УДК 621.396.01

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ, ИНТЕРПОЛЯЦИИ, ЭКСТРАПОЛЯЦИИ И ФИЛЬТРАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Е.Г. Жиляков, И.Г. Попов, И.И. Чижов

ВВЕДЕНИЕ

В подавляющем большинстве случаев регистрируется конечное множество значений сигналов как вещественнозначных функций времени (или другого аргумента) $f(t)$, то есть дальнейшей обработке доступны только некоторые числа $f(t_k)$, где $t_k, k = 0,..,n$,-набор значений аргумента, причём для определенности полагаем, что

$$t_0 = 0; t_n = T \ , \tag{1}$$

а большему индексу соответствует большее значение времени. Следуя общепринятой терминологии, зарегистрированное значение сигнала будем именовать отсчётом.

Таким образом, значения сигнала в другие моменты времени неизвестны. Вместе с тем очень часто в рамках решения конкретных прикладных задач возникает необходимость их восстановления (оценка), как в промежутках между отсчётами (задача интерполяции) так и вне интервала регистрации, когда имеет место $t \notin [0,T]$, то есть задача экстраполяции. Важное значение, особенно для задач управления, имеет оценка производной.

Достаточно широко рассматривается также задача целенаправленных изменений зарегистрированных значений сигнала, в результате которых определяются некоторые его составляющие, представляющие для решаемой прикладной задачи наибольший интерес, например тренд, или наоборот – отклонения от тренда. Именно в этом аспекте в данной работе рассматривается задача фильтрации.

В дальнейшем оценка (приближение) сигнала обозначается символом $\tilde{f}$, причём для задачи интерполяции должны иметь место равенства

$$\tilde{f}(t_k) = f(t_k), k = 0,..,n \, . \tag{2}$$

Для оценивания сигналов в определённых выше смыслах, особенно для решения задач интерполяции используются различные подходы. При этом основной мотив сводится к тому, что оценка сигнала либо его составляющих ищется в определенном классе функций, то есть имеет место

$$\tilde{f}(t) \in F \, , \tag{3}$$

где символ F обозначает используемый функциональный класс.

Таким образом, фундаментальное отличие упомянутых подходов заключается в классе приближающих функций. Очевидно, что для достижения наибольшей общности при задании класса F в (3) важно использовать максимально широкие ограничения, которые вместе с тем позволяют адекватно учесть реальные условия генерации сигналов.

Наибольшее распространение имеет полиномиальное приближение функций, что обусловлено рядом причин [1,2]. В настоящее время важное как теоретическое так и практическое значение приобрели сплайны, которые имеют по сравнению с простыми полиномами ряд существенных преимуществ[2], хотя и конструируются на их основе. Эти преимущества обусловлены различными экстремальными свойствами, которыми сплайны обладают.

В контексте данной работы наибольший интерес представляет то, что интерполирующие сплайны порядка 2m-1 среди всех m раз дифференцируемых и удовлетворяющих условиям (2) функций имеют на интервале (1) минимальную евклидову норму m-той производной[2].

Таким образом, дифференцируя интерполирующие сплайны, можно получать и наиболее устойчивые в указанном смысле оценки производных.

Вместе с тем, для практического использования интерполяционных сплайнов необходимо задавать граничные условия. Это затрудняет их применение, а результирующая приближающая функция будет зависеть от граничных условий, что до определённой степени не даёт однозначности (в отличие от полиномов).

В целом класс полиномов, включая сплайны, представляет собой некоторый формальный аппарат для решения задач интерполяции или выделения компонент сигналов (фильтрация, например с использованием принципа наименьших квадратов) в самой общей постановке, когда кроме отсчётов иные сведения о сигнале, вообще говоря, не используются.

Заметим также, что сплайн- интерполяция определяется только на интервале регистрации отсчётов сигнала, а области значений функций, полученных на основе полиномиальной интерполяции, за его пределами в большинстве случаев существенно отличаются от области значений отсчётов. Поэтому использовать этот аппарат для целей экстраполяции вряд ли возможно.

В настоящее время для интерполяции сигналов в радиотехнике и радиофизике достаточно часто используются целые функции, позволяющие получить так называемую интерполяционную формулу Котельникова [1]. Трансформанты Фурье получаемых при этом приближающих функций имеют финитные области определения (финитные спектры), размеры которых зависят от интервалов дискретизации сигналов по времени.

В тех случаях, когда анализируемые отсчёты порождены сигналом с финитным спектром, а интервалы дискретизации согласованы известным [1] образом с шириной области определения последнего, интерполирующая функция позволяет адекватно в смысле имеющейся информации вычислять значения сигнала в пределах интервала его регистрации.

Именно это составляет основное преимущество формулы Котельникова перед полиномиальной или сплайн- интерполяцией.

Одним из достоинств такой интерполяции является также то, что формально для её реализации кроме согласованности области определения трансформант Фурье приближающих функций с дискретизацией по времени выполнения иных условий не требуется. Отметим, что приближающие сигнал функции являются бесконечно дифференцируемыми (гладкими) и вне интервала регистрации сигналов убывают достаточно быстро.

Наибольшие погрешности приближения будут иметь место на концах интервала регистрации, что не позволяет осуществить экстраполяцию сигнала.

Ограниченность количества отсчётов не позволяет на основе интерполяционной формулы Котельникова получать адекватную оценку производной.

С учётом изложенного представляется целесообразным определить класс функций, обладающих одновременно теми из свойств сплайнов и целых функций, которые полезны для решения определённых выше задач обработки отсчётов сигналов. При этом важно получить конкретные соотношения, позволяющие построить соответствующие вычислительные процедуры.

Это и составляет основное содержание данной работы.

1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

В дальнейшем для упрощения выкладок используются обозначения

$$
\begin{aligned}
& f_k = f(t_k), k = 1,..,n \; : \\
& \varphi_k(t) = 1, t \in [t_{k-1}, t_k]; \\
& \varphi_k(t) = 0, t \notin [t_{k-1}, t_k], k = 1,. \, ,n.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Символ (,) означает скалярное произведение, то есть либо интеграл от произведения входящих в скобку функций по общей области определения, либо сумму произведений соответствующих компонент векторов.

Оценку сигнала, удовлетворяющую условиям (2) (интерполирующую функцию) будем искать в классе вещественнозначных непрерывных функций с интегрируемой производной, то есть полагаем, что в (3) имеет место

$$F \quad \tilde{f}(t) = \tilde{f}_0 + \int_0^t u(x)dx \qquad (5),$$

где $u(x)$ – производная.

Тогда для интерполирующей функции должны выполняться обусловленные требованиями (2) равенства

$$\tilde{f}_k - \tilde{f}_{k-1} = v_k = f_k - f_{k-1} = (\varphi_k, u), k = 1,..,n \,. \qquad (6)$$

Кроме того, полагаем, что преобразование Фурье производной интерполирующей функции

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\exp(jx\omega)dx$$

существует и имеет финитную область определения, то есть

$$U(\omega) \equiv 0, \text{ когда } \quad \omega \notin [-\Omega, \Omega], \qquad (7)$$

Иными словами производная интерполирующей функции должна обладать финитным спектром, то есть быть целой функцией [1] . Нетрудно показать, что при оговоренных выше условиях и определённая в (5) оценка сигнала будет обладать тем же свойством. В дальнейшем предполагается, что Ω является управляемым параметром.

Потребуем также выполнения условия

$$\|u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt = (u,u) = \min \qquad (8),$$

которое для всех рассматриваемых в работе задач обработки отсчётов сигнала будет дополняться соответствующими ограничениями, позволяющими получить их однозначное решение.

При решении задачи интерполяции следует учесть требования(6) . Таким образом, нетрудно сформулировать следующую вариационную изопериметрическую задачу.

Определить дифференцируемую функцию, производная которой имеет минимальную норму при выполнении условия (7) и ограничений (6).

Используя равенство Парсеваля [1] и известные [3] приёмы вариационного исчисления, нетрудно получить представление для производной искомой интерполирующей функции

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k z_k(t/T), \qquad (9)$$

где параметры $b_k, k = 1,..,n,$ должны удовлетворять равенствам (6), а базисные функции $z_k(t)$ имеют вид

$$z_k(y) = \int_{y_{k-1}}^{y_k} \sin[c(y-x)]/\pi(y-x)dx \qquad (10)$$

Здесь и в дальнейшем

$$c = T\Omega; \qquad (11)$$

$$y_k = t_k/T, k = 1,..,n\ . \qquad (12)$$

В свою очередь использование равенств вида (6) позволяет получить необходимое условие, которому должен удовлетворять вектор параметров представления (9)

$$A_n\vec{b}_n = \vec{v}_n, \qquad (13)$$

где $\vec{b}_n = (b_1,..,b_n)'; \vec{v}_n = (v_1,..v_n)'$; штрих означает транспонирование;

$$A_n = \{a_{ik}\}, i,k = 1,..,n;$$

$$a_{ik} = \int_{y_{i-1}}^{y_i} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \sin[c(y-x)]/\pi(y-x)dxdy \qquad (14)$$

Для решения задачи интерполяции необходимо обеспечить неособенность матрицы A_n в уравнении (13), что достигается выбором соответствующего значения граничной частоты Ω. Получим условия, которым она при этом должна удовлетворять.

Подынтегральная функция в (14) является неотрицательно определённой [1] и может быть представлена в виде разложения по собственным функциям [1,3]

$$\sin[c(y-x)/\pi(y-x) = \sum_{k=0}^{m} p_k g_k(y) g_k(x) + \sum_{k=m}^{\infty} p_k g_k(y) g_k(x), \qquad (15)$$

где

$$m = \langle c/2\pi \rangle + 1; \qquad (16)$$

символ $\langle\ \rangle$ означает целую часть аргумента;

$g_k(x)$ -ортонормированные собственные функции стоящего в левой части соотношения (15) ядра, которым соответствуют неотрицательные собственные числа p_k, упорядоченные по убыванию, то есть имеется в виду, что

$$p_k > p_{k+1}, k \geq 0 \qquad (17)$$

Известно [1], что собственные числа резко уменьшаются по величине, когда их индекс становится больше правой части (16), то есть норма ядра в квадрате [0,1;0,1] почти полностью определяется первой суммой в правой части (15), подстановка которой в (14) позволяет получить достаточно точные соотношения

$$a_{ik} = \sum_{r=0}^{m} p_r w_{ri} w_{rk}, \qquad (18)$$

где

$$w_{ri} = \int_{y_{i-1}}^{y_i} g_r(y) dy. \qquad (19)$$

Обозначив $\vec{w}_r = (w_{r1},..w_{rm})', r = 1,..,m$, нетрудно получить представление

$$A_n = \sum_{r=0}^{m} p_r \vec{w}_r \vec{w}'_r, \qquad (20)$$

которое говорит о том, что существование обратной матрицы $A_n^{-1} = \{a_{ki}^{-1}\}, k, i = 1,..,n$, будет гарантировано при выполнении условия

$$m \geq n. \qquad (21)$$

При этом уравнение (13) вместе с (9) позволяют получить представление

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k s_k(t/T). \qquad (22)$$

Здесь имеет место

$$s_k(y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^{-1} z_i(y). \qquad (23)$$

Очевидно, что при заданных исходных значениях n и T и выполнении для параметра Ω неравенства (21) функции вида (23) могут быть вычислены заранее, а соотношение (22) представляет собой их линейную комбинацию, которая может быть вычислена в темпе получения отсчётов сигнала.

В свою очередь, используя соотношение (6), нетрудно получить искомое представление для интерполирующей функции

$$\tilde{f}(t) = f_0 + \sum_{k=1}^{n} v_k h_k(t/T), \qquad (24)$$

где

$$h_k(y) = \int_0^y s_k(x)dx. \qquad (25)$$

Итак, показано, что для решения задач оценивания производных и интерполяции искомый класс функций с минимальной нормой первой производной и заданной областью определения её трансформанты Фурье представляет собой линейную комбинацию соответственно либо функций вида (10) либо интегралов от них.

Всегда можно выбрать такое значение параметра Ω , что коэффициенты этих линейных комбинаций могут быть вычислены при любом векторе конечной размерности в правой части (13) . Иными словами интерполирующая функция и оценка производный могут быть вычислены при любых ограниченных по абсолютной величине отсчётах сигналов без дополнительных условий .

При неизменных условиях (количество отсчётов, величина параметра Ω и, например, постоянство интервала дискретизации по времени) представления вида (22) и (24) позволяют производить вычисления в темпе поступления отсчётов сигнала, что имеет существенное значение.

2. ЗАДАЧА ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Под экстраполяцией сигналов понимается вычисление оценок значений сигнала вне интервала его регистрации с использованием имеющихся значений. Ясно, что для этого необходимо иметь алгоритм вычислений, который формируется на основе тех или иных предположений о свойствах сигнала и отвечает некоторым представлениям о качестве экстраполяции.

В любом случае предполагается, что в поведении сигнала имеется тенденция, которая сохраняется и вне интервала регистрации его значений и имеет либо априорное описание, либо выявляется на основе обработки эмпирических данных. Таким образом, определяются некоторые инварианты.

Наиболее широко используется описание тенденций на основе вероятностных моделей, что предполагает экстраполяцию на основе средних величин, например условного математического ожидания или автоковариационной функции. При этом предполагается выполнение условия стационарности в смысле неизменности используемых вероятностных характеристик (инварианты). В качестве мер погрешностей экстраполяции также используются средние величины, чаще всего среднеквадратическое отклонение.

Основные трудности практических применений вероятностных моделей обусловлены необходимостью использования априорных предположений, выполнимость которых проверить сложно, и, следовательно, нельзя быть уверенным в адекватности выводов.

В настоящее время широкое распространение получила экстраполяция на основе адаптивных моделей, вид которых обычно выбирается на основе априорных соображений (как правило линейная форма), а параметры оцениваются в процессе получения отсчётов сигналов с использованием некоторого критерия точности их аппроксимации, чаще всего принципа наименьших квадратов.

В данном случае предполагается, что в смысле используемого критерия вычисленные параметры модели будут наилучшими и относительно значений сигнала вне интервала его регистрации (инвариантны).

Такая однородность может быть достигнута только при адекватности априорных предположений и использовании для адаптации выборки достаточно большого объёма. Ясно, что это возможно далеко не всегда, причём часто желательно иметь возможность экстраполяции по выборке малого объёма.

Пусть для определённости задача заключается в вычислении оценок отсчётов $\widetilde{f}_{n+k}, k = 1,..N,$, когда отсчёты $f_k, k = 0,..,n$ известны. Для простоты рассмотрим случай эквидистантной дискретизации по времени с шагом Δt, то есть имеют место равенства $t_k = k\Delta t$.

Положим

$$\widetilde{v}_{n+k} = \widetilde{f}_{n+k} - \widetilde{f}_{n+k-1}, k = 1,..,N; \widetilde{f}_n = f_n,, \tag{26}$$

так что задача экстраполяции на N шагов сводится к построению процедуры вычисления оценок соответствующих разностей на основе исходных разностей зарегистрированных отсчётов сигнала.

Для этого снова воспользуемся классом функций удовлетворяющих условиям (7) и(8) и коэффициенты представления которых вида (10) согласно (13) должны удовлетворять уравнению

$$A_{n+N}\vec{b}_{n+N} = \vec{\widetilde{v}}_{n+N}, \tag{27}$$

где $\vec{\widetilde{v}}_{n+N} = (v_1,..v_n, \widetilde{v}_{n+1},..,\widetilde{v}_{n+N})' = (\vec{v}_n', \vec{\widetilde{w}}_N')'$; $\vec{\widetilde{w}}_N = (\widetilde{v}_{n+1},..,\widetilde{v}_{n+N})'$; $\vec{b}_{n+1} = (b_1,..,b_{n+N})'$.

При эквидистантной дскретизации, имея ввиду равенство $T = t_{n+N}$, после несложных преобразования из соотношения (14) нетрудно получить иное представление для элементов матрицы в левой части (27)

$$a_{ik} = 1/2\pi \int_{-b}^{b} R(x)\exp(jx(i-k))dx, \tag{28}$$

где $R(x) = \sin^2 x/2/(x/2)^2$; $b = \Omega\Delta t$.

Тогда для любого вектора $\vec{z} = (z_1,..,z_{n+N})'$ нетрудно получить представление для соответствующей квадратичной формы

$$\vec{z}'A_{n+N}\vec{z} = 1/2\pi \int_{-b}^{b} R(x) \mid Z(x) \mid^2 dx \quad , \tag{29}$$

где $Z(x) = \sum_{k=1}^{n+N} z_k \exp(-jxk)$ -спектр этого вектора.

Отсюда следует, что матрица является неотрицательно определённой, и поэтому [4] ввиду симметрии обладает полным набором ортонормальных собственных векторов, удовлетворяющих равенствам

$$\lambda_k \vec{q}_k = A_{n+N}\ \vec{q}_k \ ; \quad k = 1,..,n+N \quad , \tag{30}$$

где $\vec{q}_k = (q_{1k},...,q_{n+N,k})', \| \vec{q}_k \|^2 = \sum_{i=1}^{n+N} q_{ik}^2 = 1$, а для собственных чисел предполагается упорядоченность по убыванию

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_m \geq \lambda_{m+N} \geq 0 \quad , \tag{31}$$

причём для следа матрицы справедливо

$$\sum_{k=1}^{n+N} \lambda_k \ = \sum_{k=1}^{n+N} a_{kk} = (n+N)/2\pi \int_{-b}^{b} R(x)dx = trecA_{n+N} \tag{32}$$

Для любого собственного вектора с использованием теоремы о среднем определённых интегралов имеем

$$\lambda_r = \vec{q}_r' A_{n+N} \vec{q}_r = 1/2\pi \int_{-b}^{b} R(x) \,|\, Q_\kappa(x) \,|^2 dx = R(x_{cr})/2\pi \int_{-b}^{b} | \, Q_\kappa(x) \,|^2 dx \quad , \tag{33}$$

где $Q_r(x) = \sum_{k=1}^{n+N} q_{rk} \exp(-jxk)$ - спектр собственного вектора; $x_{c\kappa}$ -некоторая средняя точка интервала интегрирования.

При выполнении условия

$$b = \pi \tag{34}$$

с учётом нормированности собственных векторов и равенства Парсеваля нетрудно получить оценку нижней границы значений собственных чисел

$$\lambda_r = R(x_{cr}) \geq 4/\pi^2 \ > 0{,}4 \quad , \tag{35}$$

то есть матрица будет неособенной. Заметим, что условия (35) и (21) эквивалентны.

В виду конечной размерности спектры собственных векторов являются аналитическими функциями, которые ни в каком интервале частот конечной размерности не могут быть тождественно равными нулю, то есть правые части в (33) при любых границах интервала интегрирования в точности не равны нулю. Вместе с тем в виду монотонного убывания к концам области интегрирования в (33) функции $R(x)$ малость одного собственного числа по сравнению с другим означает, очевидно, что спектр первого собственного вектора сосредоточен в более высокочастотной области чем спектр второго (в смысле долей нормы, приходящихся на разные интервалы частот).

Таким образом, при выполнении условия (34) вектор в правой части уравнения (27) может быть произвольным. Вместе с тем экстраполяция заключается в вычислении неизвестной его части на основе зарегистрированной. Иными словами предполагается, что вторая компонента вектора $(\vec{v}_n', \tilde{\vec{w}}_N')'$ зависит от первой.

Предположим, что для отсчётов исходного сигнала выполняется

$$v_{n+i} = \sum_{k=1}^{n} b_k v_{k+i-1}, i = 1,.2,.. \quad , \tag{36}$$

где $\vec{b} = (b_1,..,b_n)'$-вектор неизвестных вещественных параметров, которые от вектора отсчётов сигнала не зависят (инвариант).

Тогда с помощью рекуррентных подстановок нетрудно получить представление

$$\tilde{\tilde{w}}_N = B\vec{v}_n, B = \{b_{ik}\}; i = 1,..,n; k = 1,..,N, \tag{37}$$

где первая строка матрицы представляет собой транспонированный вектор параметров представления (36), а остальные строки полностью им определяются. При этом, очевидно, в случае подстановки точных значений отсчётов сигнала должно выполняться равенство

$$C\tilde{\tilde{v}}_{n+N} = 0 \ , \tag{38}$$

где $C = (B\,|-I)$; I-единичная матрица, а вертикальная черта означает разбиение на блоки.

Легко понять, что строки матрицы в (38) являются линейно независимыми и поэтому образуют базис некоторого линейного подпространства. Следовательно, искомый вектор $(\vec{v}'_n, \tilde{\tilde{w}}'_N)'$ должен быть элементом линейного подпространства, натянутого на некоторые n базисных векторов с количеством компонент $n+N$, ортогональных к подпространству, образованному строками упомянутой матрицы.

Таким образом, основным инвариантом при линейной экстраполяции является количество базисных векторов подпространства, к которому принадлежит вектор $(\vec{v}'_n, \tilde{\tilde{w}}'_N)'$. Оно долно быть равно количеству используемых зарегистрированных отсчётов сигнала.

Отметим далее, что соотношение (36) является разностным уравнением [5], решение которого представляет собой линейную комбинацию в общем случае комплексных экспонент. При этом и начальные значения (вектор $\vec{v}_n$) также должны допускать такое представление. Нетрудно понять, что подобные ситуации в задачах экстраполяции являются скорее исключением чем правилом (хотя бы из-за влияния помех). Поэтому ограничимся поиском представления вида (37) , в котором строки матрицы B не обязательно удовлетворяют оговоренным выше условиям, но являются инвариантными по отношению к сдвигу интервала регистрации и не зависят от зарегистрированных значений.

Из соотношения (27) следует, что естественным базисом разложения вектора в его правой части является набор собственных векторов матрицы.Для того, чтобы вектор $(\vec{v}'_n, \tilde{\tilde{w}}'_N)'$ принадлежал подпространству, натянутому на n базисных векторов достаточно добиться выполнения условия

$$rancA_{n+N} = n, \tag{39}$$

то есть ранг матрицы в соотношении (27) ($rancA_{n+N}$) должен быть равен количеству известных компонент разностей отсчётов сигнала.

Иными словами инвариантом в задаче линейной экстраполяции может служить ранг матрицы в соотношении (27).

Рассмотрим возможности управления рангом этой матрицы и в частности достижения хотя бы приближённого равенства вида (39).

Непосредственно из представления (28) видно, что при выборе достаточно малых пределов интегрирования можно получить матрицу, практически совпадающую с матрицей единичного ранга. Следовательно, в виду непрерывной зависимости собственных чисел от элементов матриц [4], можно, изменяя параметр Ω,получать матрицы, у которых часть собственных чисел будут практически равны нулю. Таким образом, найдётся такое наибольшее значение этого параметра, удовлетворяющее условию

$$b < \pi , \tag{40}$$

что для компонент собственных векторов матрицы A_{n+N}, соответствующих этим собственным числам, с высокой степенью точности будут выполняться равенства

$$q_{n+k,l} = 1/2\pi\{ \int_{-\pi}^{b} Q_r(x)\exp(jxl)dx + \int_{b}^{\pi} Q_r(x)\exp(jxl)dx \}, k = 1,..,N , \tag{41}$$

то есть их нормы будут в основном сосредоточены вне интервалов интегрирования в (33).

Отметим, что описанные свойства собственных векторов матриц с элементами (29) до определённой степени аналогичны свойствам собственных функций ядер вида (15) [1].

Таким образом, при соответствующем выборе пределов интегрирования в (28) можно получить матрицу A_{n+N} желаемого ранга, причём из представления (41) следует, что с ростом N и неизменном n спектры её собственных векторов, соответствующих существенно отличным от нуля собственным числам, будут смещаться в низкочастотную область (так как при этом необходимо соответствующим образом уменьшать ширину области интегрирования).

Получим теперь формулу для вычисления экстраполируемых значений.

Матрица в соотношении (27) является симметричной и тёплицевой (персимметричной) [6]. Поэтому она может быть представлена в блочном виде

$$A_{n+N} = \begin{Bmatrix} A_n \mid D_N \\ D'_N \mid A_N \end{Bmatrix} \tag{42}$$

где структуры диагональных блоков отличаются за счёт разной размерности. Легко показать, что требование (39) будет выполнено, если имеет место линейная зависимость столбцов матрицы в (27), а именно когда для блоков в (42) выполняются равенства

$$D_N = A_n F; A_N = D'_N F , \tag{43}$$

где в общем случае множитель в правых частях является прямоугольной матрицей соответствующей размерности.

Если теперь в равенство (27) подставить представление (42), то с учётом симметрии его угловых блоков и равенств (43) нетрудно получить соотношение

$$\tilde{\vec{w}}_N = F'\vec{v}_n, \tag{44}$$

для использования которого при экстраполяции необходимо доопределить матрицу F'.

Прежде всего отметим, что при выполнении условия (40) для ранга левого углового блока в (42) будет в общем случае выполниться неравенство $rancA_n = r \le n$, причём его значение следует определять в процессе вычисления собственных значений указанного блока, которые по определению являются решениями уравнения $z_k \vec{x}_k = A_n \vec{x}_k$; $k = 1,..,n$.

Здесь и дальше предполагается, что нормы собственных векторов равны единице, а величина собственных чисел убывает с ростом индекса. Процесс вычисления собственных значений можно обрывать тогда, когда в соответствии с (32) сумма собственных чисел станет достаточно близка (в соответствии с выбранной мерой) к следу углового блока, определяя таким образом его ранг. Тогда с учётом первого из соотношений (43) искомую матрицу можно представить в виде

$$F' = D'_N A_n^+, \tag{45}$$

где

$$A_n^+ = \sum_{k=1}^{r} \vec{x}_k \vec{x}'_k / z_k,$$

то есть псевдообратная матрица [4].

Представляется важным отметить, что верхний предел суммирования в представлении для псевдообратной матрицы для конкретного вектора $\vec{v}_n$ иногда целесообразно уменьшить. Это следует из сопоставления последних двух соотношений с (44),которое показывает, что отношение $\| \vec{v}_n \| / z_r$ не должно быть слишком велико.

3. ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

Под фильтрацией сигналов будем иметь ввиду разделение эквидистантных отсчётов на две аддитивные компоненты

$$f_k = \tilde{f}_k + \varepsilon_k, k = 0,..,n. \tag{46}$$

При этом компоненты $\tilde{f}_k$ интерпретируются как некий тренд, определяющий долговременную тенденцию.

Положим

$$v_k = \tilde{f}_k - \tilde{f}_{k-1} + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1} = \tilde{v}_k + \theta_k, k = 1,..n \quad . \tag{47}$$

Таким образом задачу можно свести к разделению разностей на некоторые компоненты, производя дальнейшие вычисления с помощью соотношения

$$\tilde{f}_k = \tilde{f}_0 + \sum_{i=1}^{k} \tilde{v}_i, k > 0, \tag{48}$$

первое слагаемое в правой части которого подлежит уточнению, а $\tilde{v}_i$ означает выделенную компоненту разности.

Для решения задачи фильтрации в указанном смысле воспользуемся тем , что при соответствующем выборе пределов интегрирования в (28) можно получить матрицу A_n желаемого ранга, спектр собственных векторов, соответствующих ненулевым собственным числам которой будет в основном сосредоточен в заданном частотном интервале. Тогда, полагая

$$\vec{\tilde{v}} = (\tilde{v}_1,..,\tilde{v}_n)' = \sum_{k=1}^{r} (\vec{v},\vec{q}_k)\vec{q}_k\,, \tag{49}$$

где верхний предел суммирования меньше или равен рангу, можно согласно (41) получить компоненту сигнала, спектр которой сосредоточен в низкочастотной области.

Для вычисления $\tilde{f}_0$ предлагается использовать соотношение

$$\tilde{f}_0 = \bar{f} - \sum_{k=1}^{n} \tilde{v}_k (n-k+1)/(n+1)\,, \tag{50}$$

где $\quad \bar{f} = \sum_{k=0}^{n} f_k /(n+1)$.

Его легко получить в результате усреднения левых и правых частей соотношений вида (46) в которые необходимо подставить представления (48). При этом из-за эффекта усреднения будет уменьшено влияние компоненты ε_0 на значение оценки $\tilde{f}_0$.

Отметим, что если исходные данные отягощены погрешностями, то для оценивания производных на основе представления (22) естественно использовать разности, полученные в результате фильтрации.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен класс базисных функций вида (10), линейные комбинации которых на основе решения уравнения (13) дают решения задач оценивания производных и интерполяции сигналов по дискретным отсчётам. В виду условия (7) они являются целыми, а вариационный принцип (8) позволяет осуществить отбор наиболее гладких в этом смысле целых функций.

Показано, что инвариантная форма линейной экстраполяции отсчётов сигнала на произвольный отрезок вне интервала регистрации определяется соотношениями вида (44) и (45).

Свойства матриц с элементами вида (28) позволяют для случая эквидистантных отсчётов управлять областями определений спектров Фурье её собственных векторов и рангом. Это позволяет осуществить фильтрацию отсчётов сигнала в смысле разделения на высокочастотную и низкочастотную компоненты.

Библиографический список

1. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике .М.:Наука,1971 г.
2. Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев: Наукова думка,1992 г.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974г.-т.4.-ч.1
4. Гантмахер Ф Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967 г.
5. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967г.
6. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.:Наука,1987 г.

Работа финансировалась в рамках гранта Белгородского государственного университета.