APPLICATION OF ALGORITHM OF LANZOSH TO SOLVING ONE-DIMENSIONAL QUANTUM PROBLEMS

Shclovsky A.G., Starovoitov A.S.

Algorithm of Lanzosh is describing in the article. This algorithm applies to calculation eigenvectors and eigenvalues of one-dimensional equation of Shredinger with smooth potential. The error estimate of receiving results is giving by the example of harmonic oscillator.

УДК 519.673

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ И МНК-РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА 1-ГО РОДА

Капалин В.И.[1], Попович Д.Е.[1], Нгуен Мань Кыонг[2]

1 – Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)
2 – Вьетнамский морской университет, г. Хайфон

Предложен метод непараметрическая идентификация объектов позволяющих использовать аппарат функциональных рядов Вольтера для расчёта нелинейных систем с обратной связью.

Задача идентификации формулируется как задача построения математической модели объекта по экспериментально измеренным его реакциям на заданные входные сигналы. В случае параметрической идентификации это задача сводиться к отысканию параметров заданной математической модели – обычно дифференциального уравнения. В общем случае, когда объект идентификации является «черным ящиком» т.е. когда структура математической модели неизвестна используются методы непараметрической идентификации. В этом случае уравнение математической модели задается в форме интегрального оператора Вольтерра или Винера и задача идентификации сводиться к оценке ядер Волтерра и Винера по результатам измерения входных и выходных сигналов системы [1]. Эта задача, однако, является некорректной в том смысле, что малые погрешности в измерениях, в исходных данных могут дать сколь угодно большие погрешности в ядрах Вольтерра и Винера. В этой связи при непараметрической идентификации объектов при обработке экспериментальных данных можно применить теорию методов решения некорректных задач [2]. Рассмотрим постановку задачи идентификации в общем виде (рис.1),

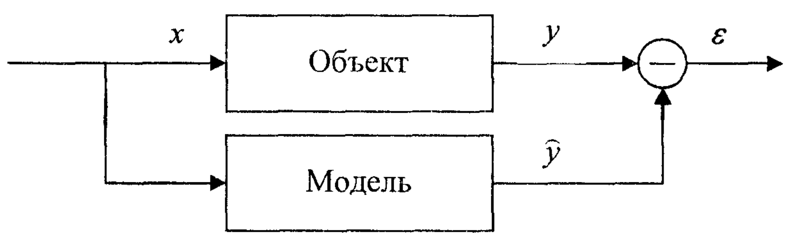

Рис. 1

как задачу минимизации квадратичного функционала

$$\varepsilon^2(t) = \overline{(y(t) - \hat{y}(t))^2}\ . \qquad (1)$$

Модель при этом может задаваться как линейным, так и нелинейным оператором Волтерра. Для отыскания ядер этого оператора необходимо на одном из этапов решения осуществить дискретизацию задачи. При этом возможны два варианта. При первом – модель и функционал записывается для непрерывного времени. Далее, находятся интегральные уравнения или, в нелинейном случае, система интегральных уравнений, задающее минимум квадратичного функционала. В результате, получается интегральное уравнение Фредгольма первого рода (или соответствующая система уравнений), для решения которого применяется дискретизация с использованием методов регуляризации [1].

Альтернативный подход, рассматриваемый в данной работе заключается в использовании с самого начала дискретных аналогов операторов Вольтерра. Функционал здесь записывается тоже в дискретном времени и регуляризация осуществляется непосредственно для исходного уравнения Вольтерра первого рода – линейного или нелинейного. Это, фактически МНК – решение задачи непараметрической идентификации и оно обладает преимуществами перед вышеупомянутым, основанным из которых является его большая простота.

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для идентификации линейной системы

$$y(t)=\int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau\,,\quad t\in[0,T]. \qquad (2)$$

Пусть измерения входного и выходного сигнала системы (2) производятся дискретно, т.е. на отрезке $[0;T]$ введена равномерная сетка узлов $t_i=\Delta i, i=1\ldots N, \Delta=\frac{T}{N}$. Будем предполагать далее, что система (2) обладает конечной памятью длины p в том смысле, что $h(\tau)=0$ при $t>p\Delta$. Используя квадратурную формулу правых прямоугольников, запишем дискретный аналог оператора Вольтерра

$$y[i\Delta]=\Delta\sum_{j=1}^{i}\tilde{h}[j\Delta]x[(i-j)\Delta],\qquad i=1,\ldots,N\,, \qquad (3)$$

где $\tilde{h}[j\Delta]=0$ при $j>p$.

Запишем уравнение модели в векторно-матричной форме:

$$\tilde{Y}=\Delta\tilde{A}\tilde{H}\,, \qquad (4)$$

где обозначено

$$\tilde{Y}^T=(\tilde{y}[\Delta],\tilde{y}[2\Delta],\ldots,\tilde{y}[N\Delta])\,,$$

$$\tilde{H}^T=(\tilde{h}[\Delta],\tilde{h}[2\Delta],\ldots,\tilde{h}[p\Delta],0,\ldots,0)\,, \qquad (5)$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} x(0) & 0 & \ldots & 0 \\ x(\Delta) & x(0) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x((p-1)\Delta) & x((p-2)\Delta) & \ldots & x(0) \\ x(p\Delta) & x((p-1)\Delta) & \ldots & x(\Delta) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x((N-1)\Delta) & x((N-2)\Delta) & \ldots & x((N-p)\Delta) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Используя метод наименьших квадратов, решение $\tilde{H}$ уравнения (4) будем искать путем минимизации квадратичного функционала:

$$Q=(Y-\tilde{Y})^T(Y-\tilde{Y})=(Y-\Delta\tilde{A}\tilde{H})^T(Y-\Delta\tilde{A}\tilde{H})\,. \qquad (7)$$

Дифференцируя по компонентам вектора $\tilde{H}$ и используя необходимое условие минимума, получаем следующую нормальную систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей размерности p:

$$\Delta\tilde{A}^T\tilde{A}\tilde{H}=\tilde{A}^TY\,. \qquad (8)$$

Матрица $\widetilde{A}^T\widetilde{A}$ симметричная и неотрицательно определенная. Если ранг матрицы $\widetilde{A}$ равен p, то матрица $\widetilde{A}^T\widetilde{A}$ положительно определена, уравнение (8) имеет единственное решение, задаваемое формулой

$$\widetilde{H} = \frac{1}{\Delta}(\widetilde{A}^T\widetilde{A})^{-1}\widetilde{A}^T Y, \qquad (9)$$

которое и представляет собой решение задачи идентификации в рассматриваемом случае.

Для нелинейной модели, задаваемой полиномом Вольтерра

$$y(t) = \sum_{k=1}^{M}\int_0^t\ldots\int_0^t h_k(\tau_1,\ldots,\tau_k)x(t-\tau_1)\ldots x(t-\tau_k)d\tau_1\ldots d\tau_k, \qquad (10)$$

с использованием формулы правых прямоугольников можно записать дискретную модель для $h_k(\tau_1,\ldots,\tau_k)=0$ при $\tau_j > p_k\Delta$, $j=1,\ldots,k$:

$$y[i\Delta] = \sum_{k=1}^{M}\left\{\Delta^k\sum_{j_1=1}^{i}\ldots\sum_{j_k=1}^{i}\widetilde{h}_k[j_1\Delta,\ldots j_k\Delta]x[(i-j_1)\Delta]..x[(i-j_k)\Delta]\right\}, \qquad (11)$$

которая также может быть записана в виде системы линейных алгебраических уравнений. При идентификации нелинейных моделей требуется введение на отрезке $[0,T]$ более густой сетки узлов, чем для линейной модели, и размерность получающейся при этом системы уравнений оказывается весьма велика. Для снижения размерности и упрощения процесса решения можно заменить условия глобального минимума функционала (7) по всем ядрам модели (11) условиями локальных минимумов последовательно по каждому из ядер. При этом сначала находиться h_1 при $h_2,\ldots h_m = 0$, затем h_2 при уже известном h_1 и $h_3,\ldots h_m = 0$ и т.д. На последнем этапе находится решение h_m при уже известных $h_1,\ldots h_{m-1}$.

Как уже отмечалось, если ранг матрицы $\widetilde{A}$ равен p, то симметричная матрица $\widetilde{A}^T\widetilde{A}$ является положительно определенной. При этом для решения нормальной системы уравнений целесообразно использовать метод Холецкого [3]. Однако при переходе к дискретным моделям возникают проблемы, связанные с выбором шага дискретизации Δ и числа p (чисел $p_1,\ldots p_M$ для нелинейной модели), определяющих память системы. Также для нелинейных моделей Вольтерра проблемой является выбор степени полинома M.

Рассмотрим вопрос о сходимости данного метода идентификации. Пусть точная модель системы задается линейным оператором (2) и условие $h(t)=0$ при $t > p\Delta$ выполнено. Для того, чтобы каркас приближенных решений $\widetilde{H}$ достаточно хорошо приближал импульсную переходную функцию непрерывной модели, шаг дискретизации Δ нужно брать как можно меньше. Однако из (9) непосредственно видно, что малым погрешностям в задании Y таким, что $\|y-y_\delta\| \le \delta$, могут соответствовать сколь угодно большие ошибки в решении $\widetilde{H}$, если Δ не согласовано с δ и взято достаточно малым.

Пусть теперь для оператора (2) условие конечной памяти $h(t)=0, t > p\Delta$ заменено необходимым условием устойчивости линейной системы $h(t)\to 0, t\to+\infty$. Тогда для хорошей аппроксимации решения $h(t)$ число p нужно взять достаточно большим. Однако при этом матрица $\widetilde{A}^T\widetilde{A}$ может оказаться близкой к вырожденной, и малым погрешностям в ее задании могут соответствовать сколь угодно большие погрешности в решении. Аналогичные обстоятельства имеют место и для нелинейных моделей Вольтерра, но при этом возникает еще проблема с выбором степени полинома M. Если точная модель не является полиномиальной, то для достижения хорошей аппроксимации

M нужно брать достаточно большим, но при больших M могут возникать сколь угодно большие погрешности в решении.

Таким образом, как в линейном, так и в нелинейном случаях задача идентификации методом наименьших квадратов относится к числу некорректных. Для ее регуляризации можно применить метод выбора шага и длины памяти, согласуя выбор Δ и $p\ (p_1,\ldots p_M), M$ с уровнем погрешностей в задании исходных данных. Для этого можно применить критерий невязки, который для линейного случая записывается в виде $\|Ah_\delta - y_\delta\| = \delta$. Для нелинейных задач можно полагать $p_1 > p_2 > \ldots > p_M$ или (и) использовать увеличивающийся шаг дискретизации при вычислении однородных слагаемых возрастающих степеней. Отметим, что при переходе от непрерывных моделей к дискретным, можно использовать не только формулы прямоугольников, но и более точные квадратурные формулы Грегори и Симпсона [3].

При фиксированных Δ и p регуляризацию можно осуществлять, заменив уравнение (8) близким к нему

$$(\Delta\widetilde{A}^T\widetilde{A} + \alpha I)\widetilde{H} = \widetilde{A}^t Y, \qquad (12)$$

где α - параметр регуляризации, величина которого определяется из условия невязки.

К другим методам решения и регуляризации задач метода наименьших квадратов относится метод сингулярного разложения, в котором система нормальных уравнений не используется.

Сингулярным разложением матрицы A размерности $N \times P$ называется её представление в следующей форме

$$A = U\Sigma V^t, \qquad (13)$$

где U - ортогональная матрица $N \times N$, V - ортогональная матрица,

а Σ - диагональная матрица $N \times p$, диагональными элементами которой являются сингулярные числа $\sigma_j, j = 1,\ldots,p$ матрицы A,

Применение сингулярного разложения позволяет свести исходную задачу к задаче с диагональной матрицей $\Delta\Sigma = diag(\Delta\sigma_1,\ldots,\Delta\sigma_p)$. Решение этой задачи дается формулой

$$Z_j = \frac{d_j}{\sigma_j\Delta}, j = 1,\ldots,p, \text{ где обозначено } V^T H = Z,\ U^T Y = d. \qquad (14)$$

Из этой формулы видно, что если величина $\sigma_j\Delta$ очень мала, то соответствующая составляющая решения Z_j, будет очень велика. Поэтому в методе сингулярного разложения ограничиваются некоторым фиксированным уровнем квадрата невязки и удаляют из решения те составляющие решения, которые соответствуют очень малым значениям $\sigma_j\Delta$. Выберем максимальное из сингулярных чисел - $\sigma_{\max}$ и зададим число τ, например $\tau = 10^{-3}\sigma_{\max}\Delta$, которое характеризует точность исходных данных для решаемой задачи.

Положим

$$Z_j = \begin{cases} \dfrac{d_j}{\sigma_j\Delta}, & \sigma_j\Delta > \tau \\ 0 & \sigma_j\Delta < \tau \end{cases} \qquad (15)$$

Формула (15) связывает сингулярное число σ_j и шаг интегрирования Δ с точностью задания исходных данных. Так как $\sigma_j = \sigma_j(p)$, (для нелинейной задачи $\sigma_j = \sigma_j(p_1,\ldots p_M, M)$) изменяя Δ и σ_j можно получить решения с точностью, с которой заданы исходные данные. В этом состоит регуляризирующее свойство алгоритма сингулярного разложения. Проверка правильности выбора значения $p,(p_1,\dots p_M,M)$ и Δ производится путем общего анализа решаемой задачи.

После нахождения Z по формуле (14), решение исходной задачи H находится по формуле $H = VZ$.

Рассмотрим результаты идентификации линейной системы управления задаваемой колебательным звеном. В случае если выходной сигнал $y(t)$ не зашумлен и когда шум является гладким, то рассмотренные выше методы, как с регуляризацией, так и без, дают удовлетворительные результаты.

На рисунках 2 и3 представлены результаты идентификации на временном интервале $T = 20$ с шагом $\Delta = 0.02$ для входного сигнала $x(t) = \sin(2\pi t) + 0.25\sin(6\pi t)$ и аддитивной помехи - белый гаусовский шум.

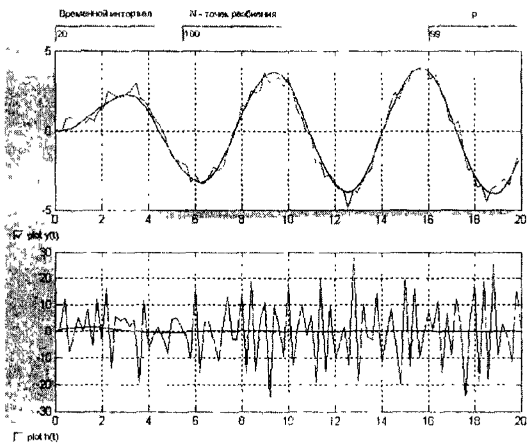

Рисунок 2. Идентификация линейной системы методом наименьших квадратов без параметра регуляризации.

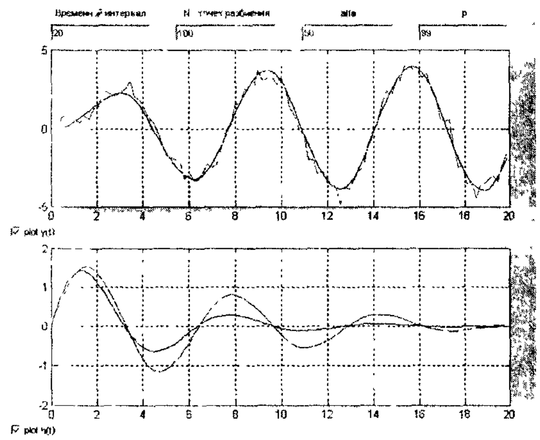

Рисунок 3. Идентификация линейной системы методом наименьших квадратов с параметром регуляризации

Таким образом, в случае, когда выходной сигнал не является гладким, метод наименьших квадратов без регуляризации показывает неудовлетворительные результаты. В данном случае можно рекомендовать применение МНК метода, когда уравнение (8) заменяется близким к нему (12).

Библиографический список

1. Пупков К. А., Капалин В. И. Ющенко А. С. Функциональные ряды в теóрии нелинейных систем. – М. : Наука, 1976.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1979.
3. Верлань А.Д. Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка, 1986..
4. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М. :Мир,1980.
5. Льюнг Л. Идентификация систем. – М. : Наука, 1991.
6. Сейдж Э., Мелса Д. Идентификация систем управления. – М.: Наука, 1974.

NONPARAMETRIC IDENTIFICATION OF OBJECTS AND SOLUTION OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER.

V.I.Kapalin, D.E.Popovich, Nguen Man Kyong

A new method of nonparametric identification of objects has been offered, which makes it possible to apply Volterra functional series apparatus for analysis of feedback nonlinear systems.