НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ. 2004. № 3. Вып. 9.

УДК 533.72

К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕПАДАХ ТЕМПЕРАТУРЫ

М.А. Аматов*, Н.В. Малай, А.Н. Макаренко

Белгородский государственный университет
308015, Белгород, ул. Победы, 85

Предложен аналитический метод приближенного решения уравнения Навье-Стокса. С помощью этого метода проведено решение задачи обтекания нагретой частицы сфероидальной формы в вязкой несжимаемой жидкости при малых перепадах температуры. Примененная методика позволяет исследовать и более общий случай – обтекание сфероидальной частицы при больших перепадах температуры

ВВЕДЕНИЕ.

При рассмотрении многих прикладных задач, в частности: при разработке методов тонкой очистки жидкостей от гидрозольных частиц; при анализе процессов переноса гидрозольных частиц в зоне протекания химических реакций и т.д. – необходимо знать поведение гидрозольной частицы в термодинамически неравновесной вязкой среде [1]. Для этого необходимо совместно решать уравнения Навье-Стокса и уравнение конвективной теплопроводности (диффузии) с соответствующими граничными условиями. Если обозначить через T_s среднюю температуру поверхности частицы, а через T_∞ – температуру окружающей вязкой жидкости вдали от частицы, то при выполнении условия $(T_s - T_\infty)/T_\infty << 1$ (перепад температуры между частицей и жидкостью мал) при описании движения частицы можно не учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (динамической и кинематической вязкости, теплопроводности, диффузии) от температуры. В этом случае можно получить точное решение системы уравнений гидродинамики и тепломассопереноса. Однако если имеет место соотношение $(T_s - T_\infty)/T_\infty \sim 0(1)$, что справедливо во многих прикладных задачах, то необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса от температуры.

Из всех параметров переноса жидкости только коэффициент вязкости сильно зависит от температуры. Зависимость динамической вязкости от температуры можно выразить формулой

$$\mu_e = \mu_\infty [1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n (\frac{T_e}{T_\infty} - 1)^n] \times \exp\{-A(\frac{T_e}{T_\infty} - 1)\}, \qquad 1)$$

где $\mu_\infty = \mu_e(T_\infty)$, $F_n = \text{const}$. Здесь и далее индексы «e» и «i» будем относить соответственно к вязкой жидкости и частице; индексом «∞» – обозначены параметры жидкости на бесконечности, т.е. вдали от частицы, и индексом «s» – средние значения физических величин на поверхности частицы.

* amatovm@bsu.edu.ru, malaj@bsu.edu.ru
Belgorod State University Scientific Bulletin, issue 9, 2004

Анализ имеющихся полуэмпирических формул показывает, что выражение (1) наилучшим образом описывает изменение вязкости в широком интервале температур. Без учета коэффициентов F_n относительная погрешность при вычислении коэффициента μ_e может достигать 40%.

Один из наиболее распространенных и эффективных способов приближенного решения дифференциальных уравнений – это интегрирование их при помощи обобщенных степенных рядов. В настоящей статье этот способ применён для исследования обтекания нагретой частицы сфероидальной формы плоскопараллельным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Эта задача интересна тем, что позволяет сравнить результаты, полученные разными методиками.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим задачу обтекания сплюснутого сфероида потоком жидкости, параллельным его оси вращения при малых относительных перепадах температуры. Сфероид предполагается находящимся в покое, а жидкость имеет на бесконечности скорость U_∞, направленную в сторону положительной полуоси OZ. Благодаря существующей симметрии, течение является осесимметричным.

Системой координат, соответствующей данной задаче, является система координат сплюснутого сфероида $\varepsilon, \eta, \varphi$. Криволинейные координаты $\varepsilon, \eta, \varphi$ связаны с декартовыми координатами, следующими соотношениями:

$$x = c\,\mathrm{sh}\varepsilon \sin\eta \cos\varphi\ ,\ y = c\,\mathrm{sh}\varepsilon \sin\eta \sin\varphi\ ,\ z = c\ \mathrm{ch}\varepsilon \cos\eta \tag{1.1}$$

$$x = c\,\mathrm{ch}\varepsilon \sin\eta \cos\varphi\ ,\ y = c\,\mathrm{ch}\varepsilon \sin\eta \sin\varphi\ ,\ z = c\ \mathrm{sh}\varepsilon \cos\eta \tag{1.2}$$

где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ — в случае вытянутого сфероида ($a < b$, формула (1.1)) и $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — в случае сплюснутого сфероида ($a > b$, формула (1.2)); a и b — полуоси сфероида.

Распределение полей скорости U_e, давления P_e в окрестности частицы описывается линеаризованным уравнением Навье-Стокса

$$\mu_e \Delta U_e = \nabla P_e,\ \mathrm{div}\, U_e = 0 \tag{1.3}$$

с граничными условиями:

$$U_\varepsilon = 0, \qquad U_\eta = 0 \qquad \text{при } \varepsilon = \varepsilon_0, \tag{1.4}$$

$$U_\varepsilon = U_\infty \cos\eta,\ U_\eta = -U_\infty \sin\eta,\ P_e = P_\infty \qquad \text{при } \varepsilon \to \infty. \tag{1.5}$$

Здесь U_ε и U_η – нормальная и касательная компоненты массовой скорости U_e; $U_\infty = |U_\infty|$, U_∞ – величина скорости набегающего потока, которая подлежит определению из условия обращения в нуль полной силы, действующей на частицу.

В граничном условии (1.4) на поверхности частицы учтено условие прилипания для нормальной и касательной составляющей массовой скорости. Поверхности частицы соответствует координатная поверхность со значением ε, равным ε_0. На большом расстоянии от частицы ($\varepsilon \to \infty$) справедливы граничные условия (1.5).

Общая сила, действующая на сфероидальную частицу со стороны окружающей среды, определяется по формуле [3]:

$$F_z = \oint_s \left(-P_e \cos\eta + \sigma_{\varepsilon\varepsilon} \cos\eta - \frac{\mathrm{sh}\varepsilon}{\mathrm{ch}\varepsilon} \sigma_{\varepsilon\eta} \sin\eta \right) ds, \qquad (1.6)$$

где $dS = c^2 \mathrm{ch}^2\varepsilon \sin\eta \, d\eta d\varphi$ — элемент площади поверхности; $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ и $\sigma_{\varepsilon\eta}$ — компоненты тензора напряжений в сфероидальной системе координат.

ОПИСАНИЕ СПОСОБА РЕШЕНИЯ.

Исходя из вида граничного условия (1.5) вдали от сфероида ($\varepsilon \to \infty$) будем искать решение краевой задачи (1.3) – (1.5) в следующем виде:

$$U_\varepsilon(\varepsilon,\eta) = \frac{U_\infty}{c\,\mathrm{ch}\varepsilon H_\varepsilon} G(\varepsilon)\cos\eta, \; U_\eta(\varepsilon,\eta) = -\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon} g(\varepsilon)\sin\eta, \qquad (2.1)$$

где $G(\varepsilon)$ и $g(\varepsilon)$ – произвольные функции, зависящие только от радиальной координаты ε, $H_\varepsilon = c\sqrt{\mathrm{ch}^2\varepsilon - \sin^2\eta}$ – коэффициент Ламе.

Если воспользоваться функцией тока, то после несложных преобразований получаем следующее уравнение для функции $G(\varepsilon)$ [2]:

$$\left(1+\lambda^2\right)\left(\lambda^2+x^2\right)\frac{d^4G}{d\lambda^4} + 4\lambda\left(x^2-1\right)\frac{d^3G}{d\lambda^3} + 4\left(\lambda^2-1\right)\frac{d^2G}{d\lambda^2} + 8\lambda\frac{dG}{d\lambda} - 8G = 0 \,. \qquad (2.2)$$

Это уравнение четвертого порядка с независимой переменной $x = \cos\eta$, содержащее параметр $\lambda = \mathrm{sh}\varepsilon$.

Легко получить три решения уравнения (2.2), зависящие только от переменной $\lambda = \mathrm{sh}\varepsilon$, [2]

$$G_1(\varepsilon) = A_1\left[\lambda - \left(1+\lambda^2\right)\mathrm{arcctg}\,\lambda\right], \; G_2(\varepsilon) = A_2\lambda, \; G_3(\varepsilon) = A_3\left(1+\lambda^2\right) \qquad (2.3)$$

и соответственно выражения для компонентов скорости и давления равны:

$$U_\varepsilon(\varepsilon,\eta) = \frac{U_\infty}{c\,\mathrm{ch}\varepsilon H_\varepsilon}\cos\eta\left\{\lambda A_2 + \left[\lambda - \left(1+\lambda^2\right)\mathrm{arcctg}\,\lambda\right]A_1 + \left(1+\lambda^2\right)A_3\right\}, \qquad (2.4)$$

$$U_\eta(\varepsilon,\eta) = \frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\sin\eta\left\{\frac{A_2}{2} + \left(1 - \lambda\,\mathrm{arcctg}\lambda\right)A_1 + \lambda A_3\right\}, \qquad (2.5)$$

$$P_e(\varepsilon,\eta) = P_\infty + c\frac{\mu_e U_\infty}{H_\varepsilon^4} x\left(x^2+\lambda^2\right)A_2 \,. \qquad (2.6)$$

Используя решения, G_1, G_2 G_3 находим четвертое решение

$$G_4 = A_4\left\{\lambda^4 + 2\lambda^2\left(1-5x^2\right) + 2\left(1+\lambda^2\right)\left(5x^2-1\right)\ln\left(1+\lambda^2\right) + 15x^4\right\}. \qquad (2.7)$$

Сила, действующая на частицу сфероидальной формы, определяется по формуле (1.6). Подставляя в (1.6) выражения (2.4)–(2.6) после интегрирования, получаем

$$F_z = -4\pi\frac{\mu_e U_\infty}{c}A_2 \,. \qquad (2.8)$$

Постоянные интегрирования A_2 и A_3 определяются из граничных условий (1.4) и (1.5). Из условия $\varepsilon \to \infty$ находим $A_3 = c^2$ и, следовательно,

$$A_2 = -\frac{2c^2}{\lambda_0 - (\lambda_0^2 - 1)\operatorname{arcctg}\lambda_0} \quad (\lambda_0 = \operatorname{sh}\varepsilon_0). \tag{2.9}$$

Таким образом,

$$F_z = 8\pi\mu_e U_\infty \frac{c}{\lambda_0 - (\lambda_0^2 - 1)\operatorname{arcctg}\lambda_0}. \tag{2.10}$$

Формулу (2.10) удобно выразить через основные размеры сфероида полуоси a_0 и b_0. Пусть R радиус сферической частицы равен экваториальному радиусу сфероида, т.е. $a_0 = R$. Учитывая, что $c = R/\sqrt{1+\lambda_0^2}$, формулу (2.10) приводим к виду:

$$F_z = 6\pi R\mu_e U_\infty K_1, \tag{2.11}$$

где $K_1 = K_1(b_0/a_0)$ – поправка к закону Стокса для сферической частицы.

$$K_1 = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\left[\lambda_0 - (\lambda_0^2 - 1)\operatorname{arcctg}\lambda_0\right]}, \tag{2.12}$$

где $\lambda_0 = \dfrac{b_0}{c} = 1\Big/\sqrt{\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right)^2 - 1}$.

На поверхности частицы λ_0 зависит от полуосей a_0 и b_0 сфероида. Функция arcctg λ_0 имеет два различных разложения для различных значений λ_0:

$$\operatorname{arcctg}\lambda_0 = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{3\lambda_0^3} + \frac{1}{5\lambda_0^5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)\lambda_0^{2n+1}} \quad \text{при } \lambda_0 > 1, \tag{2.13а}$$

$$\operatorname{arcctg}\lambda_0 = \frac{\pi}{2} - \lambda_0 + \frac{\lambda_0^3}{3} - \frac{\lambda_0^5}{5} - +.. = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda_0^{2n+1}}{(2n+1)} \quad \text{при } \lambda_0^2 < 1. \tag{2.13б}$$

Откуда

$$\lambda_0 - (\lambda_0^2 - 1)\operatorname{arcctg}\lambda_0 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4(n+1)}{(2n+3)(2n+1)\lambda_0^{2n+1}} \quad \text{при } \lambda_0 > 1$$

и
$$\lambda_0 - (\lambda_0^2 - 1)\operatorname{arcctg}\lambda_0 = -\frac{\pi}{2}(\lambda_0^2 - 1) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4(n+1)\lambda_0^{2n+3}}{(2n+3)(2n+1)} \quad \text{при } \lambda_0^2 < 1.$$

Следовательно, имеем для коэффициента K_1 два выражения:

$$K_{11} = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4(n+1)}{(2n+3)(2n+1)\lambda_0^{2n+1}}} \quad \text{при } \lambda_0 > 1 \tag{2.14а}$$

$$\text{и } K_{12}=\frac{4}{3\sqrt{\lambda_0^2+1}}\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4(n+1)\lambda_0^{2n+3}}{(2n+3)(2n+1)}-\frac{\pi}{2}\left(\lambda_0^2-1\right)} \quad \text{при } \lambda_0^2<1. \qquad (2.14б)$$

Численные расчеты показывают, что $K_1=K_{12}$ при $b_0/a_0<\sqrt{2}/2$ и $K_1=K_{11}$ при $b_0/a_0<\sqrt{2}/2$.

Таким образом, при исследовании движения несферических тел переменная интегрирования на поверхности частицы зависит от ее геометрических размеров, что приводит к трудностям вычисления физических величин характеризующих это движение.

СТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ СФЕРОИДА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ.

Уравнение (2.2), описывающее обтекание сфероидальной частицы потоком вязкой несжимаемой жидкости, получено с использованием функции тока. Однако во многих прикладных задачах использование функции тока затруднительно. Поэтому проведем анализ движения частицы исходя непосредственно из самого уравнения Навье-Стокса. Будем искать решение краевой задачи (1.3) - (1.5) в виде (2.1).

Если подставить (2.1) в (1.3), то после несложных преобразований получаем следующее дифференциальное уравнение третьего порядка для функции $G(\varepsilon)$:

$$\left(-1+\frac{1+\lambda^2}{\lambda}arctg\frac{1}{\lambda}\right)\frac{d^3G}{d\lambda^3}-\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1-\lambda^2}{\lambda}arctg\frac{1}{\lambda}\right)\frac{d^2G}{d\lambda^2}+\frac{2}{1+\lambda^2}\left(1-\frac{1+\lambda^2}{\lambda}arctg\frac{1}{\lambda}\right)\frac{dG}{d\lambda}-$$

$$-\frac{2}{\lambda(1+\lambda^2)}\left(\frac{\lambda^2-1}{1+\lambda^2}-\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}\right)G=-\frac{D}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad (3.1)$$

где $D=\dfrac{cF_z}{\pi\mu_e U_\infty}$ – const.

Решение уравнения (3.1) ищется со следующими краевыми условиями:

$$G(\lambda_0)=0, \qquad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{G(\lambda)}{c^2(1+\lambda^2)}\to 1. \qquad (3.2)$$

Легко проверить, что решениями однородного уравнения соответствующего неоднородному уравнению (3.1) являются функции:

$$G_1(\varepsilon)=1+\lambda^2, \qquad G_2(\varepsilon)=\lambda+(1+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda, \qquad (3.3)$$

$$G_3=(1+\lambda^2)\int_0^{\lambda}\frac{1}{(1+z^2)^2}\left(\int_0^{z}\frac{t(1+t^2)dt}{(1+t^2)\operatorname{arctg}t-t}\right)dz.$$

С помощью решения $1+\lambda^2$ понизим порядок уравнения (3.1), введя новую функцию $\Phi(\lambda)$ по формуле:

$$G(\lambda)=(1+\lambda^2)\int\Phi(\lambda)d\lambda. \qquad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.1), получаем следующее уравнение:

$$\left(1+\lambda^2\right)\left(-1+\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}\right)\frac{d^2\Phi}{d\lambda^2}-\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\left(\frac{1+7\lambda^2}{1+\lambda^2}+\frac{1-7\lambda^2}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}\right)\frac{d\,\Phi}{d\lambda}-$$

$$-8\left(1-\lambda\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}\right)\Phi=-\frac{\mathbf{D}}{\left(1+\lambda^2\right)^2}. \qquad (3.5)$$

Будем искать решение уравнения (3.5) в виде обобщенных степенных рядов.

Случай A: $\lambda_0 > 1$.

В уравнение (3.5) вводим новую переменную $\nu = 1/\lambda$ и, учитывая, что

$$\operatorname{arctg}\nu = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\nu^{2n+1}}{(2n+1)},$$

получаем следующее уравнение:

$$\left[\nu^2+12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\nu^{2n+4}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right]\frac{d^2\Phi}{d\nu^2}+$$

$$+\left[-2\nu+12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+5)\nu^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right]\frac{d\Phi}{d\nu}- \qquad (3.6)$$

$$-\left[4-12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\nu^{2n+2}}{(2n+5)}\right]\Phi=-\frac{3}{2}\nu^2\frac{D}{\left(1+\nu^2\right)^2}.$$

Найдем сначала решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (3.6). Точка $\nu = 0$ для этого уравнения является регулярно особой точкой. Поэтому его решение ищем в виде обобщенного степенного ряда [4]:

$$\Phi=\nu^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}C_n\nu^n \quad \left(C_0\neq 0\right). \qquad (3\ 7)$$

Подставляя (3.7) в (3.6) и воспользовавшись правилами перемножения рядов, получаем следующую рекуррентную формулу для определения коэффициентов $C_n^{(1)}$, $(n \geq 1)$:

$$C_n^{(1)}=\frac{12}{n(n+5)}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n^2+8n+15}{\left(4k^2-1\right)(2k+3)}C_{n-2k}^{(1)}, \qquad n\geq 1. \qquad (3.8)$$

Здесь $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ – целая часть числа $\dfrac{n}{2}$, а $C_0^{(1)}=-1$, $C_1^{(1)}=0$, $C_2^{(1)}=2$, $C_3^{(1)}=0$.

Поскольку $C_0^{(1)}=-1\neq 0$ то, приравнивая коэффициент при $C_0^{(1)}$ нулю, получаем определяющее уравнение: $C_0\left[\rho(\rho-1)-2\rho-4\right]=0$, корни которого равны соответственно $\rho_1=4$, $\rho_2=-1$. Большему из корней $\rho_1=4$ отвечает решение:

$$\Phi_1(\nu)=\nu^4\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(1)}\nu^{\ n} \quad (C_0-\mathrm{const}). \tag{3.9}$$

Второе решение однородного уравнения отбрасываем, поскольку оно содержит логарифм и не удовлетворяет граничному условию на бесконечности.

Найдем решение неоднородного уравнения (3.6), для этого функцию $\dfrac{1}{(1+\nu^2)^2}$ разложим в ряд

$$\frac{1}{(1+\nu^2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n}{n!}\nu^n,$$

где $\Delta_0=1,\Delta_1=0,\Delta_n=-(n-1)(n+2)\Delta_{n-2}\ (n\geq 2)$.

Решение ищем в виде обобщенного степенного ряда

$$\Phi_2=\nu^2\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(2)}\nu^n+\beta\nu^4\ln(\nu\lambda_0)\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(1)}\nu^n \qquad (C_0^{(2)}-\mathrm{const}). \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.6), методом неопределенных коэффициентов находим для вычисления коэффициентов $C_n^{(2)}$ следующую рекуррентную формулу:

$$C_n^{(2)}=\frac{12}{(n+3)(n-2)}\left\{\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n^2+4n+3}{(4k^2-1)(2k+3)}C_{n-2k}^{(2)}+\frac{\Delta n}{2n!}\right\},\ n\geq 3, \tag{3.11}$$

где $C_0^{(2)}=-1,\ C_1^{(2)}=0,\ C_2^{(2)}=1\ \beta=0, D=-4$.

Возвращаясь от функции Φ к функции G, получаем следующие выражения для компонент скорости:

$$U_\varepsilon(\varepsilon,\eta)=\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\mathrm{ch}\varepsilon\cos\eta[A_3+A_1G_1+A_2G_2], \tag{3.12}$$

$$U_\eta(\varepsilon,\eta)=-\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\mathrm{sh}\varepsilon\sin\eta[A_3+A_1G_3+A_2G_4], \qquad 3.13)$$

где

$$G_1(\lambda)=-\frac{1}{\lambda^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(1)}}{(n+3)\lambda^n}, G_3(\lambda)=G_1(\lambda)+\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}G_1^{I}(\lambda), \tag{3.14а}$$

$$G_2(\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(2)}}{(n+1)\lambda^n}, G_4(\lambda)=G_2(\lambda)+\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}G_2^{I}(\lambda), \tag{3.14б}$$

$G_1^I(\lambda)$ и $G_2^I(\lambda)$ первая производная по λ от соответствующих функций.

В нашем случае имеем:

$$G_1^{I}(\lambda)=\frac{1}{\lambda^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(1)}}{\lambda^n}, \qquad G_1^{II}(\lambda)=-\frac{1}{\lambda^5}\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)\frac{C_n^{(1)}}{\lambda^n}, \tag{3.14в}$$

$$G_2^{I}(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(2)}}{\lambda^n}, \qquad G_2^{II}(\lambda)=-\frac{1}{\lambda^3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\frac{C_n^{(2)}}{\lambda^n}. \tag{3.14г}$$

На поверхности сфероида имеем:

$$U_\varepsilon(\varepsilon_0,\eta)=\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\operatorname{ch}\varepsilon_0\cos\eta\left[c^2+A_1G_1(\lambda_0)+A_2G_2(\lambda_0)\right], \tag{3.15}$$

$$U_\eta(\varepsilon_0,\eta)=-\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\operatorname{sh}\varepsilon_0\sin\eta\left[c^2+A_1G_3(\lambda_0)+A_2G_4(\lambda_0)\right]. \tag{3.16}$$

Постоянную интегрирования A_2 находим, используя граничные условия на поверхности сфероида:

$$A_2=\frac{c^2G_1^I(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)G_2^I(\lambda_0)-G_2(\lambda_0)G_1^I(\lambda_0)},$$

и выражение для силы принимает вид:

$$F_z=6\pi R\mu_e U_\infty K_2,$$

где

$$K_2=-\frac{2}{3}\frac{G_1^I(\lambda_0)}{\left[G_1(\lambda_0)G_2^I(\lambda_0)-G_2(\lambda_0)G_1^I(\lambda_0)\right]\sqrt{1+\lambda_0^2}}. \tag{3.17}$$

Численные расчеты показывают полное совпадение значений K_2 и K_1 при $\lambda_0>1$.

__Случай B:__ $\lambda_0<1$.

Нас интересуют действительные решения действительного аргумента λ_0 уравнения (3.5). Для действительных значений $\lambda_0>0$ имеет место тождество $\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda_0}=\operatorname{arcctg}\lambda_0$.

Используя это тождество и разложение:

$$\operatorname{arcctg}\lambda_0=\frac{\pi}{2}-\lambda_0+\frac{\lambda_0^3}{3}-\frac{\lambda_0^5}{5}-+..=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_0^{2n+1}}{(2n+1)}, \qquad \lambda_0^2<1,$$

уравнение (3.5) запишем в виде:

$$\left[\frac{\pi}{2}\lambda_0(1+\lambda_0^2)^2-2\lambda_0^2-\frac{8}{3}\lambda_0^4-8\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_0^{2n+6}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right]\frac{d^2\Phi}{d\lambda_0^2}-$$
$$-\left[\frac{\pi}{2}(1+\lambda_0^2)(1-7\lambda_0^2)+\frac{40}{3}\lambda_0^3+8\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+9)\lambda_0^{2n+5}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right]\frac{d\Phi}{d\lambda_0}- \tag{3.18}$$
$$-8\left[\lambda_0^2-\frac{\pi}{2}\lambda_0^3-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_0^{2n+4}}{(2n+1}\right]\Phi=D\sum_{n=0}^{\infty}f_n\lambda_0^{n+2},$$

где $f_{n+2}=-\frac{n+4}{n+2}f_n$, $f_0=1$, $f_1=0$.

Решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению, (3.18) ищем в виде обобщенного степенного ряда:

$$\Phi(\lambda_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n\lambda_0^{n+\rho}\quad(\Theta_0\neq0). \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в однородное уравнение и воспользовавшись правилами перемножения рядов, получаем:

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-2)\{\Theta_n+2\Theta_{n-2}+\Theta_{n-4}\}\lambda_0^{n+\rho-1}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{(n+\rho-2)[2(n+\rho-1)\Theta_{n-1}+\frac{8}{3}(n+\rho)\Theta_{n-3}]+ \tag{3.20}$$

$$+8\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-5}{2}\right]}(-1)^k\frac{(n+\rho-2k-5)(n+\rho+2k+3)-(2k+3)(2k+5)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}\Theta_{n-2k-5}\Bigg\}\lambda_0^{n+\rho-1}=0.$$

Определяющее уравнение $\frac{\pi}{2}\rho(\rho-2)=0$ имеет корни: $\rho_1=2,\ \rho_2=0$.

Большему корню соответствует решение:

$$\Phi_1(\lambda_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n^{(1)}\lambda_0^{n+2}\qquad(\Theta_0^{(1)}\neq 0), \tag{3.21}$$

коэффициенты которого вычисляются по рекуррентной формуле:

$$\Theta_n^{(1)}=-2\Theta_{n-2}^{(1)}-\Theta_{n-4}^{(1)}+\frac{4}{\pi n(n+2)}\Bigg\{n[(n+1)\Theta_{n-1}^{(1)}+\frac{4}{3}(n+2)\Theta_{n-3}^{(1)}]+$$

$$+4\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-5}{2}\right]}(-1)^k\frac{n^2+3n-24k-33}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}\Theta_{n-2k-5}^{(1)}\Bigg\}, \tag{3.22}$$

где $\Theta_0^{(1)}=1$.

Частное решение неоднородного уравнения (3.18) ищем в виде:

$$\Phi_2(\lambda_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n^{(2)}\lambda_0^{n+3}\qquad(\Theta_0^{(2)}\neq 0). \tag{3.23}$$

Подставляя (3.23) в (3.18) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ_0, получаем следующую рекуррентную формулу для $\Theta_n^{(2)}$:

$$\Theta_n^{(2)}=-2\Theta_{n-2}^{(2)}-\Theta_{n-4}^{(2)}+\frac{4}{\pi(n+3)(n+1)}\Bigg\{(n+1)[(n+2)\Theta_{n-1}^{(2)}+\frac{4}{3}(n+3)\Theta_{n-3}^{(2)}]+$$

$$+4\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-5}{2}\right]}(-1)^k\frac{(n-2k-2)(n+2k+6)-(2k+3)(2k+5)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}\Theta_{n-2k-5}^{(2)}-4f_n\Bigg\}. \tag{3.24}$$

Поскольку D=-4, то из (3.24) получаем следующее выражение $\Theta_0^{(2)}=-8/(3\pi)$.

В результате имеем следующие выражения для компонент скорости на поверхности сфероида:

$$U_\varepsilon(\varepsilon_0,\eta)=\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\mathrm{ch}\varepsilon_0\cos\eta\left[c^2+A_1G_1^*(\lambda_0)+A_2G_2^*(\lambda_0)\right], \tag{3.25}$$

$$U_\eta(\varepsilon_0,\eta) = -\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\,\mathrm{sh}\varepsilon_0 \sin\eta\left[c^2 + A_1 G_3^*(\lambda_0) + A_2 G_4^*(\lambda_0)\right], \tag{3.26}$$

где

$$G_1^*(\lambda_0) = \lambda_0^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Theta_n^{(1)}}{n+3}\lambda_0^n, G_3^*(\lambda_0) = G_1^*(\lambda_0) + \frac{1+\lambda_0^2}{2\lambda_0} G_1^{*I}(\lambda_0), \tag{3.27}$$

$$G_2^*(\lambda_0) = \lambda_0^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Theta_n^{(2)}}{n+4}\lambda_0^n, G_4^*(\lambda_0) = G_2^*(\lambda_0) + \frac{1+\lambda_0^2}{2\lambda_0} G_2^{*I}(\lambda_0), \tag{3.28}$$

$G_1^{*I}(\lambda_0)$ и $G_2^{*I}(\lambda_0)$ первая производная по λ_0 от соответствующих функций.

В нашем случае имеем:

$$G_1^{*I}(\lambda_0) = \lambda_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(1)} \lambda_0^n,\ G_2^{*I}(\lambda_0) = \lambda_0^3 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(2)} \lambda_0^n, \tag{3.29}$$

Используя формулы (3.21)-(3.29) и граничные условия на поверхности сфероида, находим постоянную интегрирования A_2:

$$A_2 = \frac{c^2 G_1^{*I}(\lambda_0)}{G_1^*(\lambda_0) G_2^{*I}(\lambda_0) - G_2^*(\lambda_0) G_1^{*I}(\lambda_0)}$$

и выражение для силы принимает вид:

$$F_z = 6\pi R \mu_e U_\infty K_3,$$

где

$$K_3 = -\frac{2}{3}\frac{G_1^{*I}(\lambda_0)}{\left[G_1^*(\lambda_0) G_2^{*I}(\lambda_0) - G_2^*(\lambda_0) G_1^{*I}(\lambda_0)\right]\sqrt{1+\lambda_0^2}}.$$

Численные расчеты показывают полное совпадение значений K_3 и K_1 при $\lambda_0 < 1$.

Совпадение величин K_1, K_2, и K_3 – поправок к закону Стокса показывает, что приближенное решение уравнений Навье-Стокса, в случае медленного движение сфероида в вязкой жидкости при малых перепадах температуры, найденное с помощью обобщенных степенных рядов, практически не отличается от точного решения, найденного с использованием функции тока. Следовательно, этот метод может быть применен и для случая больших перепадов температуры, когда использование функции тока становится затруднительным.

Список литературы

1. Бретшнайдер, Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. – М.; Л.: Химия, 1966. – 535 с.

2. Хаппель, Дж., Бреннер, Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.

3. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат, 1954. – 795 с.

4. Смирнов, В.И. Курс высшей математики. Ч. 2. – М.: Наука, – 1974. – Т. III. – 672 с.

5. Коддингтон, Э.А., Левинсон, Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.:ИИЛ, 1958. – 474 с.

ON A SPHEROID PARTICLE MOVEMENT IN A VISCOUS LIQUID AT LOW RELATIVE TEMPERATURE OVERFALLS

M.A. Amatov, N.V. Malay, A.N. Makarenko

Belgorod state university,
308033, 85 Pobedy str. Belgorod

An analytical method of approximate solution of Navie - Stokes equations is suggested. By means of the method a solution of the problem of a heated spheroid particle flown around by a viscous incompressible liquid at low temperature overfalls is performed. The method used allows to explore a more common case - spheroid particle flown around at great temperature over-falls.