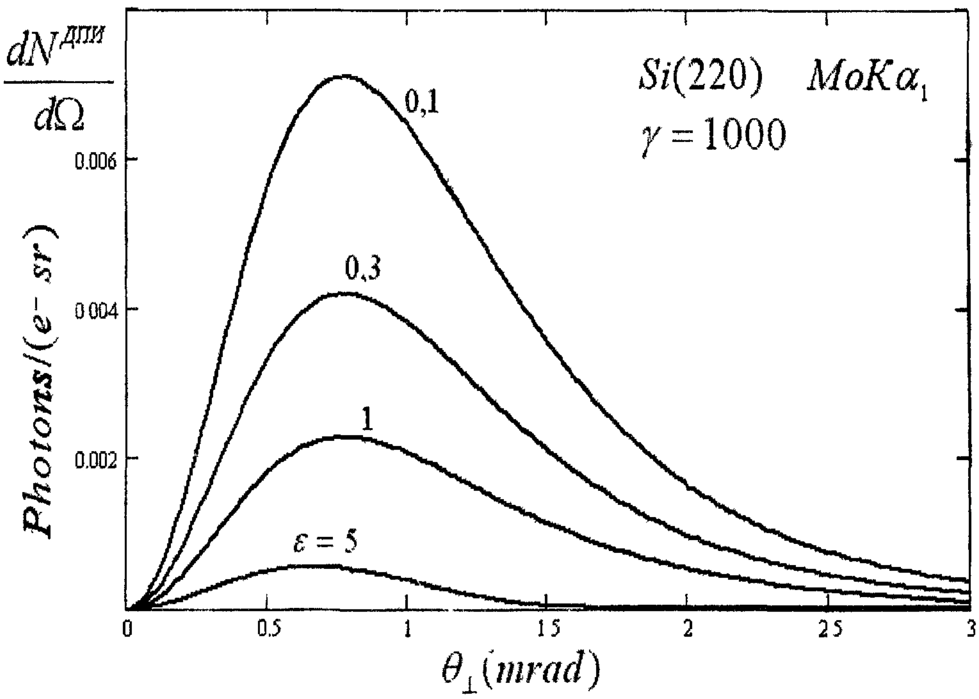

Рис. 2. Расчет угловой плотности ДПИ для толстого поглощающего кристалла кремния для различных ориентаций входной поверхности кристалла.

Итак, в работе получены аналитические выражения для спектрально-угловой плотности ДПИ релятивистского электрона в форме удобной для исследования влияния взаимной ориентации входной поверхности кристалла и его кристаллической решетки. На примере численных расчетов, проведенных для кристалла германия, показано, что угловая плотность ДПИ существенно зависит от ориентации входной поверхности кристалла.

Работа частично поддержана Федеральным агентством по образованию согласно тематическому плану НИР БелГУ и внутренним грантом БелГУ.

Библиографический список

1. Пинскер, З. Дифракция рентгеновских лучей в идеальных кристаллах [Текст] / З. Пинскер. – М. : Наука, 1984.

2. Гинзбург, В. Л. [Текст] / В. Л. Гинзбург, И. М. Франк // ЖЭТФ. – 1946. – Т. 16. – С. 15.

3. Nasonov, N. [Текст] / N. Nasonov // Phys. Lett. – 1999. – V. A260. – C. 391.

4. Базылев, В. А. Излучение быстрых частиц в веществе и внешних полях [Текст] / В. А. Базылев, Н. К. Жеваго. – М. : Наука, 1987. – 272 с.

УДК 517.9

ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ[°]

А. П. Солдатов

ВВЕДЕНИЕ

Пусть область $D \subseteq \mathbf{R}^2$ ограничена кусочно-гладким контуром Γ без точек возврата. Выберем конечное подмножество $F \subseteq \Gamma$, содержащее все угловые точки контура, и рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение $\alpha: \Gamma \setminus F \to D$. Предположим, что функция α и ее производная α' (по параметру длины дуги) кусочно

[°] Работа выполнена при поддержке гранта “Университеты России (проект № УР 04.01.486)”

непрерывны на Γ, т.е. имеют односторонние пределы в точках $\tau \in F$, причем $\alpha(\tau \pm 0) \in D \cup F$ и $\alpha'(\tau \pm 0) \neq 0$ при $\tau \in F$. Кроме того, кривая $\alpha(\Gamma \setminus F)$ не касательна к Γ.

Задача Бицадзе-Самарского. Найти аналитическую в D функцию $\phi \in C(\overline{D} \setminus F)$ по краевому условию

$$\mathrm{Re}(a\phi + a^0 \phi \circ \alpha)|_\Gamma = f, \tag{1}$$

где коэффициенты a и a^0 кусочно непрерывны на Γ. Кроме того, в случае неограниченной области D предполагается, что функция ϕ ограничена на ∞.

Можно рассмотреть также и ситуацию, когда коэффициент a^0 и сдвиг α заданы на части Γ' кривой Γ и, соответственно, краевое условие распадается на

$$\mathrm{Re}(a\phi)|_{\Gamma \setminus \Gamma'} = f_0, \qquad \mathrm{Re}(a\phi + a^0 \phi \circ \alpha)|_{\Gamma'} = f_1 \tag{1'}$$

Продолжая α на всю кривую $\Gamma \setminus F$ и доопределяя a^0 нулем, эту задачу всегда можно свести к виду (1). При $a^0 = 0$ получаем классическую задачу Римана-Гильберта. Как и в случае $a^0 = 0$ задачу (1) отнесем к нормальному типу, если коэффициент a невырожден всюду на Γ, включая его предельные значения в точках $\tau \in F$.

К задаче (1), очевидно, сводится задача Бицадзе – Самарского для уравнения Лапласа, сформулированная в [1]. Для общих эллиптических уравнений задача Бицадзе –Самарского была предметом многочисленных исследований ([2]-[4]). В данной работе задачу (1) рассмотрим для функций, аналитических по Дуглису. Последние представляют собой решения $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_l)$ канонической эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} - J\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0 \tag{2}$$

с матрицей $J \in \mathbf{C}^{l \times l}$, собственные значения $\nu \in \sigma(J)$ которой лежат в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\nu > 0$. Соответственно коэффициенты a, a^0 в (1) являются кусочно непрерывными $l \times l$ – матриц–функциями. При $J = i$ система (2) переходит в систему Коши-Римана и (1), (2) соответствует задаче для аналитических вектор-функций.

Интерес к постановке (1), (2) мотивируется тем, что к ней сводится задача Бицадзе – Самарского для эллиптических уравнений и систем с постоянными (и только старшими) коэффициентами [6, 7].

Особо остановимся на случае задачи (1'), (2), когда Γ' является гладкой дугой и образ $\alpha(\Gamma')$ разбивает D на две подобласти. Как указано в [8], в этом случае задачу можно свести к обобщенной задаче Римана – Гильберта, к которой можно применить общие результаты [7]. Отметим в этом направлении работы [9] для систем, эллиптических по Дуглису – Ниренбергу и, в частности, для линеаризованной системы Стокса, [10] для системы Ламе плоской теории упругости и [11] для аналитических функций.

Обратимся к задаче (1), (2) в сформулированной общей постановке. Следуя методике [7], эту задачу редуцируем к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений, к которой применим общие результаты [12, 13].

Все рассмотрения будут вестись в весовом классе Гельдера $C^\mu_\lambda(\overline{D}; F)$, $0 < \mu < 1$, где весовой порядок λ представляет собой семейство λ_τ, $\tau \in F$ действительных чисел. Напомним [7], что при $\lambda = \mu$ (т.е. при $\lambda_\tau = \mu$, $\tau \in F$) это пространство совпадает с подпространством Гельдера $C^\mu(\overline{D})$ функций, обращающихся в точках $\tau \in F$ в нуль. В общем случае оно состоит из функций $\varphi(x) = \prod_F |x-\tau|^{\lambda\tau-\mu}\varphi_*(x)$, $\varphi_* \in C^\mu_\lambda$ с перенесенной нормой $|\varphi| = |\varphi_*|_{C^\mu}$.

Относительно весового порядка λ предполагается, что

$$\begin{aligned} &\lambda_\tau = \lambda_{\tau'} \quad \tau = \alpha(\tau' \pm 0) \in F, \\ &\lambda_{\tau'} < 0 \qquad \alpha(\tau' \pm 0) \in D. \end{aligned} \tag{3}$$

Это условие обеспечивает ограниченность оператора $\phi \to \phi \circ \alpha$ из $C^\mu_\lambda(\overline{D};F) \to C^\mu_\lambda(\Gamma;F)$, фигурирующего в (1).

Опишем соответствующие требования гладкости на Γ, α и a, a^0. Пусть $C^{n,\mu+0}$ означает объединение классов $C^{n,\mu+\varepsilon}$ по $\varepsilon > 0$. Тогда для любой гладкой дуги $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, не содержащей внутри себя точек $\tau \in F$, требуется, чтобы $\Gamma_0 \in C^{1,\mu+0}$, $\alpha \in C^{1,\mu+0}(\Gamma_0)$ и a, $a^0 \in C^{\mu+0}(\Gamma_0)$.

В малой окрестности F область D разбивается на попарно непересекающиеся криволинейные сектора D_τ с вершиной $\tau \in F$. Граница ∂D_τ составлена из двух гладких дуг с общим концом τ (боковые стороны сектора) и дугой окружности. Условимся вектор $q \in \mathbf{R}^2$ называть ассоциированным с сектором D_τ, если он касается его боковых сторон в точке τ, направлен внутрь, т.е. $\tau + q \cdot t \in D_\tau$ при малых $t > 0$. Пусть множество F состоит из m точек. Боковые стороны секторов D_τ, $\tau \in F$ занумеруем единым образом $\Gamma_{F,j}$, $j = 1,\dots,2m$ и введем их гладкие параметризации $\gamma_j\,[0,1] \to \Gamma_{F,j}$ класса $C^{1,\mu+0}$, считая точки $\gamma_j(0)$ принадлежащими F. Положим

$$\begin{aligned} &P_\tau = \{j | \gamma_j(0) = \tau\}, \quad P^0_\tau = \{s | (\alpha \circ \gamma_s)(0) = \tau\}, \\ &q_j = \gamma_j(0) \qquad\qquad q^0_s = (\alpha \circ \gamma_s)'(0). \end{aligned} \tag{4}$$

Очевидно, каждое множество P_τ состоит ровно из двух элементов, а некоторые из множеств P^0_τ могут оказаться пустыми. Ясно также, что векторы q^0_s, $s \in P^0_\tau$ и q_s, $s \in P_\tau$ ассоциированы с сектором D_τ. Из условия на сдвиг α следует, что векторы одной пары P_τ, а также векторы q_j, $j \in P_\tau$ и q^0_s, $s \in P^0_\tau$ не могут лежать на одном луче.

С каждым вектором $q = (q_1,q_2) \in R^2$, ассоциированным с сектором D_τ, свяжем матрицу $[q]^\zeta = (q_1 \cdot 1 + q_2 J)^\zeta$, где 1 означает единичную матрицу. Она понимается в смысле значения степенной функции

$$(q_1 + \nu q_2)^\zeta = |q_1 + \nu q_2|^\zeta e^{i\zeta \arg(q_1 + \nu q_2)},$$

аналитической по ν в полуплоскости $\operatorname{Im} \nu > 0$, от матрицы J. Предполагается, что ветвь аргумента $\arg(q_1 + \nu q_2)$ фиксирована и непрерывно зависит от q и ν, $\operatorname{Im}\nu > 0$. При фиксированном q матрица- функция $[q]^\zeta$ аналитична по ζ и ее определитель вычисляется по формуле $\det[q]^\zeta = \prod_{\nu\in\sigma(J)} (q_1 + \nu q_2)^{l_\nu \zeta}$, где l_ν – кратность собственного значения $\nu \in \sigma(J)$ матрицы J. Аналогичным образом понимается и матрица–функция $[\overline{q}]^\zeta$, определяемая по отношению к степенной функции

$$(q_1 + \overline{\nu}\, q_2)^\zeta = |q_1 + \nu q_2|^\zeta e^{-i\zeta \arg(q_1 + \nu q_2)}.$$

Каждую пару P_τ упорядочим и рассмотрим 2m×2m – матрицы $X(\zeta)$ и $X^0(\zeta)$ с элементами

$$
\begin{aligned}
&X_{sk}(\zeta)=(a\circ\gamma_s)(0)[q_s]^{\zeta}, \quad X_{sr}(\zeta)=\overline{(a\circ\gamma_s)}(0)\left[\overline{q_s}\right]^{\zeta}, \quad s\in P_\tau,\\
&X^0_{sk}(\zeta)=(a^0\circ\gamma_s)(0)\left[q^0_s\right]^{\zeta}, \quad X^0_{sk}(\zeta)=\overline{(a^0\circ\gamma_s)}(0)\left[\overline{q^0_s}\right]^{\zeta}, \quad s\in P^0_\tau,\\
&X_{sk}(\zeta)=X_{sr}(\zeta)=0, \quad s\notin P_\tau, X^0_{sk}(\zeta)=X^0_{sr}(\zeta)=0, \quad s\notin P^0_\tau,
\end{aligned} \tag{5}
$$

стоящими на столбцах с номерами k, r ∈ P_τ.

Очевидно, матрица X блочно – диагональна относительно разбиения множества {1,2,…, 2m} на пары P_τ, τ ∈ F, т.е. X_{kr} равно нулю, если номера k и r принадлежат различным парам. Условимся 2 × 2-диагональный блок (X_{kr}, k,r ∈ P_τ) обозначать $X(\zeta, P_\tau)$. Как функция переменной ζ он рассматривается на прямой Reζ = λ_τ.

Условимся весовой порядок λ рассматривать как функцию λ: k → $\lambda(\gamma_k(0))$, постоянную на парах P_τ разбиения P = (P_τ) множества {1,…,2m}. Рассмотрим разбиение (F_j) множества F такое, что τ ∈ F_j, α(τ ± 0) ∈ F (для одного из знаков) влечет α(τ ± 0) ∈ F_j. Тогда взамен первого условия в (3) можем потребовать, чтобы весовой порядок λ был постоянен на элементах этого разбиения. Общее значение λ на F_j обозначим λ_j. Пусть E_j состоит из пар P_τ, τ∈ F_j. Тогда каждое множество P^0_τ целиком содержится в некотором E_j. В соответствии с (5) отсюда следует, что 2m×2m-матрица X^0 блочно – диагональна относительно разбиения (E_j), ее диагональный блок $X(\zeta,E_j)$ рассматривается на прямой Reζ = λ_j.

Следующая теорема описывает критерий фредгольмовости задачи (1), (2) и формулу ее индекса.

Теорема 1. *Задача (1), (2) фредгольмова в классе $C^\mu_\lambda(\overline{D};F)$ тогда и только тогда, когда она нормального типа и det $(X+X^0)(\zeta, E_j) \neq 0$, Reζ =$\lambda_j$, j=1, … . Если эти условия выполнены, то при -1/2 < λ < 0 ее индекс дается формулой*

$$\eta(\lambda)=-\frac{1}{\pi}\arg\det a\big|_\Gamma + l(2-s_D)-\frac{1}{2\pi i}\sum_j \ln\frac{\det(X+X^0)(\zeta,E_j)}{\det Y(\zeta,E_j)}\Bigg|_{\operatorname{Re}\zeta=\lambda_j-i\infty}^{\lambda_j+i\infty}, -1/2<\lambda<0,$$

где матрица Y определяется аналогично X по отношению к a = 1.

В общем случае произвольного весового порядка индексы η(λ) и $\eta(\widetilde{\lambda})$ *задачи в классах, соответственно, C^μ_λ и $C^\mu_{\widetilde{\lambda}}$ связаны соотношением*

$$\eta(\lambda)-\eta(\widetilde{\lambda})=\sum\nolimits_j \eta(\lambda,\widetilde{\lambda}),$$

где $\eta_j(\lambda,\widetilde{\lambda})$ есть число нулей, взятое с учетом кратности, функции $\det(X + X^0)(\zeta;$ $E_l)$ *в полосе, заключенной между прямыми* Reζ = λ_j *и* Reζ = $\widetilde{\lambda}_j$, *взятое со знаком "+" при* $\lambda_j < \widetilde{\lambda}_j$, *и со знаком "-" в противном случае.*

Аналогично [7] теорему 1 дополним результатами об асимптотике и гладкости решения задачи (1), предполагая задачей ее нормального типа. Однако условие фредгольмовости может нарушаться для одного из блоков $\mathcal{K}(\zeta,E_j)$, скажем для $\mathcal{K}(\zeta,E_1)$. Матрица – функция $\mathcal{K}(\zeta,E_1)$ аналитична в некоторой открытой полосе λ_1- ε < Reζ < λ_1 + ε и имеет вид x(ζ) + $\overline{x}(\zeta)$. Поэтому, если функция $\det\mathcal{K}(\zeta+u)$ обращается в нуль при u = 0, то этим свойством обладает и $\det\mathcal{K}(\overline{\zeta}+u)$. При этом порядки полюсов r_ζ и $r_{\bar\zeta}$ матриц – функций $\mathcal{N}^{-1}(\zeta+u)$ и $\mathcal{N}^{-1}(\bar\zeta+u)$ совпадают. Если $\det\mathcal{N}(\zeta,E_t)\neq 0$, то определению полагаем $r_\zeta = 0$.

Теорема об асимптотике касается поведения в секторах D_τ, $\tau\in F_1$ произвольного решения $\phi\in C^\mu_{\lambda-0}(\bar D;F)$ при соответствующих требованиях на поведение функций $(f\circ\gamma_j)(t)$, $j\in E_1$ при $t\to 0$. Под классом $C^\mu_{\lambda-0}$ здесь и ниже понимается объединение $C^\mu_{\lambda-\varepsilon}$ по $\varepsilon>0$. Аналогично $C^\mu_{\lambda+0}=\bigcap C^\mu_{\lambda+\varepsilon}$.

Теорема 2. *Пусть для фиксированного* ζ, $\mathrm{Re}\zeta=\lambda_1$, *функции*

$$(f\circ\gamma_j)(t)-\mathrm{Re}\sum_{i=0}^{k}(\ln^i t)t^\zeta c_{ij}\in C^\mu_{\lambda+0}([0,1];0),\qquad j\in E_1$$

с некоторыми $c_{ij}\in\mathbf{R}^l$. *Тогда для любого решения* $\phi\in C^\mu_{\lambda-0}(D;F)$ *задачи (1), (2) найдутся такие* $c^\pm_{ij}\in\mathbf{C}^l$, $\tau\in F_1$, $j=1,\dots,k+r_s$, *что*

$$\phi(x)=\sum_{j=0}^{k+r_s}([z-\tau]^\zeta c^+_{\tau j}+[z-\tau]^{\bar\zeta}c_{\tau j})(\ln[z-\tau])^j\in C^\mu_{\lambda+0}(\bar D_\tau;\tau),\tau\in F_1$$

Теорему гладкости сформулируем по отношению одной из гладких дуг Γ_0, составляющих Γ. Более точно, пусть Γ_0 есть замыкание одной из связных компонент $\Gamma\setminus F$. Множество F_0 концов этой дуги может состоять как из двух, так и из одной точки. В последнем случае Γ_0 отнесем к типу "сомкнутой" дуги.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 1 дуга* $\Gamma_0\in C^{n,\varpi+0}$, *сдвиг* $\alpha\in C^{n,\varpi+0}$ (Γ_0) *и коэффициенты* a, $a^0\in C^{n,\varpi+0}$ (Γ_0) *Тогда при* $f\in C_l{}^{n,\mu}(\Gamma_0;F_0)$ *любое* $\phi\in C^\mu_\lambda(\bar D;F)$ *задачи (1), (2) обладает аналогичным свойством* $\phi\in C^{n,\mu}_\lambda(\Gamma_0;F_0)$.

Доказательство теорем 1 – 3 опирается на эквивалентную редукцию задачи (1), (2) к системе сингулярных интегральных уравнений на контуре Г.

Как отмечено в [6], все основные факты теории аналитических функций, основанные на интеграле Коши, распространяются и на функции, аналитические по Дуглису. Роль интеграла типа Коши для этих функций играет интеграл

$$(I\varphi)(x)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma[dy][y-x]^{-1}\varphi(y),x\in D,$$

с матричным ядром $[y-x]^{-1}$, где контур Г ориентирован так, что область D остается слева и приняты обозначения $[x]=x_1\cdot 1+x_2J$, $x\in\mathbf{R}^2$, $[dy]=(dy_1)\cdot 1+(dy_2)J$. Согласно [7] оператор I ограничен $C^\mu_\lambda(\Gamma;F)\to C^\mu_\lambda(\bar D;F)$, $-1<\lambda<0$ и имеет место формула Сохоцкого-Племеля

$$(I\varphi)^+(x)=\varphi(x)+(K\varphi)(x),x\in\Gamma, \qquad \textbf{(6)}$$

где $(K\varphi)(x)$ соответствует сингулярному интегралу (4) для $x\in\Gamma\setminus F$.

Если область D неограниченна (этот факт указываем записью $\infty\in D$), то функция $(I\varphi)(x)$ исчезает на ∞ и в окрестности ∞ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по степеням $[x]^{-k}$, $k\geq 1$. Аналогичное разложение (по степеням $[x]^{-k}$, $k\geq 0$) справедливо и для любой аналитической по Дуглису функции $\phi(x)$, ограниченной на ∞. В соответствии с этим класс $C^\mu_\lambda(\bar D;F)$ для таких функций можно определить по отношению к ограниченной области $\bar D\cap\{|x|\leq R\}$, где R достаточно велико.

В основе сведения задачи (1), (2) к системе сингулярных интегральных уравнений лежит следующий аналог теоремы Векуа – Мусхелишвили [7].

Теорема 4. *Пусть матрица J треугольна и -1/2 < λ < 0. Тогда каждая аналитическая по Дуглису функция* $\phi \in C_\lambda^\mu(\overline{D};F)$ *представима в виде*

$$\phi = I\varphi + \xi, \tag{7}$$

где вектор-функция $\varphi \in C^\mu(\Gamma;F)$ *вещественна и* $i\xi \in \mathbf{R}^1$ ($\xi \in \mathbf{C}^1$) *в случае* $\infty \notin D$ ($\infty \in D$)

Если в этом представлении $\phi = 0$, *то* $\xi = 0$ *и функция* φ *постоянна на связных компонентах контура Г и при* $\infty \notin D$ *обращается в нуль на его "внешней" компоненте, охватывающей остальные.*

Обозначим Γ^j, $j = 1, \dots, s_D$ все связные компоненты Г, считая Γ^1 при $\infty \notin D$ внешним контуром. Тогда функцию φ в представлении (7) можно однозначно фиксировать условием

$$\int_{\Gamma^j} \varphi(y) ds_y = 0, \tag{8}$$

где $j = 2, \dots, s_D$ при $\infty \notin D$ и $j=1, \dots, s_D$ при $\infty \in D$.

Требование треугольности матрицы J в теореме не слишком ограничительно. В самом деле, пусть обратимая матрица B такова, что матрица $J_0=B^{-1}JB$ треугольна (например, имеет жорданову форму). Тогда линейная подстановка $\phi = B\phi_0$ позволяет свести систему (2) к случаю матрицы J_0. В этой связи ниже матрицу J предполагаем треугольной.

Редукцию задачи для простоты осуществим в весовом классе C_λ^μ, $-1/2 < \lambda < 0$. Общий случай сводится к нему с помощью весовой подстановки. В силу (6), (7) задача (1) равносильна системе

$$\mathrm{Re}\{a(\varphi + K\varphi) + a^0(I\varphi)\circ\alpha + (a + a^0)\xi\} = f \tag{9}$$

относительно вещественной l–вектор–функции $\varphi \in C_\lambda^\mu(\Gamma;F)$ и постоянного l-вектора ξ. При дополнительном условии (9) эта система равносильна задаче (1), (2).

Обозначим левую часть (9) в виде $N\varphi + \mathrm{Re}(a+a^0)\xi$ с **R**-линейным оператором N. Он имеет вид $N\varphi = \mathrm{Re}\, M\varphi$, где оператор M линеен над полем **C**. Этим же свойством обладает и оператор $\overline{M}\varphi = \overline{M\overline{\varphi}}$, где черта справа означает комплексное сопряжение. В случае $\varphi = \overline{\varphi}$ вещественных функций $2N\varphi = M\varphi + \overline{M}\varphi$. Таким образом, $2N = a(1 + K) + \overline{a}(1 + \overline{K}) + a^0 K^0 + \overline{a}^0 \overline{K}^0$, где для краткости положено $K^0\varphi = (K\varphi)\circ\alpha$. В явной форме интегральные операторы $\overline{K}$ и $\overline{K}^0$ определяются поинтегральными выражениями $-(\pi i)^{-1}\overline{[dy][y-x]}^{-1}$ и $-(\pi i)^{-1}\overline{[dy][y-\alpha(x)]}^{-1}$ соответственно.

Согласно [7,12] сингулярный оператор K принадлежит алгебре $\mathcal{K}(C_\lambda^\mu, -1 < \lambda < 0)$. При этом $K + \overline{K} \in \mathcal{K}_0$ и 2m×2m-матрица ($\mathcal{K}_{sj}$) концевого символа определяется равенством

$$\pm(i\sin\pi\zeta)\mathcal{K}_{sj}(\zeta) = \begin{cases} \cos\pi\zeta, & s = j, \\ \{-[q_s][q_j]^{-1}\}^\zeta, & \gamma_s(0) = \gamma_j(0), s \neq j, \\ 0, & \end{cases}$$

где выбирается верхний (нижний) знак, если параметризация γ_j не меняет (меняет) ориентацию Г. Кроме того, аналитическая функция $u\zeta$, значение которой от матрицы в фигурных скобках фигурирует в правой части формулы, определяется выбором аргумента $|\arg u| < \pi$.

Аналогичный результат оказывается справедливым и по отношению к оператору $K^0\varphi=(I\varphi)\circ\alpha$.

Лемма 1. *Интегральный оператор* $K^0 \in K(C^{\mu}_{\lambda}, -1<\lambda<0)$ *и его концевой символ дается равенством*

$$\pm(i\sin\pi\zeta)\hat{K}^0_{sj}(\zeta) = \begin{cases} \left\{-\left[q^0{}_s\right]\left[q_j\right]^{-1}\right\}^{\zeta}, & (\alpha\circ\gamma_s)(0)=\gamma_j(0) \\ 0, & \end{cases}.$$

Обратимся к сингулярному оператору N. Из сказанного выше с учетом результатов [12] заключаем, что этот оператор принадлежит алгебре $K(C^{\mu}_{\lambda}, E)$. При этом его концевой символ $\hat{N}$ блочно-диагонален относительно разбиения E и дается равенством $2\hat{N} = \hat{a}(1+K)^{\wedge} + \hat{\bar{a}}(1+\overline{K})^{\wedge} + \hat{a}^0\hat{K}^0 + \hat{\bar{a}}^0\hat{\overline{K}}{}^0$.

Отметим, что $2m\times 2m$-матрицы $\hat{a}$ и $\hat{a}^0$ диагональны с постоянными элементами, соответственно, $(\alpha\circ\gamma_j)(0)$ и $(a^0)\circ\gamma_j)(0)$ вдоль диагонали. Для вычисления концевого символа от операторов $\overline{K}$ и $\overline{K}^0$ следует воспользоваться соотношением $\hat{\overline{M}}(\zeta) = \overline{\hat{M}}(\zeta)$, где черта справа означает инволюцию сопряжения в классе функций $x(\zeta)$ определяемую соотношением $\bar{x}(\zeta) = \overline{x(\bar{\zeta})}$ с комплексным сопряжением справа. Применительно к концевым символам операторов K и K^0 эта инволюция соответствует замене $i\sin\pi\zeta$ на $-i\sin\pi\zeta$ и матрицы J на $\bar{J}$ в определении [q].

Очевидно, система (8), (9) и оператор N фредгольмов эквивалентны и их индексы связаны соотношением η = ind N + (2 – s_D)l. Поэтому остается к N применить соответствующие результаты [13] и осуществить надлежащие преобразования над концевым символом $\hat{N}$, с точностью до ненулевого множителя не меняющих его определителя.

4. Перенумеруем точки $\tau_1, \dots, \tau_m$ множества F. Тогда, исходя из $2m\times 2m$ – матрицы $x = (x_{ss'})_1^{2m}$, можем ввести 2×2 – матрицу $x_{(ij)}$, составленную из элементов $x_{ss'}$ на пересечение строк $s \in P_{\tau_i}$ и столбцов $s' \in P_{\tau_j}$. В результате x можем рассматривать как блочную $m\times m$ – матрицу $(x_{(ij)})_1^m$. Согласно (4), (5) в этих обозначениях для упорядоченной пары $P_{\tau_i} = \overline{k,r}$ имеем:

$$X_{(ii)11} = (a\circ\gamma_k)(0)[q_k]^{\zeta}, \qquad X_{(ii)21} = (a\circ\gamma_r)(0)[q_r]^{\zeta},$$

$$X^0_{(ij)11} = \begin{cases} (a^0\circ\gamma_k)(0)[q^0_k]^{\zeta}, & (\alpha\circ\gamma_k)(0)=\tau_j, \\ 0, & \end{cases}$$

$$X^0_{(ij)21} = \begin{cases} (a^0\circ\gamma_r)(0)[q^0_r]^{\zeta}, & (\alpha\circ\gamma_r)(0)=\tau_j, \\ 0, & \end{cases}$$

и $X_{(ij)} = 0$ при $i \neq j$. Что касается второго столбца матриц $X_{(ii)}$ и $X^0_{(ij)}$, то он получается из первого с помощью операции $y(\zeta) \to \bar{y}(\zeta) = \overline{y(\bar{\zeta})}$ над его элементами.

Если блочная матрица $X^0 = \left(X^0_{(ij)}\right)$ треугольна и все ее диагональные элементы $X^0_{(ii)} = 0$, то определители матриц X и $X + X^0$ совпадают. Как легко проверить, подобная ситуация возникает для задачи (1'), когда Г' является гладкой дугой, не содержащей внутри себя точек $\tau \in F$, и $\Gamma' \cap \alpha(\Gamma') = \varnothing$. В этом случае нелокальный член в краевом условии (1') никакого влияния не оказывает и в формировке теорем 1-3 можно положить $a^0=0$.

Заметим, что постановка задачи (1'), предложенная А.В. Бицадзе и А.А. Самарским [1], удовлетворяет условию $\Gamma' \cap \alpha(\Gamma') = \varnothing$.

Библиографический список

1. Бицадзе, А. В. [Текст] / А. В. Бицадзе, А. А. Самарский // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 185, №. 4 – С. 739-740.
2. Ройтберг, Я. А. [Текст] / Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель // Доклады АН СССР. – 1970. – Т. 192, № 3. – С. 511-513.
3. Бицадзе, А. В. [Текст] / А. В. Бицадзе // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 277, № 1. – С. 17-19.
4. Скубачевский, А. Л. [Текст] / А. Л. Скубачевский // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 9. – С. 1590-1599.
5. Скубачевский, А. Л. [Текст] / А. Л. Скубачевский // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 278, № 4. – С. 813-819.
6. Солдатов, А. П. [Текст] / А. П. Солдатов // Известия АН СССР. – 1991. – Т. 55, № 5. – С. 1070-1100. – (Серия «Математика»).
7. Солдатов А. П. [Текст] / А. П. Солдатов // Известия АН СССР. – 1992. – Т. 56, № 3. – С. 566-604.
8. Солдатов А.П. [Текст] / А. П. Солдатов // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 299, № 4. – С. 825-828.
9. Жура, Н. А. [Текст] / Н. А. Жура // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 81-91.
10. Сакс, Е. А. [Текст] / Е. А. Сакс // Современные проблемы прочности : науч. тр. III Междунар. сим. им. В. С. Лихачева, Ст. Русса, 1999. – Новгород, 1999. – Т. 1. – С. 126-130.
11. Сидорова, И. В. [Текст] / И. В. Сидорова// Известия вузов. – 1995. – № 8 (399). – С. 50-56. – (Серия «Математика»).
12. Солдатов, А. П. [Текст] / А. П. Солдатов // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 37, № 6. – С. 825-838.
13. Солдатов, А. П. [Текст] / А. П. Солдатов // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т 37, № 10. – С. 1364-1376.