

**РАСЧЕТ ВЛИЯНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ВХОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО КРИСТАЛЛА НА СПЕКТРАЛЬНО-УГЛОВОЕ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФРАГИРОВАННОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ  
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА\***

*С. В. Блажевич, А. В. Носков*

В данной работе в рамках динамической теории дифракции рентгеновских лучей в монокристалле [1] получено аналитическое выражение для дифрагированного переходного излучения (ДПИ) в толстом кристалле. Исследована зависимость угловой плотности ДПИ от различной ориентации входной поверхности кристалла при фиксированном угле падения электрона на систему параллельных кристаллографических плоскостей. Численные расчеты показали существенную зависимость плотности ДПИ от ориентации входной поверхности на примере кристалла кремния. Полученную зависимость авторы объясняют изменением области аномальной дисперсии (полного внешнего отражения) для рентгеновских волн.

### ВВЕДЕНИЕ

Переходное излучение возникает при пересечении релятивистской частицей границы раздела двух сред с различными диэлектрическими свойствами [2]. В случае монокристаллической среды возникшее излучение может затем дифрагировать на системе параллельных атомных плоскостей кристалла (см. например [3]). До настоящего времени ДПИ в динамическом подходе рассматривалось в основном для случая, когда входная поверхность кристалла параллельна системе дифрагирующих атомных плоскостей. В настоящей работе показано, что угловая плотность ДПИ существенно зависит от ориентации атомных плоскостей относительно входной поверхности мишени. Этот результат представляет интерес в связи с проблемой создания источников квазимонохроматического рентгеновского излучения, поскольку указывает на один из путей повышения интенсивности источника излучения.

### СПЕКТРАЛЬНО-УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДПИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В ДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим излучение быстрой заряженной частицы, пересекающей кристалл толщиной  $L$  с постоянной скоростью  $\vec{V}$  (рис.1). Для исследования спектрально-угловых характеристик переходного излучения будем оперировать с Фурье-компонентами электромагнитного поля  $\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \int dt d^3r \vec{E}(\vec{r}, t) \exp(i\omega t - i\vec{k}\vec{r})$ . Поскольку поле релятивистской частицы с хорошей степенью точности можно считать поперечным, то падающая  $\vec{E}_0(\vec{k}, \omega)$  и дифрагированная  $\vec{E}_1(\vec{k}, \omega)$  электромагнитные волны определяются двумя амплитудами с разными значениями поперечной поляризации

$$\begin{aligned} \vec{E}_0(\vec{k}, \omega) &= E_0^{(1)}(\vec{k}, \omega) \vec{e}_0^{(1)} + E_0^{(2)}(\vec{k}, \omega) \vec{e}_0^{(2)}, \\ \vec{E}_1(\vec{k}, \omega) &= E_1^{(1)}(\vec{k}, \omega) \vec{e}_1^{(1)} + E_1^{(2)}(\vec{k}, \omega) \vec{e}_1^{(2)}. \end{aligned} \quad (1)$$

\* Работа финансировалась в рамках гранта БелГУ и гранта РФФИ 05-02-16512

Единичные векторы поляризации выбираются следующим образом. Векторы  $\vec{e}_0^{(1)}$  и  $\vec{e}_0^{(2)}$  перпендикулярны вектору  $\vec{k}$ , а векторы  $\vec{e}_1^{(1)}$  и  $\vec{e}_1^{(2)}$  перпендикулярны вектору  $\vec{k} + \vec{g}$ . Причем векторы  $\vec{e}_0^{(2)}$ ,  $\vec{e}_1^{(2)}$  лежат в плоскости векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{k} + \vec{g}$  ( $\pi$ -поляризация), а векторы  $\vec{e}_0^{(1)}$  и  $\vec{e}_1^{(1)}$  перпендикулярны ей ( $\sigma$ -поляризация);  $\vec{g}$  – вектор обратной решетки, определяющий систему отражающих атомных плоскостей кристалла.

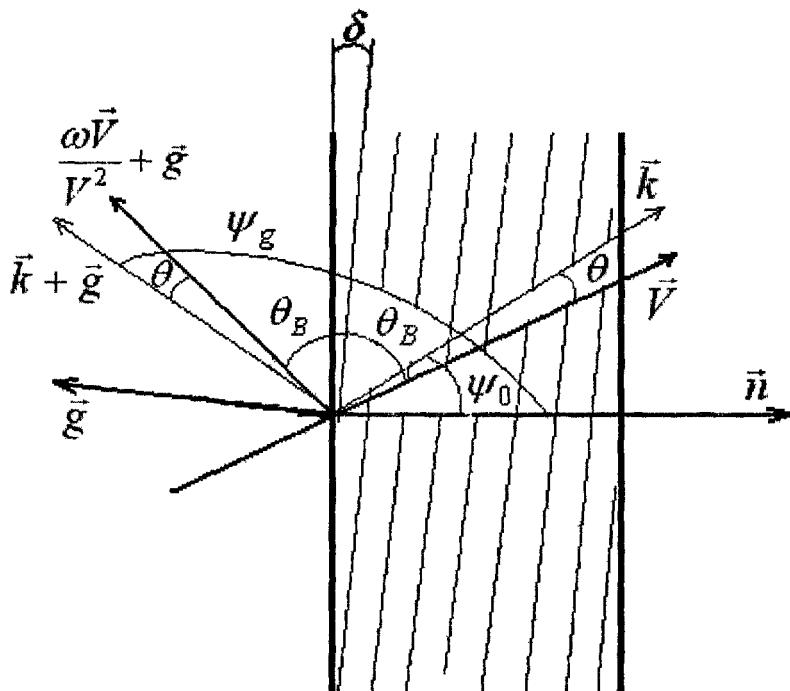


Рис.1. Геометрия процесса излучения и система обозначений используемых величин

Используя двухволновое приближение динамической теории дифракции [1], запишем хорошо известную систему уравнений для Фурье-образа электромагнитного поля [4]

$$\begin{aligned} (\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)E_0^{(s)} + \omega^2 \chi_{01} C^{(s)} E_1^{(s)} &= 8\pi^2 i e \omega \theta V P^{(s)} \delta(\omega - \vec{k}\vec{V}), \\ \omega^2 \chi_{10} C^{(s)} E_0^{(s)} + (\omega^2(1 + \chi_0) - (\vec{k} + \vec{g})^2)E_1^{(s)} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\chi_{10} = \chi_g$ ,  $\chi_{01} = \chi_{-\vec{g}}$ ,  $\chi_0$  – коэффициенты Фурье разложения диэлектрической

восприимчивости  $\chi(\omega, \vec{r}) = \sum_{\vec{g}} \chi_{\vec{g}}(\omega) e^{i\vec{g}\vec{r}}$  по векторам обратной решетки, причем

рассматривается кристалл с симметрией ( $\chi_{01} = \chi_{10}$ ). В работе приняты обозначения

$$\chi_{01} = \chi_{10} = \chi_{\vec{g}} = \chi'_{\vec{g}} + i\chi''_{\vec{g}}, \quad \chi_0 = \chi'_0 + i\chi''_0, \quad C^{(s)} = e_0^{(s)} e_1^{(s)}, \quad P^{(s)} = e_0^{(s)} (\vec{\rho} / \rho), \quad (3)$$

причем рассматривается кристалл с симметрией ( $\chi_{01} = \chi_{10}$ ). Система (2) для  $s = 1$

описывает поля с  $\sigma$ -поляризацией, а при  $s = 2$  поля с  $\pi$ -поляризацией.  $\vec{\rho} = \vec{k} - \omega\vec{V}/V^2$  – составляющая импульса виртуального фотона, перпендикулярная скорости частицы  $\vec{V}$  ( $\rho = \omega\theta/V$ , где  $\theta \ll 1$  – угол между  $\vec{k}$  и  $\vec{V}$ ),  $g = 2\omega_B \sin\theta_B / V$  – величина вектора обратной решетки,  $\theta_B$  – угол между скоростью электрона и системой кристаллографических плоскостей (угол Брэгга).

Решение системы уравнений (2) имеет вид

$$E_0^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV}{\omega} \frac{\theta P^{(s)}}{(\chi_0 - \gamma^{-2} - \theta^2)} \times \left( 1 + \frac{C^{(s)2} \chi_{\bar{g}}^2}{\chi_{\bar{g}}^2 C^{(s)2} - (\chi_0 - \gamma^{-2} - \theta^2) \left( \chi_0 - \gamma^{-2} - \theta^2 - \frac{1}{\omega^2} ((\bar{k} + \bar{g})^2 - k^2) \right)} \right) \delta(\bar{\rho} \bar{V}), \quad (4a)$$

$$E_{vac}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV}{\omega} \frac{\theta P^{(s)}}{-\gamma^{-2} - \theta^2}, \quad (4b)$$

где  $\gamma = (1 - V^2)^{-1/2}$  – Лоренц-фактор частицы,  $P^{(1)} = \sin \varphi$ ,  $P^{(2)} = \cos \varphi$ ,  $\varphi$  – угол отсчитывается от плоскости, образованной векторами  $\bar{V}$  и  $\bar{g}$ .

Будем рассматривать рассеяние в геометрии Брэгга, когда дифрагированное в направлении Брэгга поле ПИ выходит через переднюю границу кристалла. Для этого случая вектор  $\bar{g} + \omega \bar{V} / V^2$  составляет тупой угол с вектором внешней нормали  $\bar{n}$ . Дифрагированное излучение распространяется в направлении, близком к направлению вектора  $\bar{g} + \omega \bar{V} / V^2$ . Амплитуда поля ДПИ для полубесконечного кристалла в рассматриваемой геометрии имеет вид

$$E_{Rad}^{(s)} = (E_{vac}^{(s)} - E_0^{(s)}) U^{(s)} \quad (5)$$

где

$$U^{(s)} = -\frac{\beta \pm (\beta^2 - 4\chi_{\bar{g}}^2 C^{(s)2} \varepsilon)^{1/2}}{2\chi_{\bar{g}} \varepsilon C^{(s)}}, \quad \beta = \alpha - (\chi_0' - \theta^2 - \gamma^{-2})(1 + \varepsilon),$$

$$\alpha = \frac{1}{\omega^2} ((\bar{k} + \bar{g})^2 - k^2), \quad \varepsilon = \frac{|\cos(\psi_g)|}{\cos(\psi_0)} \approx \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}, \quad (6)$$

$\psi_0, \psi_g$  – углы между волновыми векторами соответственно подающей и отраженной волны и внешней нормалью к поверхности мишени  $\bar{n}$ ,  $\delta$  – угол между входной поверхностью мишени и системой кристаллографических плоскостей.  $U^{(s)}$  – амплитуда поля в волне, вышедшей назад через переднюю границу кристалла.  $|U^{(s)}|^2$  имеет смысл коэффициента отражения интенсивности поля от толстого поглощающего кристалла [1].

Подставляя выражение (4) в (5) и не учитывая второе слагаемое в (4a), описывающее параметрическое рентгеновское излучение, получим следующие выражения для ДПИ из толстого поглощающего кристалла

$$E_{Rad}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV}{\omega} \theta P^{(s)} \left( -\frac{1}{\chi_0 - \gamma^{-2} - \theta^2} - \frac{1}{\gamma^{-2} + \theta^2} \right) U^{(s)}. \quad (7)$$

Спектрально-угловое распределение излучения может быть записано в виде [4]

$$\frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{(2\pi)^6} \sum_{s=1}^2 |E_{Rad}^{(s)}|^2. \quad (8)$$

Подставив амплитуду поля (6) в (7), получим выражение для спектрально-углового распределения ДПИ

$$\frac{d^2 W_{ДПИ}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \theta^2 \sum_{s=1}^2 P^{(s)2} \left| -\frac{1}{\chi_0 - \gamma^{-2} - \theta^2} + \frac{1}{-\gamma^{-2} - \theta^2} \right|^2 |U^{(s)}|^2. \quad (9)$$

Подставляя выражение для  $U^{(s)}$ , получим спектрально-угловое распределение для числа фотонов дифрагированного переходного излучения

$$\frac{d^2 N^{ДПИ}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2 \omega} \theta^2 \sum_{s=1}^2 P^{(s)} \left| \frac{1}{\gamma^{-2} + \theta^2} - \frac{1}{\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_0'} \right|^2 \times$$

$$\times \frac{1}{\left[ \xi^2 - \varepsilon - i\rho \left( \xi + \frac{\chi_0'' C^{(s)}}{\chi_0'} \frac{2\varepsilon |\chi_0'|}{1+\varepsilon} \right) \right] + \xi^2 + \sqrt{\left( \xi^2 - \varepsilon - i\rho \left( \xi + \frac{\chi_0'' C^{(s)}}{\chi_0'} \frac{2\varepsilon |\chi_0'|}{1+\varepsilon} \right) \right) + \xi^2} - \varepsilon^2}, \quad (10)$$

где введены обозначения  $\rho = \frac{\chi_0''}{|\chi_0'| C^{(s)}} (1 + \varepsilon)$ ,

$$\xi = \frac{1}{2 |\chi_0'| C^{(s)}} \left( \frac{4 \sin^2 \theta_B}{V^2} \left( \frac{\omega_B (1 + \theta \cos \varphi \cot \theta_B)}{\omega} - 1 \right) - (\chi_0' - \gamma^{-2} - \theta^2) (1 + \varepsilon) \right) =$$

$$= \zeta(\omega) - \frac{(\chi_0' - \gamma^{-2} - \theta^2) \varepsilon}{2 |\chi_0'| C^{(s)}}$$

и опущены члены, пропорциональные  $\rho^2$ .  $\zeta(\omega)$  является переменной, характеризующей частоту.

Выражение (10) позволяет исследовать влияние ориентации входной поверхности толстого поглощающего кристалла на спектрально-угловые характеристики ДПИ при фиксированном угле между падающим электронным пучком и системой параллельных атомных плоскостей кристалла.

## ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ УГЛОВОЙ ПЛОТНОСТИ ДПИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА ДЛЯ КРИСТАЛЛА ГЕРМАНИЯ

На рис.2 приведены кривые, описывающие угловую плотность ДПИ, построенные для  $\sigma$ -поляризации по формуле (10), которую предварительно проинтегрировали по частоте  $\omega$ . Кривые, построенные для различных значений параметра  $\varepsilon$ , который определяет ориентацию входной поверхности кристалла. Видно, что угловая плотность ДПИ существенно зависит от ориентации входной поверхности кристалла при постоянном угле падения электрона относительно выбранной системы кристаллографических плоскостей. Это определяется тем, что область аномальной дисперсии (полного внешнего отражения) для ДПИ растет при увеличении параметра  $\varepsilon$ , а амплитуда соответственно уменьшается (уменьшения угла между падающим электронным пучком и входной поверхностью кристалла). Таким образом, для малых значений  $\varepsilon$  угловая плотность ДПИ оказывается значительно больше по сравнению с ДПИ при  $\varepsilon = 1$ , когда входная поверхность кристалла параллельна атомным плоскостям.

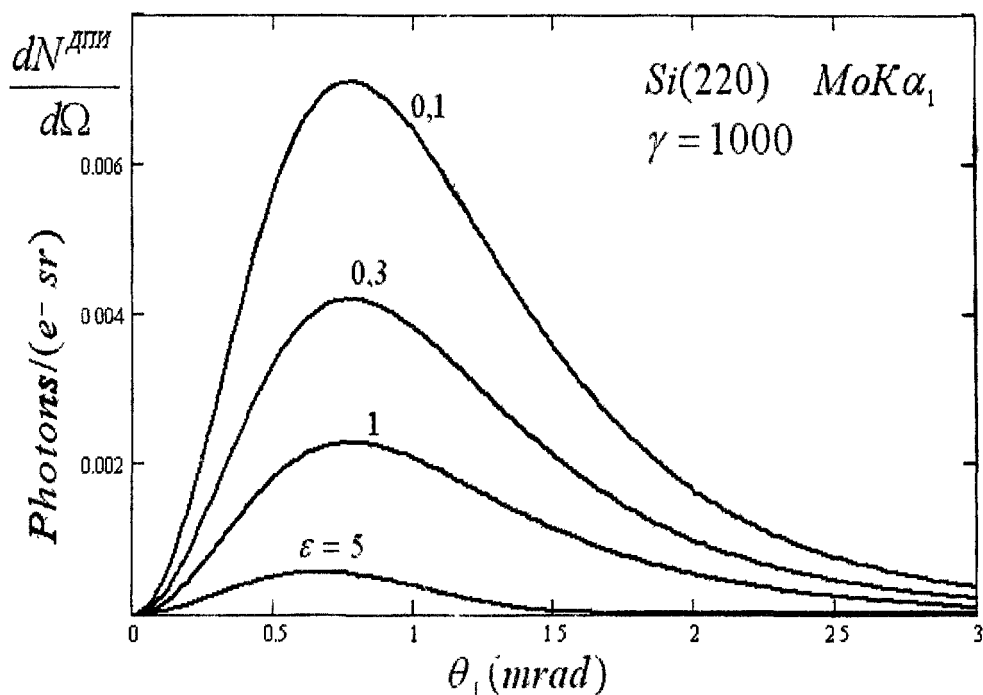


Рис. 2. Расчет угловой плотности ДПИ для толстого поглощающего кристалла кремния для различных ориентаций входной поверхности кристалла.

Итак, в работе получены аналитические выражения для спектрально-угловой плотности ДПИ релятивистского электрона в форме удобной для исследования влияния взаимной ориентации входной поверхности кристалла и его кристаллической решетки. На примере численных расчетов, проведенных для кристалла германия, показано, что угловая плотность ДПИ существенно зависит от ориентации входной поверхности кристалла.

Работа частично поддержана Федеральным агентством по образованию согласно тематическому плану НИР БелГУ и внутренним грантом БелГУ.

#### Библиографический список

1. Пинскер, З. Дифракция рентгеновских лучей в идеальных кристаллах [Текст] / З. Пинскер. – М. : Наука, 1984.
2. Гинзбург, В. Л. [Текст] / В. Л. Гинзбург, И. М. Франк // ЖЭТФ. – 1946. – Т. 16. – С. 15.
3. Nasonov, N. [Текст] / N. Nasonov // Phys. Lett. – 1999. – V. A260. – С. 391.
4. Базылев, В. А. Излучение быстрых частиц в веществе и внешних полях [Текст] / В. А. Базылев, Н. К. Жеваго. – М. : Наука, 1987. – 272 с.

УДК 517.9

## ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ<sup>o</sup>

*А. П. Солдатов*

### ВВЕДЕНИЕ

Пусть область  $D \subseteq \mathbf{R}^2$  ограничена кусочно-гладким контуром  $\Gamma$  без точек возврата. Выберем конечное подмножество  $F \subseteq \Gamma$ , содержащее все угловые точки контура, и рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение  $\alpha: \Gamma \setminus F \rightarrow D$ . Предположим, что функция  $\alpha$  и ее производная  $\alpha'$  (по параметру длины дуги) кусочно

<sup>o</sup> Работа выполнена при поддержке гранта “Университеты России (проект № УР 04.01.486)”