pr} c}{a H_\varepsilon^2} \left[ x(1 + \xi^2) \frac{\partial t_{g1}^*}{\partial \xi} + \xi(1 - x^2) \frac{\partial t_{g1}^*}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.12)$$

С помощью замены  $t_{g1}^* = \Phi(\xi, x) \cdot \exp\left(\frac{\operatorname{Pr} c}{2a} \xi x\right)$  уравнение (2.12) сводится к уравнению Гельмгольца, решением которого являются сплюснутые радиальные сфероидальные функции вида  $R\left(i \frac{\operatorname{Pr} c}{2a}, i \xi\right)$ , выражающиеся через модифицированные функции Бесселя второго рода  $K_{n+\frac{1}{2}}, I_{n+\frac{1}{2}}$ . Но для удовлетворения граничным условиям на бесконечности будем использовать представление сфероидальной функции через  $K_{n+\frac{1}{2}}$ .

Таким образом, общее решение уравнения (2.12) имеет вид:

$$t_{g1}^* = R\left(i \frac{\operatorname{Pr} c}{2a}, i \xi\right) \cdot \exp\left(\frac{\operatorname{Pr} c}{2a} \xi x\right) \quad (2.13)$$

$$R\left(i \frac{\operatorname{Pr} c}{2a}, i \xi\right) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi a}{\operatorname{Pr} c \xi}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n i^n \exp\left(-i \pi \frac{n+3/2}{2}\right) K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\operatorname{Pr} c \xi}{2a}\right)$$

$$K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\operatorname{Pr} c \xi}{2a}\right) = \sqrt{\frac{\pi a}{\operatorname{Pr} c \xi}} \exp\left(-\frac{\operatorname{Pr} c \xi}{2a}\right) \sum_{m=0}^n \frac{(m+n)! a^m}{(n-m)! m! (\operatorname{Pr} c \xi)^m}$$

Здесь  $R\left(i \frac{\operatorname{Pr} c}{2a}, i \xi\right)$  – сплюснутая радиальная сфероидальная функция [16],

$K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\operatorname{Pr} c \xi}{2a}\right)$  – модифицированная функция Бесселя [17]. Произвольные постоянные

интегрирования  $d_n$  должны быть определены в результате сращивания, которое в данном случае заключается в сравнении поведения функции (2.13) при  $\xi \rightarrow 0$  и функции

(2.5) при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Нетрудно установить, что  $d_0 = \frac{\operatorname{Pr} \gamma c \lambda_0}{a \sqrt{2}}$ ,  $d_n = 0$  при  $n = 1, 2, \dots$ . Следовательно:

$$t_{g1}^* = \frac{\gamma \lambda_0}{\xi} \exp\left\{\frac{c \operatorname{Pr}}{2a} \xi(x-1)\right\} \quad (2.14)$$

Найдем первое приближение для внутреннего разложения. Из (2.14) видно, что  $f_1(\operatorname{Re}) = \operatorname{Re}$ . Таким образом, имеем двучленное внутреннее разложение:

$$t_g(\varepsilon, \eta) = t_{g0}(\varepsilon) + \operatorname{Re} t_{g1}(\varepsilon, \eta) \quad (2.15)$$

Для  $t_{g0}, t_{g1}$  в двучленном внутреннем разложении получаем из (1.3) следующую задачу:

$$\frac{\operatorname{Pr}}{a} V_\varepsilon \frac{1}{H_\varepsilon} \frac{\partial t_{g0}}{\partial \varepsilon} = \Delta t_{g1} \quad (2.16)$$



$$t_{p1} = \cos \eta \left( M_1 c \lambda + N_1 (1 - \lambda \operatorname{arccctg} \lambda) + \lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda \operatorname{arccctg} \lambda - 1) W_1 d\lambda - (\lambda \operatorname{arccctg} \lambda - 1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda W_1 d\lambda \right) \quad (2.17)$$

с граничными условиями

$$t_{g1} = t_{p1}, \quad \lambda_g \frac{\partial t_{g1}}{\partial \varepsilon} = \lambda_p \frac{\partial t_{p1}}{\partial \varepsilon} \quad \text{при } \varepsilon = \varepsilon_0. \quad (2.18)$$

Чтобы определить поведение  $t_{g1}(\infty, \eta)$ , сравним двучленные внутреннее и внешнее разложения:

$$t_g(\varepsilon, \eta) = t_{g0}(\varepsilon) + \operatorname{Re} t_{g1}(\varepsilon, \eta), \quad t_{g1}^*(\xi, \eta) = 1 + \operatorname{Re} \frac{\gamma \lambda_0}{\xi} \exp \left\{ \frac{c \operatorname{Pr}}{2a} \xi (x-1) \right\}$$

в результате имеем:

$$t_{g1}(\infty, \eta) = \operatorname{Pr} \frac{c \lambda_0 \gamma}{2a} (\cos \eta - 1) \quad (2.19)$$

Из (2.16) видим, что для нахождения  $t_{g1}$  необходимо сначала определить поле скорости, т. е. решить гидродинамическую задачу.

### 3. Определение фотофоретической силы и скорости

Общее решение уравнений гидродинамики, удовлетворяющих конечности при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  имеет вид [12]:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(\varepsilon, \eta) &= \frac{U_\infty}{c \operatorname{ch} \varepsilon H_\varepsilon} \cos \eta \left\{ \lambda A_2 + [\lambda - (1 + \lambda^2) \operatorname{arccctg} \lambda] A_1 + c^2 (1 + \lambda^2) \right\}, \\ U_\eta(\varepsilon, \eta) &= -\frac{U_\infty}{c H_\varepsilon} \sin \eta \left\{ \frac{A_2}{\lambda} + [1 - \lambda \operatorname{arccctg} \lambda] A_1 + c^2 \lambda \right\}, \\ P_g(\varepsilon, \eta) &= P_\infty + c \frac{\mu_g U_\infty}{H_\varepsilon^4} x (\lambda^2 + x^2) A_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

С учетом (3.1), получаем следующее уравнение для  $t_{g1}$ :

$$\Delta t_{g1} = -\frac{\beta x}{(1 + \lambda^2) H_\varepsilon^2} G(\lambda) \quad (3.2)$$

где  $G(\lambda) = \lambda A_2 + [\lambda - (1 + \lambda^2) \operatorname{arccctg} \lambda] A_1 + c^2 (1 + \lambda^2)$ ,  $\beta = \frac{\operatorname{Pr} \gamma \lambda_0}{ac}$ .

Решение для  $t_{g1}$  ищем в виде:

$$t_{g1} = k(\lambda) + f(\lambda) \cos \eta \quad (3.3)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} k(\lambda) &\rightarrow -\operatorname{Pr} \frac{c \lambda_0 \gamma}{2a}, \quad f(\lambda) \rightarrow \operatorname{Pr} \frac{c \lambda_0 \gamma}{2a} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty \\ k(\lambda) &= 0, \quad f(\lambda) = \operatorname{const} \quad \text{при } \lambda = \lambda_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (3.2) видим, что  $k(\lambda)$  принимает вид:

$$k(\lambda) = -\operatorname{Pr} \frac{\gamma \lambda_0 c}{2a} \left( 1 - \frac{\operatorname{arccctg} \lambda}{\operatorname{arccctg} \lambda_0} \right),$$

а  $f(\lambda)$  удовлетворяет уравнению:

$$(1 + \lambda^2) \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} + 2\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} - 2f = -\beta \frac{G(\lambda)}{1 + \lambda^2} \quad (3.5)$$

Общее решение уравнения (3.5), удовлетворяющее краевым условиям (3.4), имеет вид:

$$t_{g1} = -\frac{\text{Pr} \gamma \lambda_0 c}{2a} \left( 1 - \frac{\text{arcctg} \lambda}{\text{arcctg} \lambda_0} \right) + \cos \eta \left( (\lambda \text{arcctg} \lambda - 1) C_3 + \right. \\ \left. + \beta \left\{ A_2 \left[ \text{arcctg} \lambda - \frac{\lambda}{2} \text{arcctg}^2 \lambda \right] + \frac{A_1}{2} \left[ \text{arcctg} \lambda - \lambda \text{arcctg}^2 \lambda \right] + \frac{c^2}{2} \lambda \text{arcctg} \lambda \right\} \right) \quad (3.6)$$

Для определения постоянных интегрирования в (3.6) и (2.17), воспользуемся граничными условиями на поверхности частицы (2.18). В результате получаем:

$$C_3 = -\frac{1}{\Delta} \left\{ -N_1 \frac{1}{1 + \lambda_0^2} + \beta \left[ A_2 \left( \frac{\delta}{1 + \lambda_0^2} \left( 1 - \frac{\lambda_0}{2} \text{arcctg} \lambda_0 \right) - \frac{\Delta}{2} \text{arcctg} \lambda_0 + \frac{1}{2\lambda_0} \text{arcctg} \lambda_0 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A_1}{2} \left( \frac{\delta}{1 + \lambda_0^2} (1 - \lambda_0 \text{arcctg} \lambda_0) - \Delta \right) + \frac{c^2}{2} \left( \Delta + \frac{1}{\lambda_0} \right) \right] \right\}, \\ M_1 = -\frac{N_1 + C_3}{c} \left( \frac{1}{\lambda_0} - \text{arcctg} \lambda_0 \right) + \frac{\beta}{c \lambda_0} \left[ A_2 \left( \text{arcctg} \lambda_0 - \frac{\lambda_0}{2} \text{arcctg}^2 \lambda_0 \right) + \right. \\ \left. + \frac{A_1}{2} \left( \text{arcctg} \lambda_0 - \lambda_0 \text{arcctg}^2 \lambda_0 \right) + \frac{c^2}{2} \lambda_0 \text{arcctg} \lambda_0 \right],$$

где  $\Delta = (1 - \delta) \text{arcctg} \lambda_0 + \frac{\delta \lambda_0}{1 + \lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_0}$ ,  $\delta = \frac{\lambda_g}{\lambda_p}$ .

Таким образом в первом приближении по  $\varepsilon$  нами получены выражения для полей температур вне и внутри аэрозольной частицы. Следовательно, можно, используя граничные условия на поверхности частицы для компонентов скоростей, найти постоянные интегрирования  $A_1, A_2$ , входящие в выражения (3.1).

$$A_1 = -\frac{\lambda_0 A_2 + c^2 (1 + \lambda_0^2)}{\lambda_0 - (1 + \lambda_0^2) \text{arcctg} \lambda_0}, \\ A_2 = -\frac{2c^2}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \text{arcctg} \lambda_0} + \\ + K_{TS} \text{Re} \frac{c v_g}{U_\infty t_S} \frac{\lambda_0 - (1 + \lambda_0^2) \text{arcctg} \lambda_0}{\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \text{arcctg} \lambda_0} \frac{1 - \lambda_0 \text{arcctg} \lambda_0}{(1 + \lambda_0^2) \Delta} \left[ \frac{6}{4\pi c^2 \lambda_0 \lambda_p T_\infty} \int_V q_p z dV + \right. \\ \left. + \frac{\text{Pr} \gamma \lambda_0 \delta c}{a (\lambda_0 + (1 - \lambda_0^2) \text{arcctg} \lambda_0)} \left( \lambda_0 \text{arcctg} \lambda_0 + 3 - \frac{\text{arcctg}^2 \lambda_0}{1 - \lambda_0 \text{arcctg} \lambda_0} \right) \right]. \quad (3.7)$$

После их вычисления сила, действующая на сфероид, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности аэрозольной частицы и имеет вид:

$$F_z = -4\pi \frac{\mu_\infty U_\infty}{c} A_2 \quad (3.8)$$

С учетом коэффициента  $A_2$  видим, что общая сила, действующая на твердую крупную аэрозольную частицу сфероидальной формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, будет аддитивно складываться из силы вязкого



сопротивления среды  $F_\mu$ , фотофоретической силы  $F_{ph}$  пропорциональной дипольному моменту  $J$  и силы  $F_{dh}$ , обусловленной движением среды (т. е. учетом конвективных членов в уравнении теплопроводности).

$$F_z = F_\mu + \text{Re}(F_{ph} + F_{dh}), \quad (3.9)$$

$$\text{где } F_\mu = 6\pi a\mu_\infty U_\infty f_\mu n_z, \quad F_{ph} = -6\pi a\mu_\infty f_{ph} J n_z, \quad F_{dh} = -6\pi a\mu_\infty f_{dh} n_z \quad (3.10)$$

Значения коэффициентов  $f_\mu$ ,  $f_{dh}$  и  $f_{ph}$  могут быть оценены из следующих выражений:

$$f_\mu = \frac{4}{3\sqrt{1+\lambda_0^2}} \frac{1}{\lambda_0 + (1-\lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0}$$

$$f_{ph} = K_{TS} \frac{v_g}{\pi t_S \lambda_p T_\infty} \frac{\lambda_0 - (1+\lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0}{\lambda_0 + (1-\lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0} \frac{1-\lambda_0 \text{arcctg } \lambda_0}{a^3 \lambda_0 \Delta}$$

$$f_{dh} = K_{TS} \frac{v_g}{\pi t_S \lambda_p T_\infty} \frac{\lambda_0 - (1+\lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0}{\lambda_0 + (1-\lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0} \frac{1-\lambda_0 \text{arcctg } \lambda_0}{(1+\lambda_0^2)\Delta} \times$$

$$\times \frac{\text{Pr}}{6a^2 (\lambda_0 + (1-\lambda_0^2)\text{arcctg } \lambda_0)} \left( \lambda_0 \text{arcctg } \lambda_0 + 3 - \frac{\text{arcctg}^2 \lambda_0}{1-\lambda_0 \text{arcctg } \lambda_0} \right) \int_V q_p dV.$$

При оценке коэффициентов  $f_\mu$ ,  $f_{dh}$  и  $f_{ph}$  необходимо учитывать, что индексом  $S$  обозначены значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности сфероида, равной  $T_S$ , которая определяется по формуле (2.10).

Приравнивая общую силу к нулю, получаем выражение для величины скорости упорядоченного движения сфероидальной частицы:

$$U_{ph} = -\text{Re}(U_p + U_{dh}) \quad (3.11)$$

$$\text{Здесь } U_p = \frac{f_{ph}}{f_\mu} J n_z, \quad U_{dh} = \frac{f_{dh}}{f_\mu} J n_z$$

#### 4. Анализ полученных результатов

Формулы (3.10) – (3.11) позволяют оценить влияние движения среды, т.е. учет конвективных членов в уравнении теплопроводности на величины фотофоретической силы и скорости при малых относительных перепадах температуры в окрестности сфероидальной частицы.

Чтобы оценить, какой вклад движения среды оказывает на скорость фотофореза твердой крупной аэрозольной частицы сфероидальной формы, необходимо конкретизировать природу тепловых источников, неоднородно распределенных в ее объеме. В качестве примера рассмотрим простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело, т.е. нагрев частицы происходит в тонком слое толщиной  $\delta\varepsilon \ll \varepsilon_0$ . При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной  $\delta\varepsilon$  определяется с помощью формулы [18]:

$$q_p(\varepsilon, \eta) = \begin{cases} -\frac{ch\varepsilon \cos \eta}{c(ch^2\varepsilon - \sin^2 \eta)\delta\varepsilon} I_0, & \frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \pi, \quad \varepsilon_0 - \delta\varepsilon \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0; \\ 0, & 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

где  $I_0$  – интенсивность падающего излучения, связанная со средней температурой по-

верхности частицы  $T_S$  соотношением  $T_S = T_\infty + \frac{a\sqrt{1+\lambda_0^2}}{4\lambda_g} I_0 \operatorname{arccctg} \lambda_0$ .

В результате получаем следующие выражения для скорости фотофореза абсолютно черных твердых крупных аэрозольных частиц сфероидальной формы

$$U_{ph}^* = \operatorname{Re} f_{ph}^* n_z, \quad (4.1)$$

$$f_{ph}^* = \frac{b}{a} K_{TS} \frac{\nu_g I_0}{2t_S \lambda_p T_\infty} (\lambda_0 - (1 + \lambda_0^2) \operatorname{arccctg} \lambda_0) \frac{\sqrt{1 + \lambda_0^2}}{\Delta} \left( \frac{1}{\lambda_0} - \operatorname{arccctg} \lambda_0 \right) \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{\operatorname{Pr}}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_0^2} (\lambda_0 - (1 + \lambda_0^2) \operatorname{arccctg} \lambda_0)} \left( \lambda_0 \operatorname{arccctg} \lambda_0 + 3 - \frac{\operatorname{arccctg}^2 \lambda_0}{1 - \lambda_0 \operatorname{arccctg} \lambda_0} \right) \right]$$

$$f_{ph}^{**} = \frac{b}{a} K_{TS} \frac{\nu_g I_0}{2t_S \lambda_p T_\infty} (\lambda_0 - (1 + \lambda_0^2) \operatorname{arccctg} \lambda_0) \frac{\sqrt{1 + \lambda_0^2}}{\Delta} \left( \frac{1}{\lambda_0} - \operatorname{arccctg} \lambda_0 \right)$$

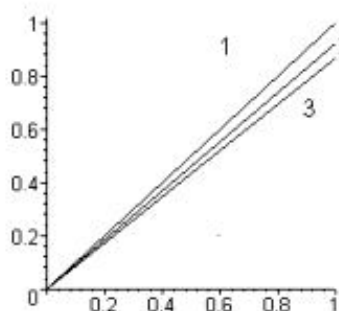


рис. 1

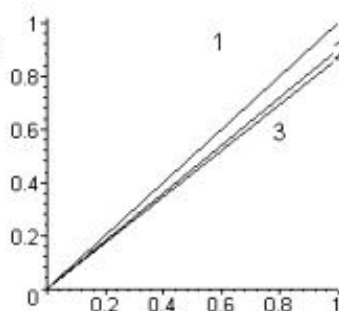


рис. 2

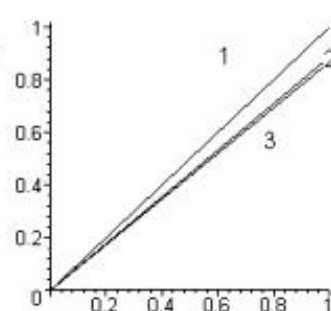


рис. 3

Зависимость функций  $f_{ph}^*/f_{ph}^{**} \Big|_{T_\infty=300K}$  от интенсивности падающего излучения при отношении полуосей  $b/a = 0.2$  (рис. 1),  $b/a = 0.5$  (рис. 2),  $b/a = 0.7$  (рис. 3).  $I_0$ , Вт/см<sup>2</sup>.

Для иллюстрации вклада движения среды и отношения полуосей сфероида в скорость фотофореза (4.1), на рисунках приведены кривые, связывающие значения  $f_{ph}^*/f_{ph}^{**} \Big|_{T_\infty=300K}$  с интенсивностью падающего излучения для частиц борированного графита ( $\lambda_p = 55$  Вт/(м град)) со сферической (кривая 3) и сфероидальной (кривая 1 – без учета движения среды; кривая 2 – с учетом движения среды) формами поверхности, взвешенных в воздухе при  $T_\infty = 300K$  для различных отношений полуосей сфероида:  $b/a = 0.2$  (рис. 1),  $b/a = 0.5$  (рис. 2),  $b/a = 0.7$  (рис. 3).

### Заключение

Численный анализ показал, что при фиксированном отношении полуосей с увеличением интенсивности падающего излучения  $I_0$  вклад движения среды приводит к





монотонному уменьшению скорости фотофореза (см. рисунок) с относительной погрешностью около 12%.

#### Литература

1. Hidy G.M. and Vnock J.R. Photophoresis and the Descent of Particles into the Lower Stratosphere // *J. Geophys. Res.* 1967. V. 12. P. 455-460.
2. Кутуков В.Б., Шукин Е.Р., Яламов Ю.И. О фотофоретическом движении аэрозольной частицы в поле оптического излучения // *ЖТФ.* 1976. Т. 46. № 3. С. 626-627.
3. Lin S.P. On Photophoresis // *Coll. Inter. Sci.* 1975. V. 51. № 1. P. 66-74.
4. Кутуков В.Б., Яламов Ю.И. Нелинейные эффекты при распространении лазерного излучения в атмосфере. Томск. 1977. С. 145-147.
5. Бахтилов В.И., Шукин Е.Р., Яламов Ю.И. Теория термодиффузиофотофореза летучих крупных сфероидальных аэрозольных частиц // *Вопросы физики формообразования и фазовых превращений: Сборник / КГУ. Калинин.* 1982. С. 118-128.
6. Берковский Б.М., Краков М.С., Никифоров И.В., Полевиков В.К. Гидродинамическое сопротивление эллипсоидальной капли при малых числах Рейнольдса // *МКГ.* 1987. №3. С. 4-8.
7. Oseen C.W. *Hydrodynamik.* Leipzig. Akademische Verlag. 1927.
8. Praudman I., Pearson J.R.A. Expansion at small Reynolds Number for the Flow Past a Sphere and a Circular Cylinder // *J. Fluid. Mech.* 1957. V.2. P. 237-262/
9. Acrivos A., Taylor T.D. Head and Mass Transfer From Single Spheres in Stokes Flow // *J. Phys.* 1962. V.5. № 4. P. 387-394.
10. Баканов С.П., Ролдугин В.И. О двух методах построения теории термофореза крупных аэрозольных частиц // *Коллоид. журн.* 1977. Т. 39. № 6. С. 1027-1038
11. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц // *ЖТФ.* 1982. Т. 52. Вып. 11. С. 2253-2261.
12. Хаппель Дж, Бреннер Г. *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.* М.: Мир, 1976. 630 с.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика.* Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
14. Ван-Дайк М. *Методы возмущений в механике жидкости.* М.: Мир. 1967. С. 310.
15. Гупано Ю.П., Рязанцев Ю.С. О массе – и теплообмене сферической частицы в ламинарном потоке вязкой жидкости // *ПММ.* 1971. Т. 35. С. 255-265.
16. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Физ.-мат. лит-ры. 1961. 735 с.
17. Борен К., Хафмер Д. *Поглощение и рассеяние света малыми частицами.* М.: Мир, 1986.

#### AN INFLUENCE OF ENVIRONMENT'S MOVEMENT ON PHOTOPHORESIS OF THE FIRM AEROSOL PARTICLE OF THE SPHEROIDAL FORM

N.V. Malai, N.N. Mironova

The Belgorod state university, 308007, Belgorod, street. Student's 14,  
e-mail: malay@bsu.edu.ru, mironovanadya@mail.ru

Influence of an environment's movement on a photophoresis of a large aerosol particle's of the spheroidal form is considered at small relative temperature drops in its vicinity.

**Key words:** photophoresis, an aerosol particle, a spheroid, environment's movement.