НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ. 2004. № 3. Вып. 9.

УДК 511

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ АДДИТИВНОЙ ПРОБЛЕМЫ ДЕЛИТЕЛЕЙ

С.А. Гриценко*

Пусть $a(n)$ – коэффициенты Дирихле L-функции Гекке, соответствующей неглавному характеру Гекке мнимого квадратичного поля. Круговым методом в форме, предложенной С.М. Ворониным, в работе получена оценка

$$\sum_{m+n=N} a(m)a(n) = O\left(N^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right)$$

ВВЕДЕНИЕ.

В 1927 году в работе [1] А.Е. Ингам элементарными методами получил асимптотическую формулу для числа $T(N)$ решений уравнения

$$n_1n_2 + n_3n_4 = N$$

в целых числах n_1, n_2, n_3, n_4.

Справедлива формула

$$T(N) = \sum_{m+n=N} \tau(m)\tau(n),$$

где $\tau(n)$ – число делителей числа n.

В 1930 году Т. Эстерман [2], применив к задаче Ингама круговой метод, вывел для $T(N)$ асимптотическую формулу, остаточный член которой имеет степенное понижение по сравнению с главным.

В 1982 году Д.И. Исмоилов [3], дополнив круговой метод оценками А. Вейля сумм Клостермана, получил формулу вида

$$T(N) = F(N) + R(N)$$

где $F(N)$ – главный член проблемы, имеющий порядок $N\log^2 N$, а $R(N)$ – остаточный член, $R(N) = O\left(N^{\frac{3}{4}}\sigma^2_{-\frac{1}{2}}(N)\log^6 N\right), \sigma_{-\frac{1}{2}}(N) = \sum_{l\backslash N} l^{-\frac{1}{2}}$.

Пусть ψ – неглавный характер Гекке мнимого квадратичного поля, $L(s,\psi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$ – соответствующая L-функция Гекке $(\Re s > 1)$.

Так как $L(s,\psi)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость до целой функции, то последовательность $a(n)$ является «осциллирующей». Поэтому есть основания полагать, что в сумме $A(N) = \sum_{m+n=N} a(m)a(n)$ слагаемые «проосциллируют», и модуль $A(N)$ будет невелик по сравнению с N.

---

* gritsenko@bsu.edu.ru

Целью статьи является оценка суммы $A(N)$, в некотором смысле аналогичной сумме $T(N)$. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Основная теорема. *Пусть* ε *– сколь угодно малое положительное число. Тогда справедлива оценка*

$$A(N)=\sum_{m+n=N} a(m)a(n)=O\left(N^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right),$$

где постоянная в знаке O *зависит лишь от* ε *и от мнимого квадратичного поля, для которого определяются числа* $a(n)$

Доказательство теоремы проводится круговым методом в форме, предложенной С.М.Ворониным в работе [4].

В работе будут использованы следующие обозначения:

d – отрицательное бесквадратное число;

$F=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ – мнимое квадратичное поле;

δ_F – дискриминант поля $F; D=-\delta_F$;

χ – характер квадратичного поля F, определенный следующим образом

$$\chi(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{n}{|d|}\right) & , \ \mathrm{d}\equiv 1(\mathrm{mod}4),\\ (-1)^{\frac{(n-1)}{2}}\left(\dfrac{n}{|d|}\right) & , \ \mathrm{d}\equiv 3(\mathrm{mod}4),\\ (-1)^{\frac{n^2-1}{8}+\frac{n-1}{2}\frac{d'-1}{2}}\left(\dfrac{n}{|d'|}\right) & , \ \mathrm{d}\equiv 2(\mathrm{mod}4), d=2d';\end{cases}$$

$S(q,a,b)=\sum_{m=1}^{q}\exp\left(2\pi i\dfrac{am^2+bm}{q}\right)$ – сумма Гаусса;

$S^*(q,a,b)=\sum_{\substack{m=1\\(m,q)=1}}^{q}\exp\left(2\pi i\dfrac{am+bm^*}{q}\right)$ – сумма Клостермана, где $m^*m\equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$;

$S_{2\rho}$ – множество корней уравнения $z^{2\rho}+1=0$;

$f(x)=\left(1+x^{2\rho}\right)^{-1}, \rho\in\mathbb{N}$;

$\Delta_q(x)=f\left(\dfrac{q}{2\lambda}\right)f\left(\dfrac{x}{q\lambda}\right)-f\left(\dfrac{q}{\lambda}\right)f\left(\dfrac{x}{2q\lambda}\right)$, где $\lambda\in[2,\infty)$;

$M_0=\sum_{q=1}^{\infty}\Delta_q(0,\lambda)$;

$\Phi_q(s,m)=\int\limits_0^{\infty}x^{s-1}\Delta_q(x-m)\,dx, 0<\Re s<2\rho$;

$\int_{(c)}F(s)\,ds=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\,ds$;

$\chi(m;q,a)=\begin{cases}1, & \textit{если } \mathrm{m}\equiv \mathrm{a}(\mathrm{mod q}),\\ 0, & \textit{в противном случае};\end{cases}$

$$\tilde{a}(s,r,u)=\sum_{m=1}^{\infty}a(m)\exp\left(\frac{2\pi ium}{r}\right)m^{-s}, \Re s>1;$$

$\delta(m)=\begin{cases}1, & \mathrm{m}=0,\\ 0, & \mathrm{m}\in\mathbb{Z},\mathrm{m}\neq 0.\end{cases}$

Нам потребуется вывести функциональное уравнение для $\tilde{a}(s,r,u)$. Для этого, в свою очередь, понадобится значение двойной суммы Гаусса.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОЙ СУММЫ ГАУССА

Требуется вычислить сумму

$$G(r,u,\bar{n}) = \sum_{\bar{g} \bmod r} \exp\left(\frac{2\pi i}{r}\left(uQ(\bar{g}) + \bar{n}^t \bar{g}\right)\right),$$

где $Q(\bar{g})$ – бинарная положительно определенная примитивная квадратичная форма,

$$Q(\bar{g}) = \frac{1}{2}\bar{g}^t A \bar{g}, A = \begin{pmatrix} 2a & b \\ \mathrm{b} & 2\mathrm{c} \end{pmatrix}, \det A = 4ac - b^2 = D = -\delta_F, \bar{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2,$$

r и u – натуральные взаимно простые числа.

Вычисление суммы Гаусса в общем виде было выполнено А.В. Малышевым (см.[6]). Однако квадратичная форма Q в нашем случае имеет ряд специфических черт, и нам удобнее вычислить для нее сумму Гаусса непосредственно. Для наших целей особый интерес представляет характер зависимости $G(r,u,\bar{n})$ от параметра u и от формы Q.

Пусть $r = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}, p_j$ – простые числа, $r_j = r / p_j^{\alpha_j}, (j = 1 \dots s)$.

Тогда справедливо равенство

$$G(r,u,\bar{n}) = \prod_{j=1}^{s} G\left(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \bar{n}\right) \tag{1}$$

Теперь достаточно вычислить суммы $G\left(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \bar{n}\right)$ при всех $j = 1 \dots s$.

Вычисление этих сумм составляет содержание лемм 1-7, а результат сформулирован в виде следствия в конце этого пункта.

Определим квадратичную форму $Q_1(\bar{n})$:

$$Q_1(\bar{n}) = \frac{1}{2}\bar{n}^t D A^{-1} \bar{n} = cn_1^2 - bn_1 n_2 + an_2^2.$$

Лемма1. *Пусть* $p_j | r$, $p_j \nmid D$, $u^* u \equiv 1 (\bmod r)$, $r_j^* r_j \equiv 1\left(\bmod p_j^{\alpha_j}\right)$, $D_j^* D \equiv 1\left(\bmod p_j^{\alpha_j}\right)$.

Тогда справедливо равенство

$$G\left(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \bar{n}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi i}{p_j^{\alpha_j}} u^* r_j^* D_j^* Q_1(\bar{n})\right) G\left(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \bar{0}\right),$$

причем

$$G\left(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \bar{0}\right) = \begin{cases} 2^{\alpha_j}(-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha_j}{4}}, & p_j = 2, \\ p_j^{\alpha_j}\left(\dfrac{\delta_F}{p_j^{\alpha_j}}\right), & p_j > 2, \end{cases}$$

где $\left(\dfrac{\delta_F}{p_j^{\alpha_j}}\right)$ *– символ Якоби от числа* δ_F *по модулю* $p_j^{\alpha_j}$

Доказательство Рассмотрим сумму

$$G\left(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \bar{0}\right) = \sum_{\bar{g} \bmod p_j^{\alpha_j}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p_j^{\alpha_j}} ur_j Q(\bar{g})\right).$$

Пусть $v_j^* = u^* r_j^* D_j^*$. Заметим, что $v_j^* DA^{-1}\overline{n} \in \mathbb{Z}^2$, так как DA^{-1} – целочисленная матрица. Поэтому

$$G\left(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \overline{0}\right) = \sum_{\overline{g} \bmod p_j^{\alpha_j}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p_j^{\alpha j}} ur_j Q\left(\overline{g} + v_j^* DA^{-1}\overline{n}\right)\right).$$

Теперь из равенства

$$Q\left(\overline{g} + v_j^* DA^{-1}\overline{n}\right) = Q(\overline{g}) + v_j^* D\overline{n}^t \overline{g} + v_j^{*2} DQ_1(\overline{n})$$

следует, что

$$G\left(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \overline{n}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi i}{p_j^{\alpha j}} u^* r_j^* D_j^* Q_1(\overline{n})\right) G\left(p_j^{\alpha_j}, ur_j, \overline{0}\right).$$

Вычислим сумму $G\left(p^\alpha, B, \overline{0}\right)$, где $(B,p)=1,\ p \nmid D,\ \alpha \geq 2$

Определим натуральное число v равенством

$$2v = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \text{ – четное число,} \\ \alpha + 1, & \text{если } \alpha \text{ – нечетное число} \end{cases}$$

Из определения следует, что $2v \geq \alpha,\ v < \alpha$

Справедливо равенство

$$G\left(p^\alpha, B, \overline{0}\right) = \sum_{\overline{g}_1 \bmod p^v} \sum_{\overline{g}_2 \bmod p^{\alpha - v}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} BQ\left(\overline{g}_1 + p^v \overline{g}_2\right)\right).$$

Пользуясь сравнением

$$Q\left(\overline{g}_1 + p^v \overline{g}_2\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{g}_1^t + p^v \overline{g}_2^t\right) A\left(\overline{g}_1 + p^v \overline{g}_2\right) \equiv Q\left(\overline{g}_1\right) + p^v \overline{g}_1^t A \overline{g}_2 \pmod{p^\alpha},$$

получаем

$$G\left(p^\alpha, B, \overline{0}\right) = \sum_{\overline{g}_1 \bmod p^v} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} BQ\left(\overline{g}_1\right)\right) \sum_{\overline{g}_2 \bmod p^{\alpha - v}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^{\alpha - v}} B\overline{g}_1^t A \overline{g}_2\right)$$

Внутренняя сумма равна нулю, если не выполнено сравнение $A\overline{g}_1 \equiv \overline{0} \pmod{p^{\alpha - v}}$. Но так как $(\det A, p) = 1$, сравнения $A\overline{g}_1 \equiv \overline{0} \pmod{p^{\alpha - v}}$ и $\overline{g}_1 \equiv \overline{0} \pmod{p^{\alpha - v}}$ эквивалентны, поэтому

$$G\left(p^\alpha, B, \overline{0}\right) = p^{2\alpha - 2v} \sum_{\overline{g} \bmod p^{2v - \alpha}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^{2v - \alpha}} BQ(\overline{g})\right).$$

$$G\left(p^\alpha, B, \overline{0}\right) = \begin{cases} p^\alpha, & \text{если } \alpha \text{ – четное число,} \\ p^{\alpha - 1} G\left(p, B, \overline{0}\right), & \text{если } \alpha \text{ – нечетное число} \end{cases}$$

Простые вычисления показывают, что $G\left(2, B, \overline{0}\right) = 2(-1)^{ac}$, откуда следует равенство $G\left(2^\alpha, B, \overline{0}\right) = 2^\alpha (-1)^{ac\alpha}$.

По условию имеем $4ac - b^2 = -\delta_F$, $2 \nmid \left(-\delta_F\right)$; следовательно, b – нечетное число, а значит $b^2 \equiv 1 \pmod 8$, поэтому $ac \equiv \dfrac{1 - \delta_F}{4} \pmod 2$, $(-1)^{ac} = (-1)^{\frac{1 - \delta_F}{4}}$.

Вычислим теперь сумму

$$G\left(p, B, \overline{0}\right) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{p} \exp\left(\frac{2\pi i B}{p}\left(am^2 + bmn + cn^2\right)\right),$$

считая, что $p > 2, p \nmid D$.

Если $p|a$, $p|c$, то $p\dagger b$ (иначе форма Q была бы непримитивна). Тогда $G(p,B,\overline{0})=p$.

Пусть теперь $p\dagger a$, $a^*a\equiv 1 \pmod p$, $2^*2\equiv 1 \pmod p$. Тогда

$$am^2+bnm+cn^2\equiv a\left(m+2^*a^*bn\right)^2+\left(2^*\right)^2a^*Dn^2 \pmod p,$$

$$G\left(p,B,\overline{0}\right)=S(p,aB,0)S\left(p,\left(2^*\right)^2a^*Dn^2,0\right)=\left(\frac{Ba}{p}\right)\left(\frac{B\left(2^*\right)^2a^*D}{p}\right)S^2(p,1,0)=\left(\frac{D}{p}\right)S^2(p,1,0)$$

Пользуясь известным равенством $S^2(p,1,0)=\left(\frac{-1}{p}\right)p$, получаем, что $G\left(p,B,\overline{0}\right)=\left(\frac{\delta_F}{p}\right)p$ (при $p\dagger a$).

Это же равенство справедливо и при $p\dagger c$.

Если же $p|a$, $p|c$, $p\dagger b$, то $\left(\frac{\delta_F}{p}\right)=\left(\frac{b^2-4ac}{p}\right)=1$ и равенство $G\left(p,B,\overline{0}\right)=p$ и в этом случае можно записать в виде $G\left(p,B,\overline{0}\right)=\left(\frac{\delta_F}{p}\right)p$.

Таким образом, равенство для сумм $G\left(p_j^{\alpha_j},ur_j,\overline{0}\right)$, данные в формулировке леммы, доказаны.

Замечание 1. *Пусть $D=4ac-b^2$ – натуральное число, не делящееся на квадрат нечетного числа, $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^2$, $Q(\overline{n})=an_1^2+bn_1n_2+cn_2^2$ – примитивная квадратичная форма.*

Тогда существует вектор $\overline{n}\in\mathbb{Z}^2$ такой, что $(Q(\overline{n}),D)=1$.

Доказательство. 1. Пусть сначала D – четное число. Тогда $2|b$ и по крайней мере одно из чисел a и c нечетно (ввиду примитивности формы Q). Без ограничения общности считаем, что $2\dagger a$. Пусть $b_1=b/2$, $\delta=(a,b_1)$, $a_1=a/\delta$, $b_2=b_1/2$. Справедливо тождество

$$a_1Q(\overline{n})=\frac{D}{4\delta}n_2^2+\delta\left(a_1n_1+b_2n_2\right)^2$$

Проверим, что $(a_1,D)=1$. Пусть, от противного, $p>2$ – простое число, $p|(a_1,D)$.

Тогда $p|b_1$, а значит $p|(b_1,a)=\delta$. Теперь из равенства $D/4=a_1\delta c-b_1^2$ вытекает сравнение $D\equiv 0\left(\bmod p^2\right)$, которое противоречит условию.

Выберем целые числа n_1 и n_2 так, чтобы $(n_2,\delta)=1$, n_2 – четное число, $a_1n_1+b_2n_2\equiv 1 \pmod D$. Это возможно вследствие условия $(a_1,D)=1$.

Проверим, что тогда $(Q(\overline{n}),D)=1$.

Справедливо сравнение

$$a_1Q(\overline{n})=\frac{D}{4\delta}n_2^2+\delta\left(a_1n_1+b_2n_2\right)^2\equiv 1 \pmod 2$$

из которого следует, что $2\dagger Q(\overline{n})$.

Далее, если $p>2$ – простое число, $p|(Q(\overline{n}),D)$, то либо $p|\delta$, либо $p|\frac{D}{4\delta}$.

Если $p|\delta$, то $p|\frac{D}{4\delta}n_2^2$; но $(n_2^2,D)=1$, значит $p|\frac{D}{4\delta}$, то есть $p|\left(\delta,\frac{D}{4\delta}\right)=1$ – противоречие.

Если $p|\frac{D}{4\delta}$, то $p|\delta(a_1n_1+b_2n_2)^2$; но $(a_1n_1+b_2n_2,D)=1$, значит $p|\delta$, то есть $p|\left(\delta,\frac{D}{4\delta}\right)=1$ – противоречие.

1. Пусть D – нечетное число, $\delta=(a,b)$, $a_1=a/\delta$, $b_1=b/\delta$. Справедливо тождество

$$4a_1Q(\bar{n})=\frac{D}{\delta}+\delta(2a_1n_1+b_1n_2)^2.$$

Соотношение $(2a_1,D)=1$ проверяется так же, как в п.1.

Целые числа n_1 и n_2 выбираем так, чтобы $(n_2,D)=1$, $(2a_1n_1+b_1n_2,D)=1$.

Наконец, тем же рассуждением, что в п.1, проверяем взаимную простоту чисел $Q(\bar{n})$ и D.

Следствие 1. *Квадратичная форма $Q(\bar{n})$ эквивалентна некоторой квадратичной форме, первый коэффициент которой взаимно прост с D.*

Доказательство. См. в [5, глава 6].

Далее без ограничения общности полагаем, что $(a,D)=1$.

Лемма 2. 1. *Если $(q,m)=l$, то $S(q,m,n)=l\chi(n;l,0)S(q/l,m/l,n/l)$.*

2. Если $(q,2m)=1$, то $S(q,m,n)=\exp\left(-\frac{2\pi i}{q}(4m)^*n^2\right)S(q,1,0)$, где $(4m)^*4m\equiv(\mathrm{mod}\,q)$.

3. Если $(q,2)=1$, то

$$S(q,1,0)=\begin{cases}\sqrt{q}, & q\equiv 1(\mathrm{mod}\,4),\\ i\sqrt{q}, & q\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}$$

4. Если $(a,q)=1$, т

$$S(2^l,a,0)=\begin{cases}0, & \text{если } l=1,\\ 2^{l/2}(1+i^a), & \text{если } l \text{ – четное число},\\ 2^{(l+1)/2}\exp\left(\frac{2\pi i a}{8}\right), & \text{если } l>1 \text{ – нечетное число}.\end{cases}$$

Доказательство, см.[6].

Лемма 3. *Пусть $p_j|r$, $p_j>2$, $p_j|\,(-\delta_F)$, $p_j\nmid a$, $u^*u\equiv 1(\mathrm{mod}\,p_j^{\alpha_j})$, $a_j\equiv 1(\mathrm{mod}\,p_j^{\alpha_j})$, $r_j^*r_j\equiv 1(\mathrm{mod}\,p_j^{\alpha_j})$, $(D/p_j)_j^*(d/p_j)\equiv 1(\mathrm{mod}\,p_j^{\alpha_j})$.*

Тогда справедливо равенство

$$G(p_j^{\alpha_j},ur_j,\bar{n})=\varepsilon(p_j)p_j^{\alpha_j}\sqrt{p_j}\chi(Q_1(\bar{n});p_j,0)\left(\frac{aur_j}{p_j}\right)\left(\frac{D/p_j}{p_j^{\alpha_j-1}}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{2\pi i}{p_j^{\alpha_j}}u^*r_j^*(D/p_j)_j^*\frac{Q_1(\bar{n})}{p_j}\right),$$

где

$$\varepsilon(p_j)=\begin{cases}1, & p_j\equiv 1(\mathrm{mod}\,4),\\ i, & p_j\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $2_j^*2\equiv 1(\mathrm{mod}\,p_j^{\alpha_j})$. Справедливо сравнение

$$ur_j(am^2+bmn+cn^2)+n_1m+n_2n=aur_j(m+b2_j^*a_j^*n)^2+aur_jD(2_j^*a_j^*n)^2+$$
$$+n_1(m+b2_j^*a_j^*n)+(2an_2-bn_1)2_j^*a_j^*n,$$

из которого следует равенство

$$G\left(p_j^{\alpha_j},ur_j,\overline{n}\right)=S\left(p_j^{\alpha_j},aur_j,n_1\right)S\left(p_j^{\alpha_j},aur_jD,2an_2-bn_1\right).$$

Заметим, что $(p_j,aur_jD)=p_j$, так как D не делится на квадрат нечетного простого числа, $p_j \mid D, p_j \nmid aur_j$.

Теперь из леммы 2 получаем равенство

$$G\left(p_j^{\alpha_j},ur_j,\overline{n}\right)=p_j\chi\left(2an_2-bn_1;p_j,0\right)\left(\frac{aur_j}{p_j}\right)\left(\frac{D/p_j}{p_j^{\alpha_j-1}}\right)S\left(p_j^{\alpha_j},1,0\right)S\left(p_j^{\alpha_j-1};1,0\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{2\pi i}{p_j^{\alpha_j}}u^*r_j^*\left(D/p_j\right)_j^*\frac{Q_1(\overline{n})}{p_j}\right).$$

Покажем, что $\chi\left(2an_2-bn_1;p_j,0\right)=\chi\left(Q_1(\overline{n}),p_j,0\right)$.

В самом деле, справедливо равенство $4aQ_1(\overline{n})=Dn_1^2+\left(2an_2-bn_1\right)^2$.

Из него (с учетом соотношений $p_j \mid D, p_j \nmid (4a)$) следует, что условия $p_j \mid \left(2an_2-bn_1\right)$ и $p_j \mid Q_1(\overline{n})$ эквивалентны.

Теперь утверждение леммы 2 прямо следует из известного равенства

$$S(q,1,0)=\begin{cases}\sqrt{q}, & q\equiv 1(\operatorname{mod}4),\\ i\sqrt{q}, & q\equiv 3(\operatorname{mod}4).\end{cases}$$

Лемма 4. *Пусть* $2\mid(-\delta_F),(B,2)=1$ *Тогда*

$$G\left(2,B,\overline{0}\right)=0,\qquad G\left(2,B,\overline{n}\right)=G\left(2,1,\overline{n}\right).$$

Доказательство. По условию $2\mid(-\delta_F)=4ac-b^2$, значит, $2\mid b$, поэтому

$$G\left(2,B,\overline{0}\right)=\left(\sum_{m=1}^{2}\exp\left(\frac{2\pi iaBm}{2}\right)\right)\left(\sum_{n=1}^{2}\exp\left(\frac{2\pi icBn}{2}\right)\right)$$

В правой части по крайней мере один из сомножителей равен нулю, так как по крайней мере одно из чисел a и c нечетно (форма Q примитивна).

Второе утверждение прямо следует из сравнения $B\equiv 1(\operatorname{mod}2)$.

Лемма 5. *Пусть* A *и* B *– целые числа,* $\alpha\geq 2$.

Если B *– нечетное число, то* $S(2^\alpha,A,B)=0$.

Если B *– четное число,* $(A,2)=1$, *то* $S(2^\alpha,A,B)=\exp\left(\frac{2\pi i}{2^\alpha}A^*\frac{B^2}{4}\right)S(2^\alpha,A,0)$, *где* A^* *находится из сравнения* $A^*A\equiv 1(\operatorname{mod}2^\alpha)$.

Доказательство. Пусть B – нечетное число. Тогда

$$S(2^\alpha,A,B)=\sum_{m=1}^{2^\alpha}\exp\left(\frac{2\pi i}{2^\alpha}\left(Am^2+Bm\right)\right)=\sum_{n=0}^{1}\sum_{m=1}^{2^{\alpha-1}}\exp\left(\frac{2\pi i}{2^\alpha}\left(A\left(m+2^{\alpha-1}n\right)^2+B\left(m+2^{\alpha-1}n\right)\right)\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{2^{\alpha-1}}\exp\left(\frac{2\pi i}{2^\alpha}\left(Am^2+Bm\right)\right)\sum_{n=0}^{1}\exp\left(\frac{2\pi iBn}{2}\right)=0.$$

Второе утверждение прямо следует из сравнения

$$Am^2+Bm\equiv A\left(m+BA^*/2\right)^2-A^*B^2/4(\operatorname{mod}2^\alpha).$$

Лемма 6. *Пусть* $2^\alpha \| r$, $\alpha\geq 2$, $2\mid d=-\delta_F$, $2\nmid D/4$, $r_2=r/2^\alpha$, $2\nmid a$, $r_2^*r_2\equiv 1(mod2^\alpha)$, $u^*u\equiv 1(\operatorname{mod}r)$, $\left(\frac{D}{4}\right)^*\frac{D}{4}\equiv 1(\operatorname{mod}2^\alpha)$, $a_2^*a\equiv 1(\operatorname{mod}2^\alpha)$.

Тогда справедливо равенство

$$G(2^\alpha,ur_2,\overline{n})=2^\alpha\chi(Q_1(\overline{n});4,0)\left(\frac{S(2^\alpha,aur_2,0)}{2^{\alpha/2}}\right)\left(\frac{S(2^\alpha,aur_2D/4,0)}{2^{\alpha/2}}\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{2^\alpha}u^*r_2^*\left(\frac{D}{4}\right)^*\frac{Q_1(\overline{n})}{4}\right).$$

Доказательство. Справедливо сравнение

$$ur_2\left(am^2+bmn+cn^2\right)+n_1m+n_2n=aur_2\left(m+\frac{b}{2}a_2^*n\right)^2+n_1\left(m+\frac{b}{2}a_2^*n^2\right)+$$
$$+aur_2\frac{D}{4}\left(a_2^*n\right)^2+\frac{2an_2-bn_1}{2}a_2^*n,$$

из которого следует равенство

$$G\left(2^\alpha,ur_2,\overline{n}\right)=S\left(2^\alpha,aur_2,n_1\right)S\left(2^\alpha,aur_2\frac{D}{4},\frac{2an_2-bn_1}{1}\right)$$

В силу леммы 5 это равенство можно записать так:

$$G\left(2^\alpha,ur_2,\overline{n}\right)=\chi\left(n_1;2,0\right)\chi\left(2an_2-bn_1;4,0\right)=$$
$$=S\left(2^\alpha,aur_2,n_1\right)S\left(2^\alpha,aur_2D/4,\frac{2an_2-bn_1}{2}\right). \qquad (2)$$

Выделив полные квадраты, получим:

$$G\left(2^\alpha,ur_2,\overline{n}\right)=\chi\left(n_1;2,0\right)\chi\left(2an_2-bn_1;4,0\right)\times$$
$$\times S\left(2^\alpha,aur_2,0\right)S\left(2^\alpha,aur_2D/4,0\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{2^\alpha}u^*r_2^*\left(\frac{D}{4}\right)^*\frac{Q_1\left(\overline{n}\right)}{4}\right).$$

Проверим, что $\chi\left(n_1;2,0\right)\chi\left(2an_2-bn_1;4,0\right)=\chi\left(Q_1\left(\overline{n}\right);4,0\right)$.

Справедливо равенство

$$aQ_1\left(\overline{n}\right)=\frac{D}{4}n_1^2+\left(\frac{2an_2-bn_1}{2}\right)^2.$$

Если $2|n_1$ и $2|\dfrac{2an_2-bn_1}{2}$, то $2|Q_1\left(n_1\right)$, так как $(a,2)=1$.

Пусть $4|Q_1\left(\overline{n}\right)$. Известно, что $\dfrac{D}{4}=-\dfrac{\delta}{4}\equiv 1(\operatorname{mod}4)$. Поэтому

$$\frac{D}{4}n_1^2+\left(\frac{2an_2-bn_1}{2}\right)^2\equiv n_1^2+\left(\frac{2an_2-bn_1}{2}\right)^2(\operatorname{mod}4).$$

Отсюда, если $4|Q_1\left(\overline{n}\right)$, то $4\left|\left(n_1^2+\left(\dfrac{2an_2-bn_1}{2}\right)^2\right)\right.$, следовательно, $2|n_1$, $2|\dfrac{2an_2-bn_1}{2}$.

<u>**Лемма 7.**</u> *Пусть* $2|r,\alpha\geq 2,2\left|\left(\dfrac{-\delta_F}{4}\right)\right.,r_2=r/2^\alpha,2\dagger a,a^*a\equiv 1\left(mod2^\alpha\right),r_2^*r_2\equiv 1\left(\operatorname{mod}2^\alpha\right)$,

$\left(\dfrac{D}{8}\right)^*\left(\dfrac{D}{8}\right)\equiv 1\left(\operatorname{mod}2^\alpha\right)$.

Тогда, если $\alpha=2$, *то*

$$G\left(4,ur_2,\overline{n}\right)=8\chi\left(n_1;2,0\right)\chi\left(2an_2-bn_1;8,4\right)\left(1+i^{aur_2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{16}a^*u^*r_2^*n_1^2\right).$$

Если $\alpha\geq 3$, *то*

$$G\left(2^\alpha,ur_2,\overline{n}\right)=2^{\alpha+1}\chi\left(Q_1\left(\overline{n}\right);8,0\right)\left(\frac{S\left(2^\alpha,aur_2,0\right)S\left(2^{\alpha-1},aur_2D/8,0\right)}{2^\alpha}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{2\pi i}{2^\alpha}u^*r_2^*\left(\frac{D}{8}\right)^*\frac{Q_1\left(\overline{n}\right)}{8}\right).$$

Доказательство. Применим равенство (2), положив в нем $\alpha=2$; получим

$$G\left(4,ur_2,\overline{n}\right)=\chi\left(n_1;2,0\right)\chi\left(2an_2-bn_1;8,4\right)S\left(4,aur_2,n_1\right)S\left(4,aur_2D/4,\frac{2an_2-bn_1}{2}\right).$$

Воспользуемся леммами 2 и 5:

$$G(4,ur_2,\bar{n}) = 2\chi(n_1;2,0)\chi(2an_2-bn_1;8,4)\exp\left(-\frac{2\pi i}{2^\alpha}a^*u^*r_2^*n_1^2\right)\times$$
$$\times S(4,aur_2,0)\,S\left(2,aur_2D/8,\frac{2an_2-bn_1}{4}\right).$$

Простые вычисления дают равенство

$$S\left(2,aur_2D/8,\frac{2an_2-bn_1}{4}\right) = 2\chi(2an_2-bn_1;8,4).$$

Далее, еще раз пользуясь леммой 2, получаем

$$G(4,ur_2,\bar{n}) = 8\chi(n_1;2,0)\chi(2an_2-bn_1;8,4)(1+i^{aur_2})\exp\left(-\frac{2\pi i}{16}a^*u^*r_2^*n_1^2\right).$$

Пусть $\alpha \geq 3$. Аналогичные вычисления приводят к формуле

$$G(2^\alpha,ur_2,\bar{n}) = 2\chi(n_1;2,0)\chi(2an_2-bn_1;8,0)\exp\left(-\frac{2\pi i}{2^\alpha}u^*r_2^*\left(\frac{D}{8}\right)^*\frac{Q_1(\bar{n})}{8}\right)\times$$
$$\times S(2^\alpha,aur_2,0)\,S(2^{\alpha-1},aur_2D/8,0)$$

Проверим равенство $\chi(n_1;2,0)\chi(2an_2-bn_1;8,0) = \chi(Q_1(\bar{n};8,0);8,0)$.

Из равенства $aQ_1(\bar{n};8,0) = \frac{D}{4}n_1^2 + \left(\frac{2an_2-bn_1}{2}\right)^2$ следует, что если $2|n_1, 8|(2an_2-bn_1)$, то $8|Q_1(\bar{n};8,0)$.

Пусть $8|Q_1(\bar{n};8,0)$. Так как $2|\frac{D}{4}$, то $2|\frac{2an_2-bn_1}{2}$; тогда $2|n_1$, так как $\frac{D}{4} \equiv 2 \pmod 4$. Значит, $8|\left(\frac{2an_2-bn_1}{2}\right)^2$, или $8|(2an_2-bn_1)$.

<u>Следствие 2.</u> *Пусть* $(u,r)=1,\ u^*u \equiv 1 \pmod r$.

$$G(r,u,\bar{n}) = c_1\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)\chi(u)\sqrt{D}r\exp\left(-\frac{2\pi i}{r}c_2\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)u^*\right),$$

где χ $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$, *а* $c_1\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)$ *и* $c_2\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)$,

$$0 \leq \left|c_1\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)\right| \leq 1;$$
$$c_2\left(r,\bar{0},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right) = 0;$$
$$c_1\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right) = 0, \qquad 2\,\|\,r;$$
$$c_1\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right) = 0, \qquad 4\,\|\,r,\ d \equiv 2 \pmod 4.$$

Доказательство. Перемножим почленно формулы для $G(p_j^{\alpha_j},ur_j,\bar{n})$, полученные в леммах 1-7 (см. (1)) по всем $p_j\,\|\,r$. Получим равенство

$$G(r,u,\bar{n}) = c_1\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)\chi(a)\chi(u)\sqrt{D}r\exp\left(-\frac{2\pi i}{r}c_2\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)u^*\right),$$

где $c_1\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)$ и $c_2\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)$ – целые числа, фактически вычисленные в леммах 1-7 (мы не выписываем $c_1\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)$ и $c_2\left(r,\bar{n},\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)$ ввиду громоздкости их вида).

Так как число a представимо формой Q дискриминанта $-D$, то $\chi(a)=1$ (см. [7, с. 269]).

ВЫВОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ $\tilde{a}(s,r,u)$.

Пусть ψ – неглавный характер Гекке мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $L(s,\psi)=\sum_{\mathfrak{a}}\psi(\mathfrak{a})(N(\mathfrak{a}))^{-s}$ – L-функция Гекке (суммирование идет по целым идеалам $\mathfrak{a}$ поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $N(\mathfrak{a})$ – норма идеала $\mathfrak{a}$, $\Re_s>1$). Тогда $L(s,\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-}$, где $a(n)=\sum_{\mathfrak{a},N(\mathfrak{a})=n}\psi(\mathfrak{a})$.

Справедливо тождество

$$\tilde{a}(s,r,u)=\sum_{\mathsf{A}}\chi(\mathfrak{a})\sum_{\mathfrak{a}\in\mathsf{A}}\exp\left(\frac{2\pi i}{r}uN(\mathfrak{a})\right)N(\mathfrak{a})^{-s},$$

где A пробегает классы идеалов нашего поля, а $\mathfrak{a}$ – целые ненулевые идеалы из класса A.

Пусть $\tilde{a}(s,r,u,\mathsf{A})=\sum_{\mathfrak{a}\in\mathsf{A}}\exp\left(\frac{2\pi i}{r}uN(\mathfrak{a})\right)N(\mathfrak{a})^{-s}$, тогда имеем

$$\tilde{a}(s,r,u)=\sum_{\mathsf{A}}\psi(\mathsf{A})\tilde{a}(s,r,u,\mathsf{A}). \tag{3}$$

Пусть $\mathfrak{b}$ – произвольный идеал из класса A^{-1}. Тогда для любого $\mathfrak{a}\in\mathsf{A}$ имеем равенство $\mathfrak{ab}=(\xi_{\mathfrak{a}})$, где $\xi_{\mathfrak{a}}$ – целое алгебраическое число, а $(\xi_{\mathfrak{a}})$ – порожденный им главный идеал.

Отображение $\mathfrak{a}\to(\xi_{\mathfrak{a}})$ задает биекцию между собственными идеалами из класса A и классами эквивалентных чисел из идеала $\mathfrak{b}$ (два числа эквивалентны, если их отношение равно ±1).

Поэтому имеем

$$\tilde{a}(s,r,u,\mathsf{A})=\frac{1}{2}\sum_{\xi\in\mathfrak{b}}\exp\left(2\pi i\frac{u}{r}\frac{N(\xi)}{N(\mathfrak{b})}\right)\left(\frac{N(\xi)}{N(\mathfrak{b})}\right)^{-s}$$

(множитель $\frac{1}{2}$ возник из-за того, что числа ξ и $-\xi$, и только они, имеют равные нормы и составляют класс эквивалентных друг другу чисел из $\mathfrak{b}$, которому соответствует главный идеал (ξ); здесь $N(\mathfrak{b})$ – норма идеала $\mathfrak{b}$.

Пусть ω_1, ω_2 – целый базис идеала $\mathfrak{b}$, так что $\mathfrak{b}=\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z}$. Пусть $\overline{g}=\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$, тогда $\xi=m\omega_1+n\omega_2=(\omega_1,\omega_2)\overline{g}$.

Введем обозначение $Q(\overline{g})=\dfrac{N(m\omega_1+n\omega_2)}{N(\mathfrak{b})}$. Как известно (см. [7, с. 160]), представляет собой положительно определенную примитивную квадратичную форму $am^2+bmn+cn^2$ от переменных m и n с дискриминантом δ_F.

В матричной форме $Q(\overline{g})$ записывается в виде

$$Q(\overline{g})=\frac{1}{2}\overline{g}^tA\overline{g},\ \text{где } A=\begin{pmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\tilde{a}(s,r,u,\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\sum_{\bar{g}} \exp\left(2\pi\imath u Q(\bar{g})\right)\left(Q(\bar{g})\right)^{-s},$$

где $\bar{g}$ пробегает множество $\mathbb{Z}^2 \setminus \bar{0}$.

Лемма 8. *Пусть* $\operatorname{Im}\tau > 0,\ \bar{x} \in \mathbb{R}^2,\ \theta(\tau,\bar{x}) = \sum_{\bar{n}\in\mathbf{R}^2} \exp(2\pi\imath Q(\bar{n}+\bar{x}))$.

Тогда

$$\theta(\tau,\bar{x})\frac{\tau}{\imath} = \frac{1}{\sqrt{|\delta_F|}}\sum_{\bar{n}\in\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{\pi\imath}{\tau}\bar{n}A^{-1}\bar{n} + 2\pi\imath\bar{n}^t\bar{x}\right).$$

Доказательство. См. [8, глава VI].

Лемма 9. *1. Функция* $\left(\frac{\sqrt{|\delta_F|}r}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\tilde{a}(s,r,u,\mathrm{A})$ *является аналитической во всей комплексной плоскости, кроме точки* $s=1$, *в которой она имеет простой полюс с вычетом* $\frac{\pi}{r^2}G(r,u,\bar{0})$

2 При $\Re_s < 0$ *справедливо тождество*

$$\left(\frac{\sqrt{|\delta_F|}r}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\tilde{a}(s,r,u,\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{|\delta_F|}r}{2\pi}\right)^{1-s} \Gamma(1-s)\sum_{\bar{n}\neq\bar{0}}\left(\frac{Q_1(\bar{n})}{2}\right)^{s-1}\frac{G(r,u,\bar{n})}{\boldsymbol{r}}.$$

3 При любых r *и* u *функция* $\tilde{a}(s,r,u)$ *является целой.*

Доказательство. При $\Re_s > 1$ из формулы Меллина следует тождество

$$\left(\frac{\sqrt{|\delta_F|}r}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\tilde{a}(s,r,u,\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\sum_{\bar{g}\neq\bar{0}}\exp\left(\frac{2\pi i}{r}uQ(\bar{g})\right)\int_0^\infty t^{s-1}\exp\left(-\frac{2\pi t Q(\bar{g})}{\sqrt{|\delta_F|}r}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\bar{g} \bmod r}\exp\left(\frac{2\pi i}{r}uQ(\bar{g})\right)\sum_{\bar{h}}{}'\int_0^\infty t^{s-1}\exp\left(-\frac{2\pi t r Q\left(\bar{h}+\frac{\bar{g}}{r}\right)}{\sqrt{|\delta_F|}}\right)dt,$$

где штрих в сумме по $\bar{h}$ означает, что если $\bar{g}=\bar{0}$, то $\bar{h}\neq\bar{0}$.

Получена формула

$$\left(\frac{\sqrt{|\delta_F|}r}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\tilde{a}(s,r,u,\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\left(I_1(s)+I_2(s)\right), \tag{4}$$

где

$$I_1(s) = \sum_{\bar{g} \bmod r}\exp\left(\frac{2\pi\imath}{r}uQ(\bar{g})\right)\sum_{\bar{h}}{}'\int_0^1 t^{s-1}\exp\left(-\frac{2\pi t r Q\left(\bar{h}+\frac{\bar{g}}{r}\right)}{\sqrt{|\delta_F|}}\right)dt,$$

$$I_2(s) = \sum_{\bar{g} \bmod r}\exp\left(\frac{2\pi\imath}{r}uQ(\bar{g})\right)\sum_{\bar{h}}{}'\int_1^\infty t^{s-1}\exp\left(-\frac{2\pi t r Q\left(\bar{h}+\frac{\bar{g}}{r}\right)}{\sqrt{|\delta_F|}}\right)$$

Отметим, что функция $I_2(s)$ – целая.

Рассмотрим $I_1(s)$. Сначала снимем в сумме по $\bar{h}$ штрих:

$$I_1(s) = -\frac{1}{s} + \sum_{\bar{g} \bmod r}\exp\left(\frac{2\pi\imath}{r}uQ(\bar{g})\right)\int_0^1 t^{s-1}\theta\left(\frac{\imath t r}{\sqrt{|\delta_F|}},\frac{\bar{g}}{r}\right)dt.$$

Сделаем в интеграле замену переменной $t' = \frac{1}{t}$ и воспользуемся леммой 8:

$$I_1(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{r}\int_1^{\infty} t^{-s} \sum_{\overline{n}} \exp\left(-\frac{\pi t Q_1(\overline{n})}{r\sqrt{|\delta_F|}} u\right) G(r,u,\overline{n}) dt.$$

Наконец, выделим слагаемое с $\overline{n} = \overline{0}$:

$$I_1(s) = -\frac{1}{s} + \sum_{\overline{n}\neq\overline{0}} \frac{G(r,u,\overline{n})}{r} \int_1^{\infty} t^{-s} \exp\left(-\frac{\pi t Q_1(\overline{n})}{r\sqrt{|\delta_F|}}\right) dt. \qquad (5)$$

Сумма в правой части (5) – целая функция s. Вспоминая, что $I_2(s)$ – тоже целая функция, а $\Gamma(s)$ имеет в точке $s = 0$ простой полюс, заключаем, что функция $\tilde{a}(s,r,u,\mathsf{A})$ аналитически продолжена на всю комплексную плоскость, за исключением точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом $\frac{\pi}{r^2} G(r,u,\overline{0})$.

Пусть теперь $\Re_s < 0$. Проведя для $I_2(s)$ те же рассуждения, что для $I_1(s)$, получим

$$I_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{G(r,u,\overline{n})}{r(s-1)} + \sum_{\overline{n}\neq\overline{0}} \frac{G(r,u,\overline{n})}{r} \int_0^{1} t^{-s} \exp\left(-\frac{\pi t Q_1(\overline{n})}{r\sqrt{|\delta_F|}}\right) dt. \qquad (6)$$

Складывая почленно (5) и (6) и подставляя результат в (4), приходим при $\Re_s < 0$ к равенству

$$\left(\frac{\sqrt{|\delta_F|}r}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\tilde{a}(s,r,u,\mathsf{A}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{|\delta_F|}r}{2\pi}\right)^{1-s} \Gamma(1-s) \sum_{\overline{n}\neq\overline{0}} \left(\frac{Q_1(\overline{n})}{2}\right)^{s-1} \frac{G(r,u,\overline{n})}{r}.$$

Третье утверждение следует из независимости вычета функции $\tilde{a}(s,r,u,\mathsf{A})$ в точке $s = 1$ от класса A, а также из равенства $\sum_{\mathsf{A}} \psi(\mathsf{A}) = 0$ (характер ψ – неглавный).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ.

Лемма 10 (Формула С.М. Воронина). *Имеет место равенство*

$$M_0\delta(m) = \sum_{q=1}^{\infty} \chi(m,q,0)\Delta_q(m,\lambda),$$

где $M_0 = \sum_{q=1}^{\infty} \Delta_q(0,\lambda)$, *причем* $M_0 = c\lambda + O(\lambda^{-1})$, $c = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2\rho}}$.

Доказательство. См. [4].

Лемма 11. *Справедлива формула*

$$\Phi_q(s,m) = \frac{\pi q\lambda}{2\rho\sin\pi s} \sum_{\xi\in S_{2\rho}} \xi\left[f\left(\frac{q}{2\lambda}\right)\exp((s-1)\ln(\xi q\lambda - m)) - f\left(\frac{q}{\lambda}\right)\exp((s-1)\ln(2\xi q\lambda - m))\right].$$

Доказательство. См. [4].

Пользуясь формулой Воронина, преобразуем сумму $M_0A(N) = \sum_{m+n=N} a(m)a(n)$:

$$M_0 \sum_{m+n=N} a(m)\,a(n) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a(m)\,a(n) M_0 \delta(m+n-N) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a(m)\,a(n)\,\chi(m+n-N;q,0)\,\Delta_q(m+n-N) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a(m)\,a(n)\,\Delta_q(m+n-N)\frac{1}{q}\sum_{v=1}^{q}\exp\left(\frac{2\pi i v(m+n-N)}{q}\right) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}\sum_{v=1}^{q}\exp\left(\frac{-2\pi i vN}{q}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a(m)\exp\left(\frac{2\pi i vm}{q}\right) a(n)\exp\left(\frac{2\pi i vn}{q}\right)\Delta_q(m+n-N) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}\sum_{r\backslash q}\sum_{\substack{v=1\\(v,q)=qr^{-1}}}^{q} \exp\left(\frac{-2\pi i vN}{q}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a(m)\exp\exp\left(\frac{2\pi i vn}{q}\right)\times$$

$$\times\Delta_q(m+n-N) = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}\sum_{r\backslash q}\sum_{u=1}^{r}{}^{*} \exp\left(\frac{-2\pi i vN}{q}\right)\sum_{m=1}^{\infty} a(m)\exp\left(\frac{2\pi i vm}{q}\right)\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\exp\left(\frac{2\pi i vn}{q}\right)\Delta_q(m+n-N),$$

где звезда означает, что суммирование ведется по приведенной системе вычетов по модулю r.

Сделаем преобразование Абеля в суммах по n и по m. Тогда

$$M_0 \sum_{m+n=N} a(m)\,a(n) = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}\sum_{r\backslash q}\sum_{u=1}^{r}{}^{*}\exp\left(-\frac{2\pi i uN}{r}\right)\times$$
$$\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\hat{a}(x_1;r,u)\hat{a}(x_2;r,u)\,\Delta_q''(x_1+x_2-N)\,dx_1dx_2, \tag{7}$$

где $\hat{a}(x;r,u) = \sum_{n\le x} a(n)\exp\left(\frac{2\pi i un}{r}\right)$.

Возьмем получившийся интервал по частям по каждой переменной:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\hat{a}(x_1;r,u)\hat{a}(x_2;r,u)\,\Delta_q''(x_1+x_2-N)\,dx_1dx_2 =$$
$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\hat{\hat{a}}(x_1;r,u)\hat{\hat{a}}(x_2;r,u)\,\Delta_q^{(4)}(x_1+x_2-N)\,dx_1dx_2 \tag{8}$$

где $\hat{\hat{a}}(x;r,u) = \int\limits_0^x \sum_{n\le t} a(n)\exp\left(\frac{2\pi i un}{r}\right)dt$.

Пользуясь известной формулой

$$\hat{\hat{a}}(x;r,u) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(c)} \tilde{a}(s;r,u)\frac{x^{s+1}ds}{s(s+1)},$$

получаем

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\hat{\hat{a}}(x_1;r,u)\hat{\hat{a}}(x_2;r,u)\,\Delta_q^{(4)}(x_1+x_2-N)\,dx_1dx_2 =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{(c)}\int\limits_{(c)}\frac{\tilde{a}(s_1;r,u)\,ds_1}{s_1(s_1+1)}\,\frac{\tilde{a}(s_2;r,u)\,ds_2}{s_2(s_2+1)}\times \tag{9}$$
$$\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{s_1+1}x^{s_2+1}\Delta_q^{(4)}(x_1+x_2-N)\,dx_1dx_2$$

Возьмем интеграл $\int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{s_1+1} x_2^{s_2+1} \Delta_q^{(4)}(x_1+x_2-N)\,dx_1dx_2$ дважды по частям по каждой переменной; тогда придем к равенству

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{s_1+1} x_2^{s_2+1} \Delta_q^{(4)}(x_1+x_2-N)\,dx_1dx_2 = \\ = s_1(s_1+1)s_2(s_2+1)\int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} \Delta_q(x_1+x_2-N)\,dx_1dx_2. \tag{10}$$

Теперь воспользуемся равенством

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} \Delta_q(x_1+x_2-N)\,dx_1dx_2 = \\ = \frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2)}\int_0^\infty x^{s_1+s_2-1}\Delta_q(x-N)\,dx = \frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2)}\Phi_q(s_1+s_2-N) \tag{11}$$

Подставим формулы (8)-(11) в равенство (7):

$$M_0 \sum_{m+n=N} a(m)a(n) = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}\sum_{r\backslash q}\sum_{u=1}^{r}{}^{*}\exp\left(-\frac{2\pi i uN}{r}\right)\times \\ \times\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{(-\varepsilon_0)}\int\limits_{(-\varepsilon_0)} \tilde{a}(s_1;r,u)\tilde{a}(s_2;r,u)\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2)}\Phi_q(s_1+s_2-N)\,ds_1ds_2. \tag{12}$$

В интегралах по s_1 и s_2 сдвинем прямые интегрирования сначала по s_1, а затем по s_2 на

$$\Re s_1 = -\varepsilon_0, \qquad \Re s_2 - \varepsilon_0,$$

где ε_0 – положительное число, меньшее 0.5.

Тогда, так как полюса функций $\Gamma(s_1)$ и $\Gamma(s_2)$ в точках $s_1 = 0,\ s_2 = 0$ гасятся нулями функций $\tilde{a}(s_1;r,u)$ и $\tilde{a}(s_2;r,u)$ в этих точках, а полюс функции $\Phi_q(s_1+s_2,N)$ при $s_1+s_2=0$ гасится нулем функции $\Gamma^{-1}(s_1+s_2)$, то формулу (12) можно записать в виде

$$M_0 A(N) = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}\sum_{r\backslash q}\sum_{u=1}^{r}{}^{*}\exp\left(-\frac{2\pi i uN}{r}\right)\times \\ \times\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{(-\varepsilon_0)}\int\limits_{(-\varepsilon_0)} \tilde{a}(s_1;r,u)\tilde{a}(s_2;r,u)\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2)}\Phi_q(s_1+s_2-N)\,ds_1ds_2. \tag{13}$$

Пусть $\lambda_1 = \lambda$, или $\lambda_1 = 2\lambda$.

Положим W равным $\ln(\xi q\lambda - N)$, или $\ln(2\xi q\lambda - N)$. Тогда $W^{s-1} = \left(|W|e^{ik(\pi-\gamma)}\right)^{s-1}$, где $k=\pm 1,\ \gamma>0$, а $|W|$ и γ по порядку равны соответственно $N+q\lambda$ и $\frac{q\lambda}{N+q\lambda}$.

Определим величину $A'(N)$ равенством

$$M_0 A'(N) = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{f\left(\frac{q}{\lambda_1}\right)}{q}\sum_{r\backslash q}\sum_{u=1}^{r}{}^{*}\exp\left(-\frac{2\pi i uN}{r}\right)\sum_{\xi\in S_{2\rho}}\frac{\xi q\lambda}{2\rho}\times \\ \times\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{(-\varepsilon_0)}\int\limits_{(-\varepsilon_0)} \tilde{a}(s_1;r,u)\tilde{a}(s_2;r,u)\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2)}\frac{W^{s_1+s_2-1}}{\sin\pi(s_1+s_2)}\,ds_1ds_2. \tag{14}$$

Наша цель – оценить $A(N)$. Для этого в силу леммы 11 достаточно оценить $A'(N)$. Займемся оценкой $A'(N)$.

Пусть $\Re s_j = -\varepsilon_0$. В лемме 9 для $\tilde{a}\left(s_j;r,u\right)$ получено функциональное уравнение

$$\tilde{a}\left(s_j;r,u\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(Cr)^{1-2s_j}\frac{\Gamma\left(1-s_j\right)}{\Gamma\left(s_j\right)}\sum_{\mathsf{A}}\psi(\mathsf{A})\sum_{\bar{n}\neq\bar{0}}\frac{G(r,u,\bar{n})}{r}\left(Q_1(\bar{n})\right)^{s_j-1},\quad (j=1,2),$$

где $C=\frac{\sqrt{|\delta_F|}}{\sqrt{2}\pi}$. Подставим эти равенства в (14):

$$M_0A'(N)=\frac{\pi}{2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{f\left(\frac{q}{\lambda_1}\right)}{q}\sum_{r\backslash q}\sum_{u=1}^{r}{}^{*}\exp\left(-\frac{2\pi iuN}{r}\right)\sum_{\xi\in S_{2\rho}}\frac{\xi q\lambda}{2\rho}\sum_{\mathsf{A}_1}\psi(\mathsf{A}_1)\sum_{\mathsf{A}_2}\psi(\mathsf{A}_2)\times$$
$$\times\sum_{\bar{n}_1\neq\bar{0}}\frac{G\left(r,u,\bar{n}_1\right)}{r}\sum_{\bar{n}_2\neq\bar{0}}\frac{G\left(r,u,\bar{n}_2\right)}{r}J, \qquad (15)$$

где

$$J=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(-\varepsilon_0)}\int_{(-\varepsilon_0)}(Cr)^{1-2s_2}\,\Gamma(1-s_1)\Gamma(1-s_2)\Gamma(1-s_1-s_2)W^{s_1+s_2-1}ds_1ds_2.$$

Сделаем в интеграле J замену переменных $w_1=1-s_1$, $w_2=1-s_2$:

$$J=\frac{W}{(Cr)^2}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(1+\varepsilon_0)}\int_{(1+\varepsilon_0)}\Gamma(w_1)\Gamma(w_2)\Gamma(w_1+w_2-1)\times$$
$$\times\left(\frac{Q_1(\bar{n}_1)W}{C^2r^2}\right)^{-w_1}\left(\frac{Q_1(\bar{n}_2)W}{C^2r^2}\right)^{-w_2}dw_1dw_2$$

Пусть $z=e^{i\frac{k}{2}(\pi-\gamma)}$, тогда $\Re z>0$ и справедливы равенства

$$\frac{W}{z}=\frac{|W|e^{ik(\pi-\gamma)}}{z}=|W|z,\quad \Gamma(w_1+w_2-1)=z^{-1+w_1+w_2}\int_0^{\infty}t^{w_1+w_2-2}e^{-zt}dt.$$

Пользуясь ими, имеем

$$J=\frac{W}{(Cr)^2z}\int_0^{\infty}t^{-2}e^{-zt}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{(1+\varepsilon_0)}\Gamma(w_1)\left(\frac{Q_1(\bar{n}_1)W}{C^2r^2zt}\right)^{-w_1}dw_1\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{(1+\varepsilon_0)}\Gamma(w_2)\left(\frac{Q_1(\bar{n}_2)W}{C^2r^2zt}\right)^{-w_2}dw_2\right)dt$$

Теперь, так как $\Re\frac{W}{z}=\Re|W|z>0$, то справедлива формула Меллина

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(1+\varepsilon_0)}\Gamma(w_j)\left(\frac{Q_1(\bar{n}_j)W}{C^2r^2zt}\right)^{-w_j}dw_j=\exp\left(-\frac{z|W|Q_1(\bar{n}_j)}{C^2r^2zt}\right),\quad (j=1,2).$$

Поэтому имеем

$$J=\frac{W}{C^2r^2zt}I,\text{ где } I=\int_0^{\infty}t^{-2}\exp\left(-\sin\frac{\gamma}{2}\left(t+\frac{M}{t}\right)\right)\exp\left(ik\cos\frac{\gamma}{2}\left(t+\frac{M}{t}\right)\right)dt,$$

$$M=\frac{(Q_1(\bar{n}_1)+Q_1(\bar{n}_2))|W|}{C^2r^2}.$$

Подставим это равенство в (15):

$$M_0 A'(N) = \frac{\pi}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{f\left(\frac{q}{\lambda_1}\right)}{q} \sum_{r \backslash q} \sum_{\xi \in S_{2\rho}} \frac{\xi q \lambda}{2\rho} \sum_{\mathsf{A}_1} \psi(\mathsf{A}_1) \sum_{\mathsf{A}_2} \psi(\mathsf{A}_2) \times$$

$$\times \sum_{\bar{n}_1 \neq \bar{0}} \sum_{\bar{n}_2 \neq \bar{0}} \left(\sum_{u=1}^{r}{}^{*} \exp\left(-\frac{2\pi i u N}{r}\right) \frac{G(r,u,\bar{n}_2)}{r} \frac{G(r,u,\bar{n}_1)}{r} \right) \frac{W}{C^2 r^2 z} I.$$

Перейдем к неравенству. При этом считаем, что число классов идеалов поля F, $|\delta_{\mathrm{F}}|$, ρ – константы. Имеем

$$M_0 |A'(N)| \ll \sum_{q=1}^{\infty} f\left(\frac{q}{\lambda}\right) \times$$

$$\times \sum_{r \backslash q} \sum_{\bar{n}_1 \neq \bar{0}} \sum_{\bar{n}_2 \neq \bar{0}} \left| \sum_{u=1}^{r}{}^{*} \exp\left(-\frac{2\pi i u N}{r}\right) \frac{G(r,u,\bar{n}_2)}{r} \frac{G(r,u,\bar{n}_1)}{r} \right| |W| \lambda r^{-2} |I|;$$

(мы зафиксировали значения переменных суммирования A_1, A_2 и ξ так, чтобы правая часть последнего неравенства была наибольшей).

Так как $\chi^2(u) = 1$, справедлива оценка

$$\sum_{u=1}^{r}{}^{*} \exp\left(-\frac{2\pi i u N}{r}\right) \frac{G(r,u,\bar{n}_2)}{r} \frac{G(r,u,\bar{n}_1)}{r} \ll$$

$$\ll \left| S^{*}\left(r, -N, -c_1\left(r, \bar{n}_1, \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right) - c_2\left(r, \bar{n}_1, \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)\right)\right|,$$

где $S^{*}\left(r, -N, -c_1\left(r, \bar{n}_1, \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right) - c_2\left(r, \bar{n}_1, \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)\right)\right)$ – сумма Клостермана.

Применяя оценку А.Вейля, получаем

$$\sum_{u=1}^{r}{}^{*} \exp\left(-\frac{2\pi i u N}{r}\right) \frac{G(r,u,\bar{n}_2)}{r} \frac{G(r,u,\bar{n}_1)}{r} \ll r^{1/2} (N,r)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$M_0 |A'(N)| \ll \sum_{q=1}^{\infty} f\left(\frac{q}{\lambda}\right) \sum_{r \backslash q} r^{-3/2} (N,r)^{1/2} \sum_{\bar{n}_1 \neq \bar{0}} \sum_{\bar{n}_2 \neq \bar{0}} |W| \lambda |I|. \tag{16}$$

Выберем λ равным $N^{\frac{1}{2} - 0\,01\varepsilon}$.

Интеграл I оценим тривиально:

$$|I| \le \int_0^{\sqrt{M}} t^{-2} \exp\left(-\frac{\sin\frac{\gamma}{2} M}{t}\right) dt + \int_{\sqrt{M}}^{\infty} t^{-2} \exp\left(-\sin\frac{\gamma}{2} t\right) dt \ll \exp\left(-\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{M}\right) M^{-1}.$$

Отсюда и из определения γ следует, что

$$|I| = \frac{r^2}{|W|\left(Q_1(\bar{n}_1) + Q_1(\bar{n}_2)\right)} \begin{cases} \exp\left(-c\lambda\sqrt{\dfrac{Q_1(\bar{n}_1) + Q_1(\bar{n}_2)}{N}}\right), & \text{при } q \le \dfrac{N}{\lambda}, \\ \exp\left(-c\lambda\sqrt{\dfrac{\lambda\left(Q_1(\bar{n}_1) + Q_1(\bar{n}_2)\right)}{r}}\right), & \text{при } q > \dfrac{N}{\lambda}, \end{cases}$$

где $c > 0$ – константа.

Справедливы неравенства

$$\sum_{\substack{\bar{n}\\ Q_1(\bar{n})=m}} \ll m^{0,01\varepsilon}, \quad \sum_{\substack{m_1=1\\ m_1+m_2=m}}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \ll m.$$

Пользуясь ими и (16), имеем

$$M_0\left|A'(N)\right| \ll A'_1(N)+A'_2(N)+A'_3(N),$$

где

$$A'_1(N)=\sum_{q\le\lambda}\sum_{r\backslash q} r^{1/2}(N,r)^{1/2}\lambda\sum_{m=1}^{\infty} m^{0,01\varepsilon}\exp\left(-c\lambda\sqrt{\frac{m}{N}}\right),$$

$$A'_2(N)=\sum_{\lambda<q\le\frac{N}{\lambda}}\sum_{r\backslash q}\frac{\lambda^{2\rho}}{q^{2\rho}} r^{1/2}(N,r)^{1/2}\lambda\sum_{m=1}^{\infty} m^{0,01\varepsilon}\exp\left(-c\lambda\sqrt{\frac{m}{N}}\right),$$

$$A'_3(N)=\sum_{\frac{N}{\lambda}<q}\sum_{r\backslash q}\frac{\lambda^{2\rho}}{q^{2\rho}} r^{1/2}(N,r)^{1/2}\lambda\sum_{m=1}^{\infty} m^{0,01\varepsilon}\exp\left(-c\sqrt{\frac{\lambda m}{q}}\right).$$

Оценим $A'_1(N)$.

Так как $\sum_{m=1}^{\infty} m^{0,01\varepsilon}\exp\left(-\frac{c\lambda\sqrt{m}}{\sqrt{N}}\right) \ll N^{1+0,01\varepsilon}\lambda^2$, $r\le q$, $(N,r)^{1/2}\le(N,q)$, $\tau(q)\ll q^{0,01\varepsilon}$, то $A'_1(N)\ll N^{1+0,02\varepsilon}\lambda^{-1/2}\sum_{q\le\lambda}(N,q)$.

Оценим сумму $\sum_{q\le\lambda}(N,q)$:

$$\sum_{q\le\lambda}(N,q)\le\sum_{q\le\lambda}\sum_{l\backslash(N,q)}\varphi(l)\ll\sum_{l\backslash N}\varphi(l)\sum_{\substack{q\le\lambda\\ q\equiv 0(\mathrm{mod}\, l)}} 1\le\lambda\sum_{l\backslash N}\frac{\varphi(l)}{l}\le\lambda\tau(N)\ll\lambda N^{0,01\varepsilon}.$$

Тем самым доказано, что

$$A'_1(N)\ll N^{1+0,03\varepsilon}\sqrt{\lambda}\ll N^{5/4+0,03\varepsilon}.$$

Аналогично та же оценка выводится для $A'_2(N)$ и $A'_3(N)$.

Таким образом,

$$A(N)\ll N^{5/4+0,03\varepsilon}\lambda^{-1}\ll N^{3/4+\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Ingham A.E.* Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. London Math Soc. 1927. V. 2. P. 202-208.

2. *Estermann T.* On the representation of a number as the sum of two products // Proc. London Math. Soc. 1930. V. 31. P. 123-133.

3. *Исмоилов Д.И.* Распределение целых точек на некоторых поверхностях // Сборник науч. Трудов Такжикского гос. Университета. Душанбе. 1982. – С. 41-87.

4. *Воронин С М.* О круговом методе // Дискретная математика. 1990. Т. 2. № 2. – С. 60-70.

5. *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика. – М.: Наука, 1965.

6. *Малышев А.В.* О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды Математического ин-та им. В.А. Стеклова АН ССР. 1962. Т. 65.

7. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1985.

8. *Ogg A.P.* Modular Forms and Dirichlet Series, W.A.Benjamin, 1969.

9. *Воронин С М.* О явной формуле для функции Мангольдта // Труды Математического ин-та РАН. 1994. Т. 207. – С. 54-65.

S.A. Gritsenko

On a Variant of the Additive Problem of Divisors

Abstract.Let $a(n)$ be the coefficients of Dirichlet of L-functions of Hecke corresponding to nonprincipal character of an imaginary field. Using circle method in the form proposed by S.M. Voronin, the estimate

$$\sum_{m+n=N} a(m)a(n) = O(N^{\frac{3}{4}+\varepsilon})$$

got.