УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЫ С ЯДРАМИ, ОДНОРОДНЫМИ СТЕПЕНИ -1

А.П.Солдатов*

Белгородский государственный университет,
308015, г. Белгород, ул. Победы,85

Изучено поведение интегралов с ядрами, однородными степени -1, вблизи линии интегрирования, которая предполагается прямой или отрезком. При определенных условиях на ядро получен аналог формул Сохоцкого-Племеля, известный в теории интегралов типа Коши.

В различных приложениях возникает необходимость изучения интегралов вида

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} Q(y, y-x)\varphi(y)ds_y, \quad x \notin \Gamma \qquad (1)$$

на гладкой кривой Γ, где функция $Q(y,\xi)$ непрерывна и однородна степени -1 по ξ. Например, интегралы такого вида возникают при исследовании эллиптических уравнений методом потенциала [1,2]. К этому типу относятся и обобщенные интегралы Коши

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} [Q_1(y-x)dy_1 + Q_2(y-x)dy_2]\varphi(y)ds$$

на ориентированной кривой Γ, где функции $Q(\xi)$ нечетны и однородны степени -1. Граничные свойства этих интегралов изучались в [3-5].

Рассмотрим непрерывную на $R^2\setminus 0$ функцию $Q(\xi)$, однородную степени -1. Последнее означает, что $Q(\lambda\xi) = Q(\xi)/\lambda$, $\lambda > 0$. Очевидно, функция Q полностью определяется своими значениями на единичной окружности, которую обозначим **T**. С помощью параметризации $\xi_1 = \cos\theta$, $\xi_2 = \sin\theta$, от сужения Q на **T** можем перейти к 2π - периодической функции $f(\theta) = Q(\cos\theta, \sin\theta)$. Можно также написать $Q(\xi) = f(\arg\xi)$, понимая под $\arg\xi$ угловую координату θ точки $\xi \in \mathbf{T}$. В общем случае произвольной точки ξ очевидно

$$Q(\xi) = \frac{f(\arg\xi)}{|\xi|}.$$

Напомним, что $|\varphi|_{0,E}$ и $[\varphi]_{\mu,E}$ означают, соответственно sup – норму и постоянную Гельдера функции φ на E, а при $0 < \mu \le 1$ сумма $|\varphi|_{\mu} = |\varphi|_0 + [\varphi]_{\mu}$ определяет норму Гельдера. В силу сказанного выше $|Q|_{\mu,T}$ является нормой в классе однородных функций степени -1. Очевидно,

$$|Q|_{0,G(\delta)} \le \delta^{-1}|Q|_{0,T} \quad G(\delta) = \{\delta \le |\xi| \le \delta^{-1}\}. \qquad \mathbf{(2)}$$

Аналогичная оценка справедлива и для полунормы Гельдера:

$$Q|_{\mu,G(\delta)} \le M\,|Q|_{\mu,T}, \qquad (3)$$

где постоянная $M > 0$ зависит только от m и δ.

В самом деле, пусть M_1, M_2, ... означают различные постоянные этого типа. Тогда для $\xi, \xi_0 \in \mathbf{T}$ и $\delta \le r, r_0 \le \delta^{-1}$ имеем:

$$|Q(r\xi) - Q(r_0\xi_0)| \le |r^{-1}Q(\xi) - r_0^{-1}Q(\xi_0)| \le M_1|Q|_{0,T}|r - r_0| + M_2[Q]_{\mu,T}|\xi - \xi_0|^{\mu}.$$

Поскольку

$$|r\xi - r_0\xi_0|^2 = r^2 - 2r r_0 \xi\xi_0 + r_0^2 = (r - r_0)^2 + r r_0|\xi - \xi_0|^2,$$

* soldatov@bsu.edu.ru

где ξ и ξ_0 означает скалярное произведение единичных векторов ξ и ξ_0, отсюда следует требуемая оценка (3).

Из оценки (3) и свойства однородности вытекает, что

$$\max_{\delta\le|\xi||\eta|^{-1}\le\delta^{-1}} \frac{|Q(\xi)-Q(\eta)|}{|\xi-\eta|^{\mu}} \le M|\xi|^{-1-\mu}[Q]_{\mu,\mathrm{T}}.$$

В самом деле, переход от ξ и η к $r\,\xi$ и $r\,\eta$ не меняет этой оценки. Поэтому можно считать $\xi\in\mathbf{T}$, $\eta\in G$. Но в этом случае она является следствием (3).

Лемма 1. *Пусть функция $Q(\xi)$ однородна степени -1 и удовлетворяет на* $\mathbf{T}$ *условию Гельдера, причем*

$$Q(-e)=-Q(e) \qquad \textbf{(4)}$$

для некоторого $e\in\mathbf{T}$. Пусть ориентируемая прямая L имеет e своим направляющим вектором, и точка c лежит слева от L. Тогда

$$\lim_{R\to\infty}\int_{L\cap\{|y|\le R\}} Q(y-c)ds_y = \int_0^{\pi/2}\frac{f(\theta_e-\theta)+f(\theta_e-\pi+\theta)}{\sin\theta}d\theta, \qquad (5)$$

где $f(\theta)=Q(\cos\theta,\sin\theta)$ и $\theta_e=\arg e$.

Заметим, что интеграл в правой части (5) существует, так как в силу (4) функция $g(\theta)=f(\theta_e-\theta)+f(\theta_e-\pi+\theta)$ обращается в нуль при $\theta=0$ и по предположению удовлетворяет условию Гельдера.

Доказательство. Пусть e^* – единичный вектор внешней нормали к полуплоскости, лежащий слева от L. Тогда e получается поворотом e^* на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Если c^0 — проекция точки c на L, то $c^0-c=\rho e^*$, где ρ – расстояние от точки c до L. При достаточно больших R окружность $|y|=R$ пересекает L в двух точках $y_\pm$, так что отрезок $L\cap\backslash\{|y|\le R\}$ описывается параметрическим уравнением

$$y=c^0+\rho te,\quad t_-\le t\le t_+.$$

При этом равенство $(c^0+\rho te)^2=R^2$ дает для корней $t_\pm$ квадратное уравнение, в котором коэффициент при t не зависит от R. Следовательно, по теореме Виета величина t_++t_- сохраняет постоянное значение, когда $t_\pm\to\pm\infty$ при $R\to\infty$. Очевидно,

$$\int_{L\cap\{|y|\le R\}} Q(y-c)ds_y=\rho\int_{-}^{+}Q(\rho te+\rho e^*)dt=\int_{-}^{+}Q(te+e^*)dt,$$

где учтено свойство однородности степени -1.

Из определения видно, что векторы e и e^* получаются из $e_0=(1,0)$ и e_0^* - (0, -1) поворотом на угол θ_e против часовой стрелки. Поэтому и $\arg(te+e^*)=\theta_e+\arg(te_0+e^*_0)$. Поскольку $\arg(te_0+e^*_0)=\arg(t,-1)=-\operatorname{arcctg} t$, отсюда

$$\int_{L\cap\{|y|\le R\}} Q(y-c)ds_y=\int_{-}^{t_+}\frac{f(\theta_e-arcctgt)}{\sqrt{1+t^2}}dt=$$

$$=\int_0^{t_+}\frac{f(\theta_e-arcctgt)+f(\theta_e-\pi+arcctgt)}{\sqrt{1+t^2}}dt=$$

$$=\int_{t_+}^{-t_-}\frac{f(\theta_e-\pi+arcctgt)}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$

Вспоминая, что $t_\pm\to\pm\infty$ и $t_++t_-=\mathrm{const}$ при $R\to\pm\infty$, последний интеграл в правой части стремится к 0. Поэтому

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{L\cap\{|y|\le R\}} Q(y-c)ds_y = \int_0^{+\infty}\frac{f(\theta_e - arcctgt\,)+f(\theta_e-\pi+arcctgt\,)}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$

Остается заметить, что интеграл справа при подстановке $\theta = \mathrm{ctg}\ t$ переходит в правую часть (5). В предположении (4) удобно для интеграла (5) ввести специальное обозначение:

$$\hat{Q}(e) = \int_0^{\pi/2}\frac{f(\theta_e-\theta)+f(\theta_e-\pi+\theta)}{\sin\theta}d\theta. \qquad (6)$$

Очевидно, $\hat{Q}(e)$ получается в этой формуле заменой θ_e на $\theta_c+\pi$, так что значения $\hat{Q}(\pm e)$ между собой никак не связаны. Однако в случае нечетного ядра $Q(\xi)$ функция $f(\theta+\pi) = -f(\theta)$ и, значит, $\hat{Q}(-e) = -\hat{Q}(e)$.

Предел в левой части (5) можно рассматривать как сингулярный (на ∞) интеграл по прямой L. В этом смысле равенство (5) означает, что

$$\int\limits_L Q(y-x)ds_y = \hat{Q}(\pm e), \qquad x\in G^{\pm}, \qquad (7)$$

где $G^{\pm}$ есть полуплоскости, определяемые ориентируемой прямой L (верхний знак отвечает полуплоскости, лежащей слева от L).

Можно также рассматривать и аналогичный сингулярный интеграл для $x = y_0 \in L$ как предел

$$\int\limits_L Q(y-y_0)ds_y = \lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty}\int\limits_{L\cap\{\varepsilon\le|y-y_0|\le R\}} Q(y-y_0)ds_y.$$

Однако в силу (4) интеграл под знаком предела равен нулю. В самом деле, при замене $y - y_0 = et$ этот интеграл переходит в

$$\left(\int_{-R}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right)Q(et)dt = [Q(-e)+Q(e)]\int_{\varepsilon}^{R}\frac{dt}{t} = 0.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\phi(x) = \int\limits_{L_0} Q(y-yx)ds_y, \qquad x\in L_0 \qquad (8)$$

по отрезку $L_0 = [a, b]$ прямой L с направляющим вектором $e = (b - a)/|b - a|$. Относительно однородной степени -1 функции $Q(\xi)$ предполагаем ее непрерывность по Гельдеру, т.е. $Q(\xi) \in C^{\mu}(T)$, $0 < \mu \le 1$.

Если компакт K на плоскости не пересекается с L_0, то при достаточно малом $\delta > 0$ выполнено неравенство $\delta \le |y - x| \le \delta^{-1}$ для всех $y \in L_0$, $x\in K$, так что на основании (2), (3) имеем оценку

$$|\phi|_{\mu,K} \le M|Q|_{\mu,T}, \quad K\cap L_0 = \varnothing. \qquad (9)$$

Рассмотрим поведение $\phi(x)$ вблизи отрезка L_0 в конечной области, имеющей с L_0 общие граничные точки и лежащей по одну сторону от отрезка. Для большей точности обозначим $D^{\pm}$ конечную область, содержащуюся в полуплоскости $G^{\pm}$ и граничащую с $L_0 = [a, b]$ по отрезку, не содержащему точек a, b. Поведение $\phi(x)$ вблизи этих точек рассмотрим отдельно.

Теорема 1. *Пусть ядро $Q(\xi)$однородно степени -1, принадлежит C^{μ} **(T)** и удовлетворяет условию (4). Тогда функция $\phi(x)$ непрерывна по Гельдеру в области $D^{\pm}$ с показателем μ и справедлива оценка*

$$|\phi|_{\mu,D^{\pm}} \le M|Q|_{\mu,T}, \qquad (10)$$

где постоянная $M > 0$ зависит только от μ и расстояния $D^{\pm}$ до концов a, b отрезка L_0. В частности, существуют предельные значения

$$\phi^{\pm}(y_0) = \lim_{x \to y_0, x \in D^{\pm}} \phi(x)$$

для внутренних точек y_0 отрезка L_0. Кроме того, в этих точках существует и сингулярный интеграл

$$\phi^*(x) = \int_{L_0} Q(y - y_0) ds_y = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{L_0 \cap \{|y - y_0| \ge \varepsilon\}} q(y - y_0) ds_y$$

связанный с $\phi^{\pm}$ соотношениями

$$\phi^{\pm}(y_0) = \hat{Q}(\pm e) + \phi^*(y_0). \qquad (11)$$

Доказательство. Очевидно, компакт $K = \overline{D}^{\pm}$ не пересекается с $L_1 = \overline{L \setminus L_0}$.. Убедимся, что аналогичная (9) оценка справедлива и для интеграла

$$\phi_1(x) = \int_{L_1} Q(y - x) ds_y, \quad x \in K,$$

где интеграл понимается как сингулярный на ∞. Существование этого интеграла при фиксированном x = c обосновывается совершенно аналогично лемме 1. Поэтому утверждение достаточно установить для разности

$$\phi_1(x) - \phi_1(c) = \int_{L_1} [Q(y - x) - Q(y - c)] ds_y$$

Отношение $|y - x| / |y - x'|$ как функция переменных $y \in L_1$ и $x, x' \in K$ непрерывна и стремится к 1 при $|y| \to \infty$ равномерно по x, x'. Поэтому существует столь малое $\delta > 0$, что

$$\delta \le \frac{|y - x|}{|y - x'|} \le \delta^{-1}.$$

На основании (5) отсюда следует

$$|Q(y - x) - Q(y - x')| \le M_1 [Q]_{\mu, T} \frac{|x - x'|^{\mu}}{|y - x|^{1+\mu}},$$

где постоянная $M_1 > 0$ зависит только от μ и δ. В результате приходим к оценке (9) для ϕ_1. Заметим теперь, что сумма $\phi + \phi_1$ совпадает с сингулярным интегралом (7) по всей прямой и сохраняет постоянное значение $\hat{Q}(\pm e)$ в полуплоскости $G^{\pm}$. Отсюда оценка (10) получается непосредственно.

Обратимся к формулам (11). По отношению к соответствующим интегралам по всей прямой L они очевидны, поскольку, как отмечено выше,

$$(\phi + \phi_1)^{\pm}(y_0) = \hat{Q}(\pm e), \qquad (\phi + \phi_1)^*(y_0) = 0.$$

С другой стороны, $\phi_1^*(y_0) = \phi_1^{\pm}(y_0) = \phi_1(y_0)$. Поэтому

$$\hat{Q}(\pm e) = (\phi + \phi_1)^{\pm}(y_0) = \phi^{\pm}(y_0) + \phi_1(y_0) = \phi^{\pm}(y_0) - \phi^*(y_0),$$

что и доказывает (11).

Особо остановимся на частном случае, когда

$$Q(e) = Q(-e) = 0. \qquad (12)$$

Очевидно, что этому условию удовлетворяет и неотрицательная функция $|Q(\xi)|$, которая также принадлежит классу $C^{\mu}(T)$. Из (12) также следует, что для внутренних точек y_0 отрезка L_0 интеграл

$$\int_{L_0\cap\{|y-y_0|\ge\varepsilon\}} Q(y-y_0)ds_y=0, \tag{13}$$

так что и $\phi^*(y_0)=0$, поэтому (11) переходит в $\phi^\pm(y_0)=\hat{Q}(\pm e)$. Поскольку $f(\theta_e)=f(\theta_e+\pi)=0$ равенство (8) и аналогичное выражение для $\hat{Q}(-e)$ можно переписать в форме

$$\hat{Q}(\pm e)=\int_0^\pi\frac{f(\theta_e\mp\theta)}{\sin\theta}d\theta.$$

Утверждается, что

$$\int_{L_0}|Q(y-x)|ds_y\le\int_0^\pi\frac{f(\theta_e\mp\theta)}{\sin\theta}d\theta, x\in G^\pm. \tag{14}$$

В самом деле, пусть для определенности x лежит в полуплоскости G^+ и x^0 – проекция точки x на прямую L, так что $\rho=|x-x^0|$ есть расстояние от x до L. Пусть t_- и t_+ – значения параметра t в параметрическом уравнении $y=x^0+\rho te$ прямой L, отвечающие, соответственно, концам $y=a$ и $y=b$ отрезка L_0. Из доказательства леммы 1, примененного к $|Q(\xi)|$, видно, что

$$\int_{L_0}|Q(y-x)|ds_y=\int_{t_-}^{t_+}|Q(te+e^*)|dt.$$

Следовательно,

$$\int_{L_0}|Q(y-x)|ds_y=\int_{t_-}^{tt_+}\frac{|f(\theta_e-arcctg\,t)|}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$

Отсюда следует оценка (14) для верхнего знака. Рассуждения для нижнего знака аналогичны.

Оценка (14), в частности, показывает, что в предположении (12) функция (8) ограничена и по модулю не превосходит максимальной из величин (13).

Рассмотрим случай, когда функция $Q(\xi)$ непрерывно дифференцируема (при $\xi\ne 0$) или, что равносильно, $f(\xi)=Q(\cos\theta,\sin\theta)\in C^1$. В этом случае формулу (6) можно проинтегрировать по частям, поскольку

$$\frac{d\theta}{\sin\theta}=\left(\ln tg\frac{\theta}{2}\right)' d\theta.$$

В результате получим равенство

$$\hat{Q}(e)=g(e)\left(\ln tg\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}g'(\theta)\left(\ln tg\frac{\theta}{2}\right)d\theta,$$

где положено $g(\theta)=f(\theta_e-\theta)+f(\theta_e-\pi+\theta)$. Очевидно, внеинтегральный член здесь обращается в нуль, так что

$$\hat{Q}(e)=\int_0^{\pi/2}g'(\theta)\left(\ln tg\frac{\theta}{2}\right)d\theta=\int_0^\pi f'(\theta_e-\theta)\left(\ln tg\frac{\theta}{2}\right)d\theta.$$

Отметим далее, что сингулярный интеграл в (7) можно продифференцировать под знаком интеграла, в результате получим равенство

$$\int_L\frac{\partial Q}{\partial\xi_i}(y-x)ds_y=0,\quad i=1,2. \tag{15}$$

Для доказательства достаточно эту операцию осуществить по отношению к обычному интегралу

$$\int_L[Q(y-x)-Q(y-c)]ds_y$$

фиксированной точкой $c \notin L$, для которого правомерность ее применения не вызывает сомнений. Так же обосновываются и формула дифференцирования функции ϕ_1 (для $\phi(x)$ эта формула очевидна). На основании (15) отсюда

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} = 0, \quad x \notin L.$$

Поэтому частные производные

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in C\left(R^2 \setminus \{a, b\}\right) \tag{16}$$

и, следовательно, при обходе вокруг концов a, b отрезка L_0 функция $\phi(x)$ допускает ветвление в классе C^1. Рассмотрим характер этого ветвления подробнее.

Лемма 2. *Пусть ядро $Q(\xi)$ однородно степени -1, непрерывно дифференцируемо при $\xi \neq 0$ и удовлетворяет условию (4). Тогда в окрестности точки a функция $\phi(x)$ представима в виде*

$$\phi(x) = C\ln|x-a| + H[\arg(x-a)] + \phi^0(x), \quad \phi^0 \in C^1, \tag{17}$$

где $C = const$, а производная $H'(\theta)$ непрерывна и 2π - периодична.

Доказательство. Пусть $L^{\pm}$ означают лучи $\{a + et, \pm t \geq 0\}$ прямой L с вершиной a. Тогда

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_{L^+} \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(y-x)ds_y - \int_{L^+ \setminus L_0} \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(y-x)ds_y.$$

Поскольку ядро $\partial Q / \partial \xi_i$ однородно степени -2, интеграл

$$\int_{L^+} \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(y-x)ds_y = \int_0^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(a+et-x)dt = \frac{1}{r}\int_0^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}\left(et' - \frac{x-a}{r}\right)dt', \quad r > 0$$

Следовательно, в полярных координатах

$$r = |x-a|, \theta = \arg(x-a) \tag{18}$$

последний интеграл представляет собой значение $g_i(\theta)$ некоторой функции g_i, заданной и непрерывной на интервале $(\theta_e, \theta_e + 2\pi)$. Соответственно,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{g_i(\theta)}{r} + \phi_i^0(x), \quad |x-a| \leq r_0, \tag{19}$$

где функция ϕ_i^0 задана и непрерывна в круге $|x-a| \leq r_0$ для достаточно малого $r_0 > 0$. Из (16) видно, что в действительности функция g_i непрерывна и 2π -периодична на всей прямой.

Условимся ϕ как функцию полярных координат (18) записывать $\phi(r, \theta)$. Тогда с учетом очевидных формул дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{20}$$

Из (19) выводим соотношения

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C(\theta)}{r} + \phi_1(r, \theta), \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = H'(\theta) + r\phi_2(r, \theta)$$

с некоторыми функциями ϕ_i, непрерывными в прямоугольнике $0 \leq r \leq r_0$, $\theta_e \leq \theta \leq \theta_e + 2\pi$. Следовательно,

$$\phi(r, \theta) = C(\theta)\ln r + \phi(r_0, \theta) + \int_r^{r_0} \phi_1(t, \theta)dt.$$

В частности, для фиксированных θ_1, θ_2 разность

$$\phi(r,\theta_2)-\phi(r,\theta_1)=[C(\theta_2)-C(\theta_1)]\ln r$$

ограничена при $r\to 0$. Поскольку, с другой стороны, эта разность представляется в форме

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}[H'(\theta)+r\phi_2(r,\theta)]d\theta.$$

Следовательно, должно быть $C(\theta_2)-C(\theta_1)=0$. Другими словами, функция $C(\theta)=g_1(\theta)\cos\theta+g_2(\theta)\sin\theta$ постоянна.

Запишем соотношения, обратные к (20):

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial x_2}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Из них следует, что

$$\frac{\partial[C\ln r+H(\theta)]}{\partial x_i}=\frac{g_i(\theta)}{r},\quad i=1,2.$$

Поэтому частные производные функции ϕ^0 в (17) совпадают с функциями ϕ_i^0, что завершает доказательство леммы.

Заметим, что при $H(0)\neq H(2\pi)$ функция H не является 2π-периодической, однако разность $H_0=H(\theta+2\pi)-H(\theta)$ является константой. Из формул (11), (17) видно, что эта константа совпадает с $\hat{Q}(-e)-\hat{Q}(e)$.

Отметим еще, что при $Q(e)=Q(-e)=0$ постоянная C в (16) обращается в нуль. В самом деле, в том случае $Q(y-y_0)=0$ для любых $y_0,y\in L$ и, значит $\phi^*(y_0)=0$. Поэтому с учетом (11) в соотношении (17) должно быть $C=0$.$ В частности, функция $\phi(x)$ ограничена на $R^2\setminus\{a,b\}$.

Литература

1. Берс, Л Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. – М. : Мир, 1966.

2.Fichera, G. Ricci P.E., The single layar potencial approach in the theory of boundary value problems for elliptic equations, Lecture Notes in Math., V.561, P. 39-50.

3. Солдатов, А.П. Обобщенный интеграл типа Коши // Сообщ. АН Грузии, 1991. – Т.141, № 2-3. – С.349-351.

4. Солдатов, А.П. Обобщенные потенциалы двойного слоя / А.П. Солдатов // Математические методы в технике и технологиях : сб. тр. XII Междунар. науч. конф.; ММТТ-XII. –Т. 1, Великий Новгород. – 1999.– С. 97-99.

5. Солдатов, А.П. Обобщенные ядра Коши и Пуассона / А.П. Солдатов // Известия Международной академии наук высшей школы. – 2003. – No 4(26). – С. 178-184.

Integrals with kernels which are homogeneous of degree -1

A.P.Soldatov

The Belgorod State University, 308007, Belgorod, Studentcheskaja St., 14

The integrals with kernels which are homogeneous of degree -1 are considered. Their behavior near the integration line is considered. Under some assumptions the analogue of Sohotskiy- Plemel formula is received.