УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ БЕЛЬТРАМИ°

О. В. Ващенко, А. П. Солдатов

Рассмотрим на плоскости систему первого порядка

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\frac{\partial\phi}{\partial x} = F, \tag{1}$$

где матрица $J \in \mathbf{C}^{l\times l}$ постоянна и ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \nu > 0$. В скалярном случае $l = 1$ уравнение (1) с, вообще говоря, непрерывным коэффициентом $J(z)$, $\operatorname{Im} J > 0$, называют уравнением Бельтрами [1].

Матрица-функция

$$E(z) = \frac{1}{2\pi i} z_J^{-1}, \tag{2}$$

где здесь и ниже принято матричное обозначение $z_J = x\cdot 1 + y\cdot J$ для $z = x + y\cdot i \in \mathbf{C}$, является фундаментальным решением обобщенной системы Бельтрами (1).

Теорема 1. *Для любой непрерывно дифференцированной функции $F(z)$ с компактным носителем интеграл*

$$(TF)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}(t-z)_J^{-1} F(t)\,dt_1 dt_2 \tag{3}$$

определяет классическое решение уравнение (1).

Доказательство. В самом деле, функция TF непрерывно дифференцируема и ее производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial(TF)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} t_J^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(z+t)\,dt_1 dt_2 \qquad \frac{\partial(TF)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} t_J^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(z+t)\,dt_1 dt_2. \tag{4}$$

Рассмотрим двумерный сингулярный интеграл

$$(SF)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} t_J^{-2} F(z+t)\,dt_1 dt_2, \tag{5}$$

понимаемый как предел при $\varepsilon \to 0$ интегралов по $\{|t| \ge \varepsilon\}$. Поскольку

$$\int_{|t|=1} t_J^{-2}\,ds_t = 0, \tag{6}$$

° Работа выполнена при поддержке программы «Университеты Росси» (проект № УР 04.01.486).

необходимое условие существования таких интегралов выполнено. В справедливости равенства (6) проще всего убедиться с помощью функции

$$\chi(\nu) = \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \nu\sin\theta)^{-2}\,d\theta,$$

аналитической в верхней полуплоскости Im J > 0. С одной стороны, интеграл в левой части (6) совпадает со значением $\chi(J)$ этой функции от матрицы J. С другой стороны, функция от матрицы χ и все ее производные обращаются в нуль в точке $\nu = i$, так что $\chi(J) = 0$. Запишем интеграл (3) как предел при $\varepsilon \to 0$ интегралов по $\{|t| \geq \varepsilon\}$ и проинтегрируем по частям под знаком предела. Тогда обычным образом получим равенства

$$\frac{\partial(TF)}{\partial x} = (SF)(z) + \sigma_1 F(z) \qquad \frac{\partial(TF)}{\partial y} = J(SF)(z) + \sigma_2 F(z), \tag{7}$$

где коэффициенты $\sigma_k \in \mathbf{C}^{l\times l}$ определяются формулами

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} t_J^{-1} n_k\,ds_k, \qquad k = 1,2.$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$ означает единичную внутреннюю нормаль к окружности $|t| = 1$, так что

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(\cos\theta + J\sin\theta)^{-1}\cos\theta d\theta \qquad \sigma_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(\cos\theta + J\sin\theta)^{-1}\sin\theta d\theta.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sigma_2 - J\sigma_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(-\sin\theta + J\cos\theta)(\cos\theta + J\sin\theta)^{-1}\cos\theta d\theta = -1. \tag{8}$$

В самом деле, левая часть является значением от J аналитической в полуплоскости Im$\nu > 0$ функции

$$\chi_0(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{-\sin\theta + \nu\cos\theta}{\cos\theta + \nu\sin\theta}\,d\theta.$$

Простые вычисления показывают, что $\chi_0(i) = -1, \chi_0^{(k)}(i) = 0, k = 1,2,...$ и, значит, $\chi_0(\nu) = -1$.

Объединяя (7) и (8), убеждаемся, что функция TF действительно удовлетворяет уравнению (1).

Сингулярный оператор (5) принадлежит к типу Кальдерона-Зигмунда и ограничен в пространстве Гельдера C^μ. Этот факт известен как теорема Корна- Жиро [2] (теорема Привалова в одномерном случае).

Напомним, что пространство C^μ (E) функций, непрерывных по Гельдеру на множестве $E \subseteq \mathbf{C}$, определяется условием конечности нормы

$$|\varphi| = |\varphi|_{0,E} + [\varphi]_{\mu,E},$$

где положено

$$|\varphi|_{0,E} = \sup_{z\in E}|\varphi(z)| \qquad [\varphi]_\mu = \sup_{z,z'\in E, z\neq z'} \frac{|\varphi(z)-\varphi(z')|}{|z-z'|^\mu}.$$

Более точно, теорема Корна-Жиро утверждает, что для любой функции $F \in C^\mu(\mathbf{C})$, обращающейся в нуль вне некоторого круга $|z| \le R$, справедлива оценка

$$|SF|_{C^\mu(C)} \le C|F|_{C^\mu}, \tag{9}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от R и μ.

Рассмотрим систему (1) в области D с кусочно-гладкой границей Г, которая вместе с этой границей лежит внутри круга $|z| \le R$. Покажем, что любую функцию $F \in C^\mu(\overline{D})$ можно продолжить до функции $\widetilde{F} \in C^\mu(\overline{C})$, обращающейся в нуль все круга $|z| \le R$.

Теорема 2. *Существует такой линейный ограниченный оператор продолжения* $P: C^\mu(\overline{D}) \to C^\mu(\mathbf{C})$, *что* $(PF)(z) = 0$ *при* $|z| \ge R$ *и* $(PF)(z) = F(z)$ *при* $z \in D$.

Доказательство. Следуя [3], условимся под специальной липшицевой областью понимать множество в **C** вида

$$D = \{z = x + i\cdot y \mid y > f(x)\}, \tag{10}$$

где вещественная функция f(x) удовлетворяет условию Липшица на всей прямой **R.** Удобно к специальной липшицевой области относить и множества, получающееся из областей (10) путем поворота.

В общем случае область D на плоскости назовем липшицевой, если существуют такие открытые множества $U_1, \dots, U_m$ и число $r > 0$, что

1) каждый круг с центром $z \in \partial D$ радиуса r целиком содержится в некотором U_i;

2) для любого i найдется такая специальная липшицева область D_i, что $U_i \cap D = U_i \cap D_i$.

Нетрудно убедиться, что области с кусочно-гладкой границей являются липшицевыми. Поэтому утверждение теоремы достаточно установить для любой липшицевой области. Очевидно, оператор продолжения достаточно построить из $C^\mu(\overline{D})$ в $C^\mu(\mathbf{C})$. Если этот оператор обозначить Q и $\chi \in C^\mu$ есть срезывающая функция, равная 1 на D и нулю вне круга $|z| \le R$, то оператор $P\varphi = \chi Q\varphi$ будет удовлетворять условиям теоремы.

Если D – специальная липшицева область (10), то в качестве Q можно взять оператор, который функции φ на Г ставит в соответствие функцию вне D, постоянную по переменной y. Аналогичным образом строится Q и для областей, получающихся из (10) путем поворота.

Рассмотрим открытые множества $U_1, \dots, U_m$, специальные липшицевы области $D_1, \dots, D_m$, удовлетворяющие условиям 1), 2) определения. Тогда вместе с $U_0 = D$ семейство (U_j, $0 \le j \le m$,) образует открытое покрытие $\overline{D}$. Введем разбиение единицы (χ_j, $0 \le j \le m$,) вписанное в это покрытие. Под ним понимается семейство неотрицательных функций $\chi_j \in C^\infty(U_j)$, $j = 0, \dots, m$ со следующими свойствами: $\chi_0 + \dots + \chi_n \equiv 1$ на $\overline{D}$ и $\chi_j(z) \equiv 0$ в окрестности ∂U_j при каждом j. Очевидно, равенство

$$|\varphi| = \sum_j |\chi_j \varphi|_{C^{n,\mu}(\overline{D})}$$

определяет эквивалентную норму в $C^{n,\mu}(\overline{D})$.

В обозначениях определения липшицевых областей обозначим Q_i оператор продолжения $C^\mu(\overline{D}_i) \to C^\mu(\mathbf{C})$, указанный выше для специальных областей.
Положим

$$\widetilde{Q}F = \sum_i \chi_i [Q_i(\chi_i F)], \qquad F \in C^\mu(\overline{D}).$$

Очевидно, $\widetilde{Q}F(z) = a(z)F(z)$, $z \in \overline{D}$, где положено $a(z) = \sum_i \chi_i^2(z)$.

Множество $V=\{z \mid a(z) \neq 0\}$ открыто и содержит некоторую ε-окрестность Γ, т. е. для всех $a(z)\neq 0$ точек z, расстояние которых до границы Γ меньше ε. Выберем срезку $\chi \in C^\mu$, тождественно равную 1 на $\overline{D}$ и нулю в окрестности ∂V. Тогда произведение $b = \chi a^{-1} \in C^\mu(V)$ и $QF=b\widetilde{Q}F$ будет требуемым оператором продолжения.

Тогда в силу сказанного выше оператор TP ограничен $C^\mu(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$, при этом функция TPF служит решением системы (1). Следовательно, любое решение из класса

$$\phi, \frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} \in C^\mu(\overline{D})$$

единственным образом представимо в виде $\phi = PTF + \phi_0$, где $\phi_0 \in C^\mu(\overline{D})$ служит решением однородной системы (1), т. е. является гипераналитической функцией. Применяя к ней интегральное представление Мусхелишвили [4], приходим к следующему основному результату.

Теорема 3. *Пусть матрица J треугольна. Тогда любое решение системы (1) из класса (10) единственным образом представимо в виде*

$$\phi = PTF + (I\varphi)(z) + i\xi, \qquad \xi \in \mathbf{R}^1,$$

где вектор-функция $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ принимает значения в $\mathbf{R}^1$, а $I\varphi$ означает интеграл типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1}\, dt_J\, \varphi(t), \qquad z \in D.$$

Библиографический список

1. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции [Текст] / под ред. О. А. Олейник, Б. В. Шабата. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1988. – 512 с.
2. Берс, Л. Уравнения с частными производными [Текст] / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. – М. : Мир, 1966. – 351 с.
3. Стейн, И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций [Текст] / И. Стейн. – М. : Мир, 1972. – 342 с.
4. Солдатов, А. П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай [Текст] / А. П. Солдатов // Известия АН СССР. – 1991. – Т. 55, № 5. – С. 1070-1100. – (Серия «Математика»).