УДК 621.396.2

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИГНАЛЬНЫХ БАЗИСОВ ВЕЙЛЯ-ГЕЙЗЕНБЕРГА ДЛЯ OFDM СИСТЕМ

В. П. Волчков, Д. Ю. Казаков

В последнее время широкое распространение получила технология мультиплексирования с ортогональным частотным разделением (OFDM) [1, 2].

К преимуществам данной технологии относятся: возможность эффективной борьбы с межсимвольной интерференцией в частотно-селективных каналах с релеевскими замираниями, устойчивость к импульсным помехам и высокая спектральная эффективность. Последнее обеспечивается благодаря плотной упаковке по частоте поднесущих каналов и возможности использования высоких индексов модуляции. Все указанные достоинства послужили причиной того, что технологию OFDM выбрали в качестве основы для реализации беспроводных сетей передачи данных: стандарты IEEE 802.11a, IEEE 802.11g для локальных сетей, стандарты IEEE 802.16 для сетей масштаба города.

Однако, одним из недостатком классических OFDM систем с гармоническим сигнальным базисом является эффект, связанный с потерей ортогональности между поднесущими в каналах с доплеровским рассеянием. Это приводит к росту ошибок при декодировании сигнала на приемной стороне. Кроме того, гармонический базис обладает повышенным уровнем внеполосного излучения, что требует применения специальных мер по фильтрации. Для преодоления указанных недостатков возникает необходимость в поиске других (негармонических) ортогональных базисов, малочувствительных частотному рассеянию в канале и имеющих небольшой уровень внеполосного излучения. Данная статья посвящена разработке общего подхода к синтезу таких базисов и их применению в OFDM системах.

1. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Передаваемый OFDM/QAM сигнал можно представить следующим образом:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{k,l}\psi_{k,l}(t) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{k,l} g(t-lT)\cdot \exp(2\pi jkFt), \quad t \in \Re = (-\infty, \infty), \tag{1}$$

где M количество поднесущих в OFDM сигнале; $a_{k\,l}$ – комплексные QAM-символы;

$$\psi_{k,l}(t) = g(t-lT)\cdot \exp(2\pi jkFt), \quad k = 0,\dots,M-1, \quad l = 0,\pm1,\pm2,\dots \tag{2}$$

– множество сдвинутых по времени и частоте версий одной инициализирующей функции $g(t)$, которые образуют ортогональный базис Вейля-Гейзенберга [7]; $j = \sqrt{-1}$; $F = W/M$ – расстояние между поднесущими; W – полоса частот OFDM системы в герцах; T – символьный временной интервал. В дальнейшем функцию $g(t)$ будем называть формирующим импульсом OFDM сигнала.

Условие взаимной ортогональности базисных функций $\{\psi_{k,l}(t)\}$:

$$\langle \psi_{k,l}(t), \psi_{k',l'}(t) \rangle = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'} \qquad (3)$$

приводит к минимизации ошибок, обусловленных действием в канале аддитивного белого гауссовского шума. Однако в реальных дисперсионных каналах кроме аддитивного шума возникают помехи в виде межсимвольной интерференции (МСИ) и межканальной интерференции (МКИ). Искажения, вносимые в OFDM сигнал этими помехами, в первую очередь, зависят от частотно-временной локализации базисных функций $\psi_{k,l}(t)$, которая определяется эффективным носителем их функции неопределенности.

Для $\psi_{k,l}(t)$ и $\varepsilon > 0$, эффективным носителем функции неопределенности

$$A\psi_{k,l}(t,f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{k,l}(x+\frac{t}{2}) \overline{\psi_{k,l}(x-\frac{t}{2})} \exp(-2\pi j f x) dx \qquad (4)$$

называется множество точек частотно-временной плоскости

$$\mathrm{supp}_{\varepsilon}(A\psi_{k,l}) \triangleq \left\{(t,f) : \left|A\psi_{k,l}(t,f)\right| > \varepsilon\right\}. \qquad (5)$$

Из выражения (2) следует, что эффективные носители базисных функций $\psi_{k,l}(t)$ имеют одинаковые размеры и смещены относительно друг друга по времени и частоте, образуя в частотно-временной области некоторую упаковку. При этом размеры носителя полностью определяются частотно-временной локализацией формирующего импульса $g(t)$.

Физически, возникновение МСИ и МКИ в каналах с частотно-временным рассеянием объясняется потерей ортогональности между «возмущенными» базисными функциями сигнала на выходе канала, в результате чего процедура демодуляции этого сигнала на приемной стороне оказывается неоптимальной. Возникает просачивание информации из каждого поднесущего канала [2] в соседние. Причем величина возникающих при этом взаимных помех определяется тем, насколько быстро спадают «хвосты» функций неопределенности (4). Чем лучше частотно-временная локализация базисных функций, тем быстрее происходит этот спад, а значит меньше уровень МСИ и МКИ.

Оптимально локализованным является такой базис (или соответствующий формирующий фильтр), который в этих условиях приводит к минимальным значениям МСИ и МКИ, т.е. базис (или фильтр) с наилучшей локализацией и по времени, и по частоте. OFDM система с таким оптимальным базисом будет обладать робастным свойством – наименьшей чувствительностью к дисперсионным возмущениям в канале.

Очевидно, прямоугольная форма формирующего импульса $g(t)$, характерная для классической OFDM системы, не является оптимальной с точки зрения устойчивости к МКИ. Поскольку в этом случае локализация базисных функций $\psi_{k,l}(t)$ в частотной области будет наихудшей. По этой же причине в таких OFDM системах уровень внеполосного излучения оказывается завышенным.

Отметим, что обычно в OFDM системах для защиты от МСИ используется циклический префикс [1,2]. Это приводит к дополнительному увеличению длины OFDM символа (при сохранении той же информации), а значит уменьшению спектральной эффективности системы. Однако, применение префикса позволяет практически полностью избавиться от МСИ.

Спектральная эффективность OFDM системы в единицах $[бит/с \cdot Гц]$ определяется следующим образом

$$\rho = \frac{\beta}{TF}, \qquad (6)$$

где β – количество бит в одном символе; $TF \geq 1$ – количество отсчетов комплексной огибающей OFDM сигнала, приходящихся на одну базисную функцию. Максимум спектральной эффективности достигается при $TF = 1$, что соответствует самой плотной упаковке символов на частотно-временной плоскости. Однако, по теореме Бэлиана-Лоу существование хорошо локализованных (по времени и частоте) базисов для OFDM/QAM систем возможно только при $TF>1$. На практике, лишь при значении $TF=3/2$ можно получить базис с приемлемой частотно-временной локализацией. Но это соответствует разряженной частотно-временной упаковке базисных функций и приводит к потере спектральной эффективности.

Таким образом, синтез оптимальных OFDM/QAM систем приводит к задаче поиска компромисса между локализацией базисных функций и спектральной эффективностью.

Однако, в OFDM/OQAM системах, основанных на смещенной QAM модуляции (OQAM), хорошая локализация базисных функций возможна даже в случае критической плотности отсчетов $TF=1$ [6], т.е. при максимальной спектральной эффективности. Такая модуляция индуцируется естественным образом при переходе к сигнальному гильбертовому пространству с *вещественным скалярным произведением*

$$\langle x(t), y(t)\rangle_R \triangleq \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\overline{y(t)}dt, \tag{7}$$

где верхняя черта означает комплексное сопряжение.

Аналитическое выражение для OFDM сигнала с OQAM модуляцией выглядит следующим образом:

$$s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l}^R\psi_{k,l}^R(t)+\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l}^I\psi_{k,l}^I(t)\right],\ t\in\Re=(-\infty,\infty), \tag{8}$$

$$\psi_{k,l}^R(t)=g(t-lT)\exp(2\pi jFk(t-\frac{\alpha T}{2M})),\ \psi_{k,l}^I(t)=g(t+T/2-lT)\exp(2\pi jFk(t-\frac{\alpha T}{2M})), \tag{9}$$

где $c_{k,l}^R=\mathrm{Re}(a_{k,l})$, $c_{k,l}^I=\mathrm{Im}(a_{k,l})$ – действительные и мнимые части комплексных информационных QAM символов $a_{k,l}$; $\psi_{k,l}^R(t)$, $\psi_{k,l}^I(t)$ – комплексные функции, полученные в результате равномерных сдвигов по времени и частоте двух инициализирующих функций $g(t)$ и $g(t+T/2)$; M – количество поднесущих; $F=1/T$ – расстояние между поднесущими. Дополнительный фазовый параметр α позволяет обеспечить физическую реализуемость базиса в виде банка соответствующих фильтров.

Система функций $\{\psi_{k,l}^R(t),\psi_{k,l}^I(t)\}$ нормирована и ортогональна в смысле вещественного скалярного произведения:

$$\begin{aligned}
&\left\langle\psi_{k,l}^R(t),\psi_{k',l'}^R(t)\right\rangle_R=\delta_{k,k'}\delta_{l,l'},\\
&\left\langle\psi_{k,l}^I(t),\psi_{k',l'}^I(t)\right\rangle_R=\delta_{k,k'}\delta_{l,l'},\\
&\left\langle\psi_{k,l}^R(t),\psi_{k',l'}^I(t)\right\rangle_R=0,
\end{aligned} \tag{10}$$

и называется *обобщенным ортогональным базисом Вейля-Гейзенберга.* При этом для модулирующих OQAM коэффициентов справедливы выражения:

$$c_{k,l}^R=\left\langle s(t),\psi_{k,l}^R(t)\right\rangle_R,$$
$$c_{k,l}^I=\left\langle s(t),\psi_{k,l}^I(t)\right\rangle_R.$$

Запишем теперь модель OFDM/OQAM сигнала в дискретном времени. Предположим, что выполнено $FT=1$, тогда формирующий фильтр для $g(t)$ имеет полосу пропускания $F=1/T$, а с учетом M сдвигов в частотной области ширина спектра сигнала $s(t)$ равна $W = M/T$. Дискретизированный с критической частотой $f_Д = W$ сигнал $s(t)$ можно записать в следующем виде:

$$s\left(n\frac{T}{M}\right)=\sum_{k=0}^{M-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_{k,l}^{R}g\left(n\frac{T}{M}-lT\right)\exp\left(j\frac{2\pi}{T}k\left(n\frac{T}{M}-\frac{\alpha T}{2M}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=-\infty}^{\infty}jc_{k,l}^{I}g\left(n\frac{T}{M}+T/2-lT\right)\exp\left(j\frac{2\pi}{T}k\left(n\frac{T}{M}-\frac{\alpha T}{2M}\right)\right)\right]. \qquad (11)$$

Предполагая, что M — четное, и вводя обозначения $s[n]\triangleq s\left(n\frac{T}{M}\right)$ и $g[n]\triangleq g\left(n\frac{T}{M}\right)$, перепишем выражение (11) в виде:

$$s[n]=\sum_{k=0}^{M-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_{k,l}^{R}g[n-lM]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}k(n-\alpha/2)\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=-\infty}^{\infty}jc_{k,l}^{I}g[n+M/2-lM]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}k(n-\alpha/2)\right)\right]. \qquad (12)$$

Для перехода на конечный дискретный интервал времени $J_N=\{0,1,...,N-1\}$, $N=M\cdot L\ge M$ (L — любое натуральное число) выполним циклическую редукцию формирующей функции, положив $g[n]=g[(n)_{\mathrm{mod}N}]$. Тогда выражение (12) принимает вид:

$$s[n]=\sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{l=0}^{L-1}c_{k,l}^{R}\cdot\psi_{k,l}^{R}[n]+\sum_{l=0}^{L-1}c_{k,l}^{I}\cdot\psi_{k,l}^{I}[n]\right),\quad n\in J_N \qquad (13)$$

$$\psi_{k,l}^{R}[n]=g\left[(n-lM)_{\mathrm{mod}N}\right]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}k(n-\alpha/2)\right),$$
$$\psi_{k,l}^{I}[n]=j\cdot g\left[(n+M/2-lM)_{\mathrm{mod}N}\right]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}k(n-\alpha/2)\right). \qquad (14)$$

Система базисных функций $\{\psi_{k,l}^{R}[n],\psi_{k,l}^{I}[n]\}$ ортогональна в смысле вещественного скалярного произведения

$$\langle x[n],y[n]\rangle_R\triangleq\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot\overline{y}[n] \qquad (15)$$

и является дискретным аналогом системы (9). Условие ортогональности (10) в данном случае можно представить в матричном виде

$$\mathrm{Re}\left(U^{*}U\right)=I_{2N}, \qquad (16)$$

где "*" – символ эрмитового сопряжения; I_{2N} - единичная $(2N\times 2N)$-матрица; $U=(U_R,U_I)$ - блочная прямоугольная матрица размерности $(N\times 2N)$, у которой блоки U_R, U_I – квадратные $(N\times N)$-матрицы, составленные из столбцов соответствующих базисных функций $\vec{\psi}_{k,l}^{R}=(\psi_{k,l}^{R}[0],...,\psi_{k,l}^{R}[N-1])^{T}$, $\vec{\psi}_{k,l}^{I}=(\psi_{k,l}^{I}[0],...,\psi_{k,l}^{I}[N-1])^{T}$ для всех значений индексов $k=0,...,M-1$, $l=0,...,L-1$.

Формула (13) описывает алгоритм формирования (модуляции) OFDM/OQAM сигнала в дискретном времени. Соответствующий алгоритм демодуляции имеет вид:

$$c_{k,l}^{R}=\langle s[n],\psi_{k,l}^{R}[n]\rangle_R,\quad c_{k,l}^{I}=\langle s[n],\psi_{k,l}^{I}[n]\rangle_R.$$

Для построения робастной OFDM/OQAM системы, наименее чувствительной к частотно-временному рассеянию канала, необходимо решить задачу синтеза обобщенного ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга, для которого функция неопределенности формирующего импульса

$$\Psi_g(t,f) \triangleq Ag(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x+t/2)\overline{g(x-t/2)}\exp(-2\pi j f x)dx \tag{17}$$

обладает максимальной локализацией одновременно по t и f. Данный критерий оптимальности соответствует нахождению ортогональной системы $\{\psi_{k,l}^R(t), \psi_{k,l}^I(t)\}$, для которой левая часть неравенства

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)^2|g(t)|^2 dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}(f-\nu)^2|g_*(f)|^2 df\right) \ge \frac{\|g(t)\|^4}{16\pi^2}, \tag{18}$$

описывающего принцип Гейзенберга, достигает минимального значения (здесь $g_*(f) = F(g(t))$ – преобразование Фурье формирующей функции $g(t)$). Известно [4], что равенство достигается в случае, если $g(t)$ является функцией Гаусса. Следовательно, базис, основанный на сдвигах по времени и частоте формирующей функции вида

$$g_0(t) = (2\sigma)^{1/4}\exp(-\pi\sigma t^2),\ t \in \Re = (-\infty, \infty),$$

будет оптимальным с точки зрения частотно-временной локализации. Он называется базисом Габора. К сожалению, этот базис не является ортогональным. Поэтому он не подходит для построения робастной OFDM системы. Однако он может служить основой для построения ортогонального базиса с наилучшей частотно-временной локализацией.

По аналогии с предыдущим, определим комплексный сигнальный базис Габора на дискретном интервале времени J_N в виде блочной матрицы

$$G = (G_R, G_I), \tag{19}$$

где матрица G_R определяет базис подпространства для действительных компонент, модулирующих OQAM символов $c_{k,l}^R$, а матрица G_I – для мнимых компонент $c_{k,l}^I$. Элементы этих матриц описываются выражениями:

$$G_R(n,\ lM+k) = g_0\left[(n-lM)_{\mathrm{mod}\,N}\right]\cdot\exp\left(2\pi j\frac{k}{M}(n-\alpha/2)\right), \tag{20}$$

$$G_I(n,\ lM+k) = j\cdot g_0\left[(n+M/2-lM)_{\mathrm{mod}\,N}\right]\cdot\exp\left(2\pi j\frac{k}{M}(n-\alpha/2)\right), \tag{21}$$

$$n = 0,\dots,N-1,\ k = 0,\dots,M-1,\ l = 0,\dots,L-1,\ N = LM.$$

Отметим, что матрица базиса G является прямоугольной, размерности $N \times 2N$, а комплексные базисные функции Габора располагаются в ней по столбцам. Кроме того, G не удовлетворяет условию ортогональности (16).

Если провести ортогонализацию базиса G стандартной процедурой, например Грамма-Шмидта, то это приведет к значительному ухудшению частотно-временной локализации. Чтобы избежать этого эффекта, рядом авторов [5] был предложен метод формирования ортогональных хорошо локализованных базисов с помощью специальных цифровых фильтров. При синтезе таких фильтров накладывается ряд ограничений на структуру их импульсной характеристики. Однако это создает определенные неудобства и ограничивает общность задачи поиска оптимально локализованных базисов.

Ниже предлагается более общий алгебраический подход к синтезу ортогональных базисов Вейля-Гейзенберга с наилучшей частотно-временной локализацией.

2. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО БАЗИСА ВЕЙЛЯ-ГЕЙЗЕНБЕРГА

В дальнейшем выражением $M_{m,n}(\mathbb{F})$ будем обозначать множество всех матриц размера $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$. Если $m = n$, будет использоваться сокращенная запись $M_n(\mathbb{F})$. Здесь $\mathbb{F}$ или поле вещественных чисел $\Re$ или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть даны матрицы* $U \in M_{N,2N}(\mathbb{C})$ и $U_B \in M_{2N}(\mathbb{R})$, *которые связаны соотношением:*

$$U_B = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}U \\ \mathrm{Im}U \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Утверждается, что для матрицы U *условие*

$$\mathrm{Re}(U^*U) = I_{2N} \tag{23}$$

выполняется тогда и только тогда, когда матрица U_B *ортогональна, т.е.*

$$U_B^*U_B = I_{2N}. \tag{24}$$

Доказательство. Представим матрицу U_B в виде блочной:

$$U_B = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$

$$U_{11}, U_{12}, U_{21}, U_{22} \in M_N(\mathbb{R}).$$

Тогда в этих обозначениях можно записать:

$$Ur = \mathrm{Re}U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \end{bmatrix},\ Ur \in M_{N,2N}(\mathbb{R}),$$

$$Ui = \mathrm{Im}U = \begin{bmatrix} U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},\ Ui \in M_{N,2N}(\mathbb{R}).$$

Преобразуем выражение (16):

$$U_B^*U_B = U_B^TU_B = \begin{bmatrix} U_{11}^T & U_{21}^T \\ U_{12}^T & U_{22}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}^TU_{11} + U_{21}^TU_{21} & U_{11}^TU_{12} + U_{21}^TU_{22} \\ U_{12}^TU_{11} + U_{22}^TU_{21} & U_{12}^TU_{12} + U_{22}^TU_{22} \end{bmatrix} = I_{2N},$$

откуда вытекает система равенств:

$$\left.\begin{aligned} U_{11}^TU_{11} + U_{21}^TU_{21} &= I_N, \\ U_{12}^TU_{12} + U_{22}^TU_{22} &= I_N, \\ U_{12}^TU_{11} + U_{22}^TU_{21} &= 0, \\ U_{11}^TU_{12} + U_{21}^TU_{22} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Теперь преобразуем равенство (23):

$$\mathrm{Re}(U^*U) = \mathrm{Re}\left(\left(Ur^T - j \cdot Ui^T\right)\left(Ur + j \cdot Ui\right)\right) = Ur^TUr + Ui^TUi =$$

$$= \begin{bmatrix} U_{11}^T \\ U_{12}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{21}^T \\ U_{22}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}^TU_{11} + U_{21}^TU_{21} & U_{11}^TU_{12} + U_{21}^TU_{22} \\ U_{12}^TU_{11} + U_{22}^TU_{21} & U_{12}^TU_{12} + U_{22}^TU_{22} \end{bmatrix} = I_{2N},$$

что также приводит нас к системе равенств (25). Таким образом, для справедливости выражения (24), как и для справедливости выражения (23), требуется выполнение одной и той же системы равенств (25). Следовательно, выражения (23) и (24) эквивалентны, что и требовалось доказать.

Из леммы 1 вытекает важное следствие.

Следствие 1.

Множество вещественных ортогональных матриц $\mathcal{V} = \{V \in M_{2N}(\mathbb{R}) : V^*V = I_{2N}\}$ *совпадает с подмножеством матриц*

$$\mathcal{U}_в = \{U_B = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}U \\ \mathrm{Im}U \end{bmatrix}, U \in M_{N,2N}(\mathbb{C}) \colon \mathrm{Re}(U^*U) = I_{2N}\} \subset M_{2N}(\mathbb{R}). \tag{26}$$

При этом между подмножеством комплексных прямоугольных матриц $\mathfrak{A} = \{U \in M_{N,2N}(\mathbb{C}) \colon \mathrm{Re}(U^*U) = I_{2N}\}$ *и множеством матриц* $\mathcal{V}$ *существует взаимно однозначное соответствие (изоморфизм), определяемое равенствами:*

$$V=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\,U\\ \mathrm{Im}\,U\end{bmatrix},\quad U=V_1+jV_2,\quad где\quad \begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}\triangleq V. \qquad (27)$$

Сформулируем две алгебраические задачи на экстремум.

Задача 1. *На подмножестве* $\mathfrak{A}=\{U\in M_{N,2N}(\mathbb{C}):\mathrm{Re}(U^*U)=I_{2N}\}$ *комплексных прямоугольных матриц, для которых справедливо выражение*

$$\mathrm{Re}(U^*U)=I_{2N}, \qquad (28)$$

необходимо найти оптимальную матрицу $U_{опт}$*, которая доставляет минимум в задаче на экстремум*

$$U_{опт}:\ \min_{U\in\mathfrak{A}}\|G-U\|_E^2, \qquad (29)$$

где $G\in M_{N,2N}(\mathbb{C})$ *– матрица базиса Габора (19);* $\|A\|_E^2=tr(AA^*)$ *- матричная норма Фробениуса.*

Таким образом, задача на экстремум (29) решается на некотором специальном подмножестве комплексных прямоугольных матриц $\mathfrak{A}$.

Сформулируем другую экстремальную задачу.

Задача 2. *На множестве* $\mathcal{V}=\{V\in M_{2N}(\mathbb{R}):V^*V=I_{2N}\}$ *вещественных ортогональных матриц необходимо найти оптимальную матрицу* $V_{опт}$*, которая доставляет минимум в задаче на экстремум*

$$V_{опт}:\ \min_{V\in\mathcal{V}}\|G_B-V\|_E^2, \qquad (30)$$

где $G_B\in M_{2N}(\mathbb{R})$ *связана с комплексной матрицей базиса Габора* G *соотношением*

$$G_B=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\,G\\ \mathrm{Im}\,G\end{bmatrix}. \qquad (31)$$

Теорема 1. *Если матрица* $U_{опт}$ *– решение задачи 1, то решение задачи 2 имеет вид*

$$V_{опт}=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\,U_{опт}\\ \mathrm{Im}\,U_{опт}\end{bmatrix}. \qquad (32)$$

И наоборот, если $V_{опт}=\begin{bmatrix}V_{1опт}\\ V_{2опт}\end{bmatrix}$, $V_{1опт},V_{2опт}\in M_{N,2N}(\Re)$ *– решение задачи 2, то решение задачи 1 определяется выражением*

$$U_{опт}=V_{1опт}+jV_{2опт}. \qquad (33)$$

Доказательство.

Представим матрицу U в виде:

$$U=\mathrm{Re}\,U+j\cdot\mathrm{Im}\,U=Ur+j\cdot Ui.$$

По условию задачи 1 U удовлетворяет равенству (28), поэтому

$$\mathrm{Re}(Ur^T-j\cdot Ui^T)(Ur+j\cdot Ui)=Ur^TUr+Ui^TUi=I_{2N}. \qquad (34)$$

Представим матрицу базиса Габора в виде $G=\mathrm{Re}\,G+j\,\mathrm{Im}\,G=Gr+jGi$ и преобразуем квадрат нормы (29) из задачи 1:

$$\|G-U\|_E^2=\|Gr+jGi-Ur-jUi\|_E^2=\|(Gr-Ur)+j(Gi-Ui)\|_E^2.$$

Заметим, что для любых вещественных матриц A, B справедливо

$$\|A+jB\|_E^2=tr((A+jB)(A^T-jB^T))=$$

$$=tr(AA^T+BB^T)+j\cdot tr(BA^T-AB^T)=tr(AA^T+BB^T). \qquad (35)$$

Воспользовавшись этим тождеством, преобразуем выражение (34):

$$\|(Gr-Ur)+j(Gi-Ui)\|_E^2 = tr(GrGr^T - GrUr^T - UrGr^T + UrUr^T + GiGi^T - GiUi^T - UiGi^T + UiUi^T).$$

Учитывая, что из (34) следует $tr(UrUr^T + UiUi^T) = 2N$, а величина $tr(GrGr^T + GiGi^T)$ не зависит от U, приходим к выводу, что минимизация матричной нормы из задачи 1 сводится к максимизации выражения

$$tr(GrUr^T + UrGr^T + GiUi^T + UiGi^T) = 2tr(GrUr^T + GiUi^T) = 2tr\begin{pmatrix} Gr \\ Gi \end{pmatrix}(Ur^T, Ui^T) = 2tr(G_B{}^T U_B),$$

т. е. эквивалентная экстремальная задача принимает вид,

$$\{U_{B опт}\}:\ \ tr(G_B U_B{}^T) \to \max_{U_B \in \mathcal{U}_B}. \tag{36}$$

Рассмотрим теперь матричную норму из задачи 2:

$$\|G_B - V\|_E^2 = tr((G_B - V)(G_B - V)^T) = tr(G_B G_B^T - G_B V^T - V G_B^T + VV^T) =$$
$$= tr(G_B G_B^T) - 2tr(G_B V^T) + tr(VV^T). \tag{37}$$

В этом выражении слагаемое $tr(G_B G_B^*) = const$. Кроме того, $tr(VV^T) = 2N$, поскольку V ортогональная $(2N \times 2N)$-матрица. Следовательно, минимизация матричной нормы (30) из задачи 2 сводится к максимизации выражения $tr(G_B V^T)$, т.е.

$$\{V_{опт}\}:\ \ tr(G_B V^T) \to \max_{V \in \mathcal{V}}. \tag{38}$$

Но согласно следствию 1, множества матриц, $\mathcal{U}_B$ и $\mathcal{V}$, по которым ищутся максимумы выражений (36) и (38), совпадают. Поэтому соответствующие множества оптимальных решений $\{U_{B опт}\}$, $\{V_{опт}\}$ также совпадут, а оптимальные решения $\{U_{опт}\}$ исходной задачи 1 могут быть получены из решений $\{V_{опт}\}$ на основе формул (27). В результате приходим к соотношениям (32), (33), которые требовалось доказать.

Ниже будет показано, что все оптимальные решения $\{U_{опт}\}$ доставляют один и тот же минимум нормы (29). Поэтому на практике достаточно найти только одно из этих решений.

Таким образом, мы показали, что для вычисления матрицы обобщенного ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга (10) с наилучшей частотно-временной локализацией достаточно решить задачу 2.

Рассмотрим спектральное разложение матрицы $G_B G_B^*$:

$$G_B G_B^* = S \Lambda S^*. \tag{39}$$

В этом выражении Λ есть диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные (положительные) значения $\{\lambda_i\}$ матрицы $G_B G_B^*$, а S это ортогональная матрица, столбцы которой представляют собой ортонормированные собственные вектора $\{s_i\}$ матрицы $G_B G_B^*$:

$$S = [s_1, s_2, \ldots, s_{2N}]. \tag{40}$$

Положим:

$$\Sigma = \Lambda^{1/2}, \tag{41}$$
$$W = G_B^* S \Sigma^{-1}. \tag{42}$$

Можно показать, что W – ортогональная матрица. Действительно,

$$W^* = (G_B^* S \Sigma^{-1})^* = \Sigma^{-1} S^* G_B,$$
$$W^* W = \Sigma^{-1} S^* G_B G_B^* S \Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} S^* S \Lambda S^* S \Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} \Lambda \Sigma^{-1} = I.$$

Таким образом, из (42) следует, что матрицу G_B можно представить в виде произведения двух ортогональных матриц и одной диагональной:

$$G_B = S\Sigma W^* . \qquad (43)$$

Теорема 2. *Оптимальная матрица $V_{опт}$ из множества $\mathcal{V} = \{V \in M_{2N}(\mathbb{R}) : V^*V = I_{2N}\}$ вещественных ортогональных матриц, которая доставляет минимум в задаче на экстремум $V_{опт}$: $\min\limits_{V\in\mathcal{V}} \|G_B - V\|_E^2$, где $G_B \in M_{2N}(\mathbb{R})$, определяется выражением*

$$V_{опт} = SW^* . \qquad (44)$$

Ортогональные матрицы S и W находятся из спектрального разложения $G_BG_B^*$ согласно (40) и (42).

Доказательство.

Преобразуем матричную норму:

$$\|G_B - V\|_E^2 = \langle G_B - V, G_B - V\rangle_E = \|G_B\|_E^2 - 2\langle G_B, V\rangle_E + \|V\|_E^2 , \qquad (45)$$

где $\langle A,B\rangle_E \triangleq tr(AB^*)$. Таким образом, для минимизации выражения (45) следует искать ортогональную матрицу V, максимизирующую функцию $\langle G_B,V\rangle_E = \mathrm{tr}(G_BV^*)$. Учитывая, что $G_B = S\Sigma W^*$, имеем

$$\mathrm{tr}(G_BV^*) = tr(S\Sigma W^*V^*) = tr(\Sigma W^*V^*S) = \sum_{i=1}^{2N}\sqrt{\lambda_i}\,t_{ii} ,$$

где $\{\lambda_i\}$ – собственные значения матрицы $G_BG_B^*$, $T = [t_{ij}] = W^*V^*S$ – ортогональная матрица. Максимум этой суммы достигается, когда все $t_{ii} = 1$, т.е. когда $V = SW^*$, что и требовалось доказать.

Замечание. Решение (44) неоднозначно и определяет лишь общий вид матрицы оптимального базиса. Количество решений зависит от кратности собственных чисел матрицы $G_BG_B^*$. Если все собственные числа простые, то множество решений конечно, а их количество определяется числом возможных перестановок столбцов (собственных векторов $\{s_i\}$) матрицы S. Если у $G_BG_B^*$ имеются кратные собственные числа, то множество решений (44) бесконечно. Однако, при любых кратностях всем решениям соответствует один и тот же набор собственных чисел, а значит одно и то же значение достигаемого экстремума, поскольку :

$$\min_{V\in\mathcal{V}}\|G_B - V\|_E^2 = \|G_B - V_{опт}\|_E^2 = \|G_B - SW^*\|_E^2 = \|G_B\|_E^2 + \|I\|_E^2 - 2\sum_{i=1}^{2N}\sqrt{\lambda_i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{2N}\lambda_i + 2N - 2\sum_{i=1}^{2N}\sqrt{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{2N}(\sqrt{\lambda_i} - 1)^2 .$$

Таким образом, степень приближения оптимальной ортогональной матрицы $V_{опт}$ к матрице G_B (качество аппроксимации) определяется локализацией собственных значений $\{\lambda_i\}$ матрицы $G_BG_B^*$ около единицы.

Согласно доказанным теоремам 1 и 2, решение задачи 1 будет определяться выражением

$$U_{опт} = V_{1опт} + jV_{2опт} , \qquad (46)$$

где матрицы $V_{1опт}$ и $V_{2опт}$ находятся из блочного разбиения: $V_{опт} = SW^* = \begin{bmatrix} V_{1опт} \\ V_{2опт} \end{bmatrix}$.

3. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО БАЗИСА ВЕЙЛЯ-ГЕЙЗЕНБЕРГА

Из доказанных выше теорем получаем следующий алгоритм построения оптимального базиса Вейля-Гейзенберга для OFDM/OQAM системы.

1. Формируется матрица базиса Габора $G=\left[G_R,G_I\right]$, элементы которой определяются выражениями:

$$G_R(n,lM+k)=g_0\left[(n-lM)_{\operatorname{mod}N}\right]\cdot\exp\left(2\pi j\frac{k}{M}(n-\alpha/2)\right),$$

$$G_I(n,lM+k)=j\cdot g_0\left[(n+M/2-lM)_{\operatorname{mod}N}\right]\cdot\exp\left(2\pi j\frac{k}{M}(n-\alpha/2)\right),$$

$$n=0,\ldots,N-1,\ k=0,\ldots,M-1,\ l=0,\ldots,L-1,\ N=LM.$$

2. Записывается расширенная вещественная матрица Габора $G_B=\begin{bmatrix}\operatorname{Re}G\\ \operatorname{Im}G\end{bmatrix}$.
3. Ищется спектральное разложение $G_BG_B^*=S\Lambda S^*$.
4. Вычисляются матрицы $\Sigma=\Lambda^{1/2}$, $W=G_B^*S\Sigma^{-1}$.
5. Вычисляется оптимальная вещественная ортогональная матрица $V_{опт}=SW^*$ (решение задачи 2).
6. Из блочного разбиения $V_{опт}=\begin{bmatrix}V_{1опт}\\ V_{2опт}\end{bmatrix}$ находятся матрицы $V_{1опт}$ и $V_{2опт}$.
7. Строится матрица оптимального базиса Вейля-Гейзенберга $U_{опт}=V_{1опт}+jV_{2опт}$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На основе предложенного метода были построены оптимальные ортогональные базисы различной длины и с разным числом поднесущих. С помощью пакета MatLab были исследованы локальные свойства полученных базисов в составе модифицированной OFDM системы.

На рис. 1 представлена одна из функций базиса Габора – ее вид во временной и частотных областях. На рис. 2 изображена соответствующая ей функция оптимального ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга, полученного в результате применения описанной выше процедуры. Из сравнения кривых видно, что процедура ортогонализации базиса Габора привела к незначительному ухудшению временной и частотной локализации.

Как и следовало ожидать, характеристики BER (см. рис. 3) у обеих исследуемых систем в канале с аддитивным белым гауссовским шумом при родственных типах модуляций 16QAM и 16OQAM совпадают

На рис. 4 приведены графики спектральной плотности мощности сигналов OFDM и OFDM/OQAM, полученные с помощью авторегрессионного подхода. Видно, что уровень внеполосного излучения у сигнала OFDM/OQAM существенно ниже, чем у классического OFDM сигнала.

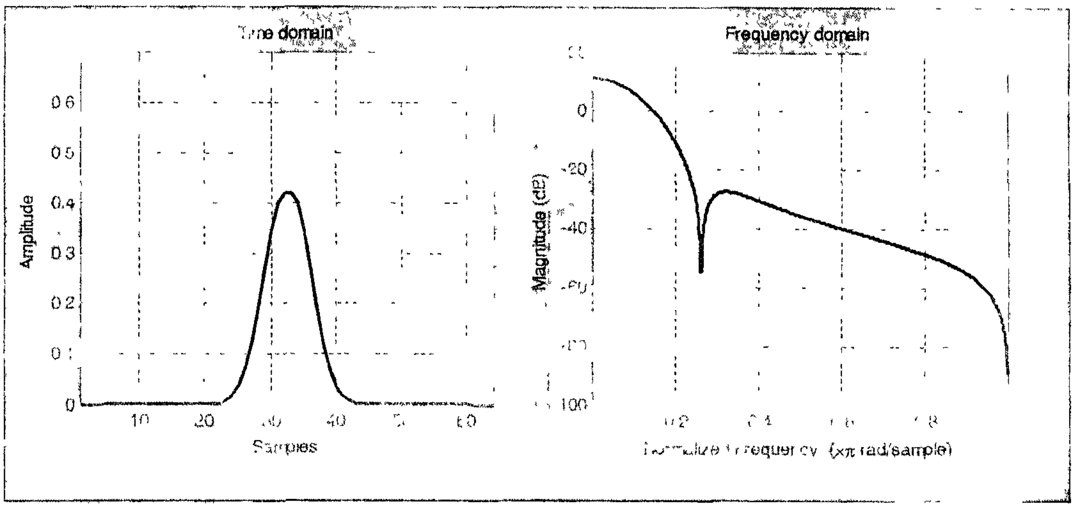

Рис. 1. Базис Габора во временной и частотых областях

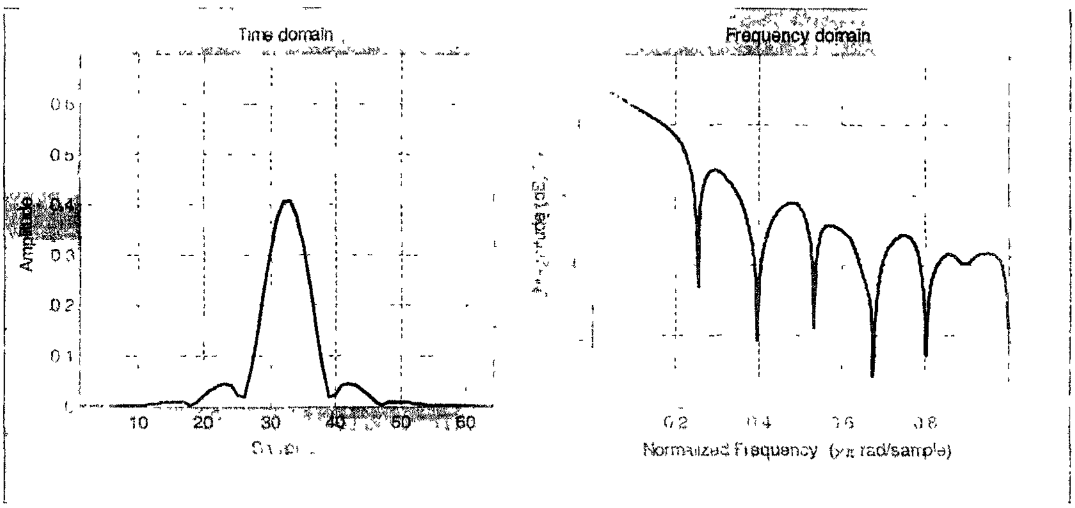

Рис. 2 Оптимальный базис Вейля-Гейзенберга, синтезированный
с помощью предложенного метода

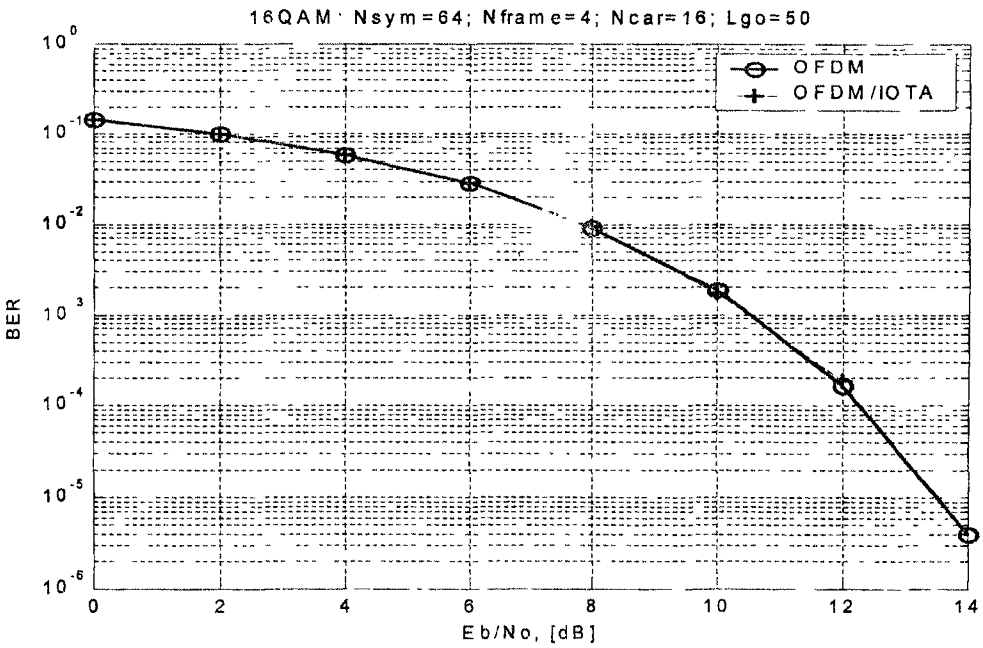

Рис. 3. Характеристики BER для систем OFDM и OFDM/IOTA (гауссовский канал)

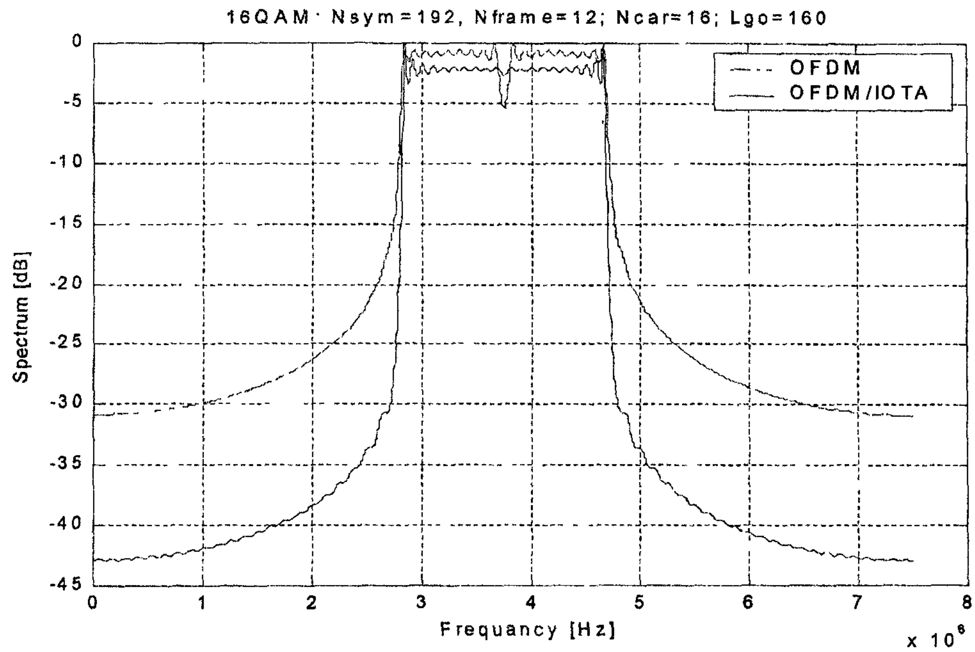

Рис. 4. Графики спектральной плотности мощности сигналов OFDM и OFDM/OQAM

Библиографический список

1. Fliege, N. J. Orthogonal multiple carrier data transmission [Text] / N. J. Fliege // European Transactions on Telecommunications. – 1992. – Vol. 3. – P. 225-253.

2. Zou, W. Y. COFDM: An overview [Text] / W.Y. Zou, Y. Wu // IEEE Trans. Broadc. – 1995. – Vol. 41. – P. 1-8.

3. Sari, H. Transmission techniques for digital terrestrial TV broadcasting [Text] / H. Sari, G. Karam, I. Jeanclaude // IEEE Communications Magazine. – 1995. – Feb. – P. 100-109.

4. Gabor, D. Theory of communication [Text] / D. Gabor // J. Inst. Elect. Eng. – 1946. – Vol. 93, № 3. – P. 429-457.

5. Bolcskei, H. Efficient design of OFDM/OQAM pulse shaping filter [Text] / H. Bolcskei, P. Duhamel, R. Hleiss // IEEE Trans. Comm. submitted. – 2000.

6. Le Floch, B. Coded Orthogonal Frequency Division Multiplex [Text] / B. Le Floch, M. Alard, C. Berrou // Proceedings of the IEEE. – 1995. – Vol. 83, № 6.

7. Bolcskei, H. Over sampled Wilson Expansions [Text] / H. Bolcskei, K. Grochenig, F. Hlawatsch, H. G. Feichtinger

Хорн, Р. Матричный анализ [Текст] / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 652 с.

Список сокращений

МСИ – Межсимвольная интерференция

МКИ – Межканальная интерференция

BER – вероятность ошибки на бит (Bit Error Rate)

OFDM – Orthogonal Frequency Division Multiplexing (Мультиплексирование с ортогональным частотным разделением)

OFDM/QAM – мультиплексирование с ортогональным частотным разделением с квадратурной амплитудной модуляцией (Orthogonal Frequency Division Multiplexing/Quadrature Amplitude Modulation)

OFDM/OQAM – мультиплексирование с ортогональным частотным разделением со смещенной квадратурной амплитудной модуляцией (Orthogonal Frequency Division Multiplexing/Offset Quadrature Amplitude Modulation)

OQAM – Offset Quadrature Amplitude Modulation (Смещенная квадратурная амплитудная модуляция)

QAM - Quadrature Amplitude Modulation (Квадратурная амплитудная модуляция)