ствуют на всей оси. Основное свойство амплитуд функций отклика на когерентный ток заключается в том, что их полюсы определяют непрерывный спектр квазилокальных состояний, а не дискретный спектр, который дают полюсы обычных амплитуд рассеяния.

Библиографический список

1. Л Д Ландау, Е М Лифшиц. Квантовая механика. – М.: Наука, 1989. – 768 с.
2. А М Косевич, С. Е. Савотченко ФНТ **25** 737 (1999).
3. А. М. Косевич. ЖЭТФ **115** 306 (1999).
4. A. N. Darynskii and G. A. Maugin. Wave Motion **23** 363 (1996).
5. A. M Kosevich and A. V. Tutov Phys. Lett A **248** 271 (1998).
6. А М. Косевич, Д. В. Мацокин, С. Е. Савотченко. ФНТ **25** 63 (1999).
7. С. В. Тарасенко. ФНТ **24** 219 (1998); ФНТ **24** 832 (1998)
8. А. И. Буздин В. Н. Меньшов, В В. Тугушев ЖЭТФ **91** 2204 (1986)
9. А М. Косевич, А. В. Тугов. ФНТ **19** 1273 (1993)

А. М. Косевич, Д В. Мацокин, С. Е Савотченко. ФНТ **24** 992 (1998).

УДК 530 145,539 12

К ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В. В. Сыщенко

Белгородский государственный университет

Н. Ф. Шульга

Харьковский физико-технический институт

Рассмотрены возможности применения метода канонических преобразований к квазиклассической теории излучения спинорных частиц во внешнем поле. Получено выражение для сечения излучения, в котором в конечном состоянии фиксируется не только состояние излученного фотона, но и состояние излучающей частицы; рассмотрены некоторые предельные случаи. Полученные формулы могут быть использованы при моделировании процесса когерентного излучения релятивистских электронов в кристаллах.

В работе Швингера [1] был предложен оригинальный метод учета первой квантовой поправки, связанной с отдачей при излучении, к интенсивности синхротронного излучения релятивистских электронов. Метод основывается на рассмотрении процесса излучения в гайзенберговском представлении квантовой электродинамики. Это позволяет в общем виде выполнить суммирование по конечным состояниям излучающей частицы и выразить вероятность излучения через классическую траекторию частицы в постоянном магнитном поле. Этот метод впоследствии был обобщен на случай, когда эффект отдачи при излучении не мал и когда излучение происходит в произвольном внешнем поле [2]. Основными элементами этой теории, однако, по-прежнему являлись рассмотрение процесса излучения в гайзенберговском представлении и суммирование по конечным состояниям излучающей частицы.

В работе [3, 4] был предложен метод канонических преобразований для описания процесса излучения релятивистских частиц в квазиклассическом приближении, позволяющий учесть как состояние фотона, так и электрона в конечном состоянии. При этом сечение излучения с учетом эффекта отдачи при излучении было выражено через классическую траекторию частицы во внешнем поле. Этот метод близок к методу классических траекторий, который используется в теории столкновений сложных молекул с учетом неупругих процессов [5].

В [6] был рассмотрен ряд вопросов, связанных с применением метода классических траекторий к описанию излучения во внешнем поле бесспиновой частицы с учетом эффекта отдачи при излучении. Основное внимание при этом было обращено на вопрос о появлении классических траекторий в квантовой теории излучения и на вопрос о реализации закона сохранения энергии при излучении в данном подходе.

В настоящей работе результаты [6] обобщаются на случай излучения в неоднородном внешнем поле релятивистских электронов (т.е. спинорных частиц). Получены квазиклассические формулы для сечения излучения, учитывающие состояния конечных частиц. Рассмотрены некоторые предельные случаи полученных выражений. Рассмотрение, как и в случае бесспиновой частицы, проводится с учетом эффекта отдачи при излучении. При этом динамика частицы во внешнем поле описывается в рамках геометрической оптики.

Вероятность излучения фотона релятивистским электроном во внешнем поле при переходе электрона из начального состояния с импульсом $\vec{p}_i$ в конечное состояние с импульсом $\vec{p}_f$ определяется в квантовой электродинамике формулой [7]:

$$dw_{fi} = \frac{e^2}{4\pi^2}\frac{d^3k}{w}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\left|M_{fi}\right|^2 \qquad (1)$$

где ω и $\vec{k}$ – частота и волновой вектор излученного фотона, M_{fi} - матричный элемент перехода,

$$M_{fi} = \int dt\, d^3r\, \overline{\psi}_f(\vec{r},t)e_\mu\gamma^\mu \times$$
$$\times \exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right]\psi_i(\vec{r},t)\,. \qquad (2)$$

Здесь e_μ - 4-вектор поляризации фотона, ψ_i и ψ_f – волновые функции частицы в рассматриваемом внешнем поле (для простоты мы будем рассматривать излучение в стационарном потенциальном внешнем поле). Здесь используется система единиц $c = \hbar = 1$.

В квазиклассическом приближении волновая функция частицы во внешнем поле может быть записана в виде [4, 8]

$$\psi(\vec{r},t) \approx \varphi(\vec{r},t)u(\vec{r},t)\,, \qquad (3)$$

где $\varphi(\vec{r},t)$ – волновая функция бесспиновой частицы

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2(\varepsilon - U(\vec{r}))}}\left|\frac{\partial^2 S}{\partial\vec{r}\partial\vec{p}}\right|^{1/2}\exp(iS) \qquad (4)$$

($U(\vec{r})$ – потенциальная энергия взаимодействия частицы с внешним полем) и $u(\vec{r},t)$ - биспинор, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{du}{dt} = \frac{e}{4(\varepsilon - U)}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}u\,.$$

В случае стационарного потенциального внешнего поля последнее уравнение принимает вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{e}{2(\varepsilon - U)}\vec{\alpha}\vec{E}u\,. \qquad (5)$$

Здесь $\vec{p}$ – импульс частицы до или после рассеяния в поле $U(\vec{r})$, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $e\vec{E} = -\nabla U(\vec{r})$, $\left|\partial^2 S/\partial\vec{r}\partial\vec{p}\right|$ – детерминант матрицы $\left(\partial^2 S/\partial r_i\partial p_k\right)$, $S(\vec{r},\vec{p},t)$ – классическое действие частицы в этом поле и $\vec{\alpha} = \gamma_0\vec{\gamma}$ (γ_0 и $\vec{\gamma}$ – дираковские гамма-матрицы).

Подставляя φ_i и φ_f в матричный элемент и поступая так, как для бесспиновой частицы [4, 6], получим

$$M_{fi} = \int dt\frac{d^3p\,d^3x}{(2\pi)^3}\exp\left\{i(\vec{p}-\vec{p}\,')\vec{x} - i\chi(t)\right\} \times$$
$$\times M^{(s)}(t)S_{pp_i}\,, \qquad (6)$$

где $\vec{p}\,' = \vec{p}_f + \vec{k}$, $\vec{x}$ – «конечная точка» траектории,

$$\vec{x} = \frac{\partial S_p(\vec{R},t)}{\partial\vec{p}\,'} = \frac{\partial S_p(\vec{R})}{\partial\vec{p}\,'} - \vec{v}_{p'}t\,, \qquad (7)$$

$S_{p'}$ – классическое действие частицы, имеющей после рассеяния импульс $\vec{p}\,'$,

$$\chi(t) = -\frac{\varepsilon_{p'}}{\varepsilon_{p'} - \omega}(\omega t - \vec{k}\vec{R}(\vec{x} + \vec{v}_{p'}t) + \vec{k}\vec{x})\,, \qquad (8)$$

S_{pp_i} – матрица рассеяния бесспиновой частицы и

$$M^{(s)}(t) = \frac{\overline{u}_f(t)\hat{e}u_i(t)}{2\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_f}}\,. \qquad (9)$$

Соотношение (7) определяет траекторию электрона, имеющего при $t \to +\infty$ импульс $\vec{p}'$, причем

$$\vec{R}(t,\vec{x},\vec{p}') = \vec{R}(\vec{x}+\vec{v}_{p'}t,\vec{p}'). \qquad (10)$$

Рассмотрим теперь спинорные части начальной и конечной волновых функций. Уравнение движения в поле $\vec{E}(\vec{r})$ имеет вид:

$$\dot{\vec{v}} = \frac{1}{\varepsilon}\left(e\vec{E} - \vec{v}\frac{d\varepsilon}{dt}\right), \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = e\vec{v}\vec{E}.$$

Тогда $$e\vec{E} = \frac{d}{dt}\varepsilon\vec{v},$$

и уравнение для биспинора принимает вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2(\varepsilon - U)}\vec{\alpha}\frac{d}{dt}(\varepsilon\vec{v})u.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде разложения

$$u(t) = u_0 + u_1 + \ldots, \quad u_n \sim \varepsilon^n.$$

Так как в нашем случае

$$e\vec{E}(\vec{R}(t)) = \frac{d}{dt}\varepsilon_{p'}\vec{v}_{p'}(t),$$

то для начальной частицы

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2(\varepsilon_0 - U)}\vec{\alpha}\frac{d}{dt}(\varepsilon_{p'}\vec{v}_{p'}(t))u_i,$$

и первые члены разложения решения уравнения (5) по малым углам рассеяния электрона в поле $U(\vec{r})$

$$u_i(t) \approx \left[1 + \frac{\varepsilon_{p'}}{2\varepsilon_0}\vec{\alpha}(\vec{v}_{p'}(t) - \vec{v}_0)\right]u_i. \qquad (11\text{ а})$$

Для конечной частицы

$$\frac{du_f}{dt} = \frac{1}{2(\varepsilon_f - U)}\vec{\alpha}\frac{d}{dt}(\varepsilon_{p'}\vec{v}_{p'}(t))u_f \quad \text{и}$$

$$u_f(t) \approx \left[1 + \frac{\varepsilon_{p'}}{2\varepsilon_f}\vec{\alpha}(\vec{v}' - \vec{v}_{p'}(t))\right]u_f. \qquad (11\text{ б})$$

Здесь u_i и u_f – плосковолновые биспиноры, соответствующие начальному и конечному состояниям электрона, $\vec{v}_{p'}(t)$ – вектор скорости электрона в поле $U(\vec{r})$, удовлетворяющий асимптотикам

$$\vec{v}_{p'} \approx \begin{cases} \vec{v}_0, & t \to -\infty \\ \vec{v}', & t \to +\infty \end{cases} \qquad (12)$$

Подставляя (11) в (9), получим для малых углов рассеяния (с учетом $\varepsilon_{p'} \approx \varepsilon_0$)

$$2\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_f}\,M^{(s)} \approx \bar{u}_f\left\{\hat{e} + \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_f}\vec{\alpha}(\vec{v}_{p'}(t) - \vec{v}')\hat{e} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\hat{e}\vec{\alpha}(\vec{v}_{p'}(t) - \vec{v}_0)\right\}u_i. \qquad (13)$$

Отметим, что согласно (10)
$M^{(s)}(t,\vec{x}) = M^{(s)}(\vec{x}+\vec{v}_{p'}t)$.

Выполнив в (6) интегрирование по $\dot{x}$, запишем матричный элемент в виде (см. [4])

$$M_{fi} = \int dt\, \Phi\left\{i\frac{\partial}{\partial t}\right\}S_{pp_i}\Big|_{\vec{p}=\vec{p}'}, \qquad (14)$$

где $\vec{p}' = \vec{p}_f + \vec{k}$ – суммарный импульс электрона и фотона в конечном состоянии и $\Phi\{\vec{x}\}$ – функционал, определяемый классической траекторией частицы во внешнем поле $\vec{R}(t,\vec{x},\vec{p}')$:

$$\Phi\{\vec{x},t\} = e^{-i\chi(\vec{x},t)}M^{(s)}(\vec{x},t). \qquad (15)$$

Входящая в (14) матрица рассеяния может быть записана в виде [9]

$$S_{pp_0} = \int d\tau d^2\rho \exp\{i[(\varepsilon_p - \varepsilon_0)\tau - \vec{p}\vec{r}]\}\varphi_i(\vec{r}). \qquad (16)$$

В приближении геометрической оптики действие входящего в (14) оператора $i\partial/\partial\vec{p}$ может быть распространено только на экспоненциальный фактор (16). В результате простых преобразований (см. [6]) получим

$$M_{fi} = 2\pi\delta(\varepsilon_f + \omega - \varepsilon_i)\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f}} \times$$
$$\times \int d^2\rho \exp(-i\vec{p}'\vec{r})\varphi_i(\vec{r})I^{(s)}(\vec{r},\vec{p}'), \qquad (17)$$

где $\delta(\varepsilon_f + \omega - \varepsilon_i)$ – дельта-функция, выражающая закон сохранения энергии при излучении и

$$I^{(s)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i}}\int dt\ M^{(s)}(\vec{v}(\vec{r}+\vec{v}_{p'})) \times$$
$$\exp\left\{i\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f}\left[\omega t - \vec{k}\vec{R}(\vec{r}+\vec{v}_{p'}t) + \dot{\vec{k}}\,\vec{r}\right]\right\}. \qquad (18)$$

Переходя в (1) от вероятности к сечению излучения, получим после снятия дельта-функции $\delta(\varepsilon_f + \omega - \varepsilon_i)$ следующее выражение для сечения:

$$d\sigma_{fi} = e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{d^2 p_{f\perp}}{(2\pi)^2} \times$$

$$\times \left| \int d^2\rho \exp(-i\vec{p}'\vec{r}) \varphi_i(\vec{r}) I^{(s)}(\vec{r}) \right|^2, \quad (19)$$

где $\vec{k}_\perp$ и $\vec{p}_{f\perp}$ – составляющие импульсов фотона и конечного электрона $\vec{k}$ и $\vec{p}_f$, ортогональные $\vec{p}_i$.

Формула (19) описывает излучение релятивистского электрона с учетом отдачи при излучении и поляризационных состояний начальной и конечных частиц. Она отличается от соответствующего выражения для бесспиновой частицы (см. формулу (16) работы [6]) только тем, что в последнем случае в подынтегральное выражение (18) вместо $M^{(s)}(\vec{v}(t))$ входит множитель.

Рассмотрим теперь некоторые предельные случаи формулы (19).

В дипольном приближении [8], когда угол рассеяния электрона в пределах длины формирования излучения мал по сравнению с характерным углом излучения релятивистской частицы, величина $I^{(s)}$ может быть выражена через Фурье-компоненту поперечной составляющей ускорения электрона:

$$I_d^{(s)} \approx \frac{i}{2q} \bar{u}_f \left[\frac{\vec{k}\vec{W}}{\varepsilon_f q} \hat{e} - \frac{\hat{W}\hat{k}\hat{e}}{2\varepsilon_f} + \frac{\hat{e}\hat{W}\hat{\alpha}}{2\varepsilon_i} \right] u_i, \quad (20)$$

где

$$q = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f}(\omega - \vec{k}\vec{v}')$$

и $$\vec{W}(q,\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \dot{\vec{v}}_\perp(\vec{r} + \vec{v}'t) e^{iqt}. \quad (21)$$

Выражение $I_d^{(s)}$ имеет ту же структуру, что и соответствующее выражение для матричного элемента излучения, полученное в борновском приближении при малых значениях переданного импульса. Поэтому при проведении процедуры усреднения сечения излучения по поляризационным состояниям частиц в дипольном приближении можно воспользоваться результатами борновского приближения. С учетом сказанного после простых преобразований выражение для сечения излучения (усредненное по поляризациям начального электрона и просуммированное по поляризациям конечного электрона) можно привести к виду

$$d\sigma = e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \int d^2\rho |\varphi_i(\vec{r})|^2 |I(q,\vec{\rho})|^2, \quad (22)$$

где

$$|I(q,\vec{\rho})|^2 = \frac{2}{q} \left\{ \left(\vec{e}\cdot\vec{W} + \vec{e}\cdot\vec{v}\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f}\frac{\vec{k}\cdot\vec{W}}{q} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \vec{e}^{\,2} \frac{\omega^2}{4\varepsilon_i\varepsilon_f} |\vec{W}|^2 \right\},$$

где вектор $\vec{v}$ направлен вдоль $\vec{p}_i$.

В квазиклассическом приближении

$$|\varphi_i(\vec{r})|^2 \approx \left| \frac{\partial^2 S_{p_i}(\vec{r})}{\partial\vec{r}\partial\vec{p}_i} \right| = \left| \frac{\partial\vec{r}_0}{\partial\vec{r}} \right|,$$

поэтому от интегрирования по переменным $\vec{\rho} = (x, y)$ в (22) можно перейти к интегрированию по прицельным параметрам $\vec{\rho}_0 = (x_0, y_0)$ (переменные $\vec{\rho}$ и $\vec{\rho}_0$ относятся к плоскостям, ортогональным импульсу $\vec{p}_i$ и расположенным после и перед областью действия на частицу внешнего поля). В результате такого перехода получим

$$d\sigma = e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \int d^2\rho_0 |I(q,\vec{\rho}_0)|^2. \quad (23)$$

При $\omega \ll \varepsilon$ эта формула совпадает с соответствующим выражением классической электродинамики для эффективности излучения.

После суммирования (23) по поляризациям излученного фотона и интегрирования по углам излучения приходим к следующему выражению для сечения излучения:

$$d\sigma = \frac{e^2}{\pi m^2} \frac{d\omega}{\omega} \varepsilon_f^2 \times$$

$$\times \int_\delta^\infty \frac{dq}{q^2} \left[1 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_i\varepsilon_f} - 2\frac{\delta}{q}\left(1 - \frac{\delta}{q}\right) \right] \times$$

$$\times \int d^2\rho_0 |\vec{W}(q,\vec{\rho}_0)|^2, \quad (24)$$

где $\delta = \omega m^2 / 2\varepsilon_i\varepsilon_f$ – минимальное значение величины q.

При выводе приведенных выше формул не был использован конкретный закон движения электрона во внешнем поле, поэтому они могут быть использованы при рассмотрении излучения электрона в полях сложной конфигурации, таких, например, как поле кристаллической решетки. Требуется только, чтобы выполнялось условие дипольности излучения, и чтобы энергия электрона была достаточно велика. Этими формулами можно воспользоваться, в частности, для моделирования процесса когерентного излучения релятивистских электронов в кристаллах.

Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ (проект 98-02-16160) и Министерства образования РФ (проект 97-0-143-5).

Библиографический список

1. Schwinger J. // Proc. Nat. Acad. Sci., 1954, V. 40. P. 132.
2. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973, 374 с.
3. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. // ЖЭТФ, 1991. – Т. 100. С. 791.
4. Akhiezer A. I., Shul'ga N. F. // Phys. Reports, 1993. – V. 234. – P. 297.
5. Miller W. H. // Adv. In Chemical Phys., 1974. V. 25. – P. 69.
6. Шульга Н. Ф., Сыщенко В. В. // Поверхность, 1999, № 5-6. – С. 110.
7. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1981. – 432 с.
8. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе. М.: Наука, 1993. - 344 с.
9. Бондаренко Н. В., Шульга Н. Ф. // Теор. и матем. физика, 1998. Т. 115. – С. 280.

ON THE THEORY OF RADIATION OF RELATIVISTIC ELECTRONS IN QUASICLASSICAL APPROXIMATION

N. F. Shul'ga, V. V. Syshchenko
Belgorod State University, Russia.

The possibility of application of canonical transformations method to the quasiclassical theory of radiation of relativistic particles in crystal is considered. The formula for radiation cross section with fixed states of both emitted photon and radiating particle imn the final state is obtained. Some limitation cases of formulae obtained are considered. The results can be used in the numerical simulation of the coherent radiation process of relativistic electrons in crystals.

УДК 530 145,539 12

ИОНИЗАЦИОННЫЕ ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, РОЖДАЮЩЕЙСЯ В ВЕЩЕСТВЕ

В. В. Сыщенко, В. Г. Сыщенко
Белгородский государственный университет
Н. Ф. Шульга
Харьковский физико-технический институт

Рассмотрены ионизационные потери энергии образующегося в веществе быстрого электрона. Показано, что для прицельных параметров, вносящих основной вклад в ионизационные потери энергии, существенна интерференция собственного кулоновского поля частицы и излученной ею электромагнитной волны. Установлено, что данный эффект практически не оказывает влияния на ионизационные потери энергии частицы.

При образовании в веществе высокоэнергетической заряженной частицы (например, компоненты электронно-позитронной пары) окружающее ее электромагнитное по-