НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ. 2004. № 3. Вып. 9.

УДК 519. 2; 535.232.65

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ В УСЛОВИЯХ НИЗКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ НАБОРА СТАТИСТИКИ

Блажевич С.В.[1*], Бекназаров М.Н.[1], Гришин В.К.[2]

[1]Белгородский государственный университет,
Россия, 308015, г Белгород, ул. Победы, 85

[2]Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Россия, 119992, г. Москва, Воробьевы Горы

Анализ спектрального состава рентгеновского и гамма излучений источников низкой интенсивности сопряжен с необходимостью определения параметров спектрального распределения в условиях, когда амплитудный анализ затруднен из-за малой статистики набора данных. При этом за время экспозиции в отдельных каналах анализатора практически регистрируются одиночные события, а в остальных каналах события отсутствуют вообще. В данной работе рассмотрены некоторые случаи, когда такой анализ может быть успешно проведен.

Измерение спектрального распределения рентгеновского или гамма-излучения зачастую предполагает амплитудный анализ сигналов детектора. Результаты измерения при этом зависят от полученного в эксперименте набора статистики. В случае низкой скорости набора данных и, соответственно, малого набора событий, зарегистрированных в течение экспозиции, возникают трудности в интерпретации полученных результатов.

В данной работе рассмотрены некоторые методические приемы получения измеряемых спектральных характеристик на базе малой статистики регистрируемых событий.

Амплитудный анализ сигналов детектора предполагает набор событий в каналах анализатора, число которых может достигать нескольких тысяч. При этом число событий в каждом канале соответствует спектральной интенсивности регистрируемого излучения, а относительная ошибка ее измерения обратно пропорциональна корню квадратному из числа событий в канале. Естественно, что повышение точности измерения требует набора большого числа событий в каждом канале. Однако если использовать дополнительную информацию об измеряемом спектре, можно ограничиться статистикой, которая является заведомо не достаточной при обычном способе измерения спектра. Рассмотрим простой пример. Допустим, что регистрируемое излучение является квазимонохроматическим, и его спектр может быть описан в виде нормального распределения:

$$f(\omega,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{(\omega-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right]. \tag{1}$$

В этом случае задача измерения сводится к определению параметров нормального распределения μ и σ. Пусть N_k – нормированное число событий в k-том канале амплитудного анализатора. Для определения параметров распределения естественно использовать нелинейную регрессию, которая сводится к минимизации функции

* blazh@bsu.edu.ru

$$F(\mu,\sigma) = \sum_{k=1}^{k_{max}} \left(N_k - f(\omega_k,\mu,\sigma)\right)^2 , \tag{2}$$

однако при малом наборе статистики может оказаться, что число событий в некоторых каналах равно единице, а в других каналах вообще не набрано ни одного события. Числа N_k в этом случае практически не дают информации о спектре. Однако в этом случае можно определить функцию для регрессии, используя различие в вероятности появления событий в измеряемом спектре.

Запишем эту функцию в виде произведения значений плотности вероятности зарегистрированных событий

$$f(\mu,\sigma) = \frac{1}{\left(\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}\right)^{\sum_{k=1}^{k_{max}} m_k}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\cdot\sigma^2}\cdot\sum_{k=1}^{k_{max}} m_k\cdot\left(N_k-\mu\right)^2\right], \tag{3}$$

где k_{max} – максимальный номер канала, а m_k – число событий в канале. Величина m_k может принимать значения 0, 1 и более, если статистика достаточна для появления нескольких событий в одном канале. Функция $f(\mu,\sigma)$ имеет максимум при значениях параметров μ и σ, соответствующих реальному распределению плотности вероятности. Следует отметить, что экспоненциальный характер функции приводит к неустойчивости задачи ее минимизации уже для значений общего числа событий в спектре, превышающих сотню, поэтому на практике имеет смысл использовать логарифм этой функции $ff(\mu,\sigma) = \frac{1}{k_{max}}\cdot\ln(f(\mu,\sigma))$, т.е.

$$ff(\mu,\sigma) = \ln\left(\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot\sigma^2\cdot k_{max}}\right)\cdot\sum_{k=1}^{k_{max}}\left(N_k-\mu\right)^2 \tag{4}$$

Использование регрессии для ускоренного определения параметров нормального распределения практически может быть полезным, например, в эксперименте при определении положения пика параметрического рентгеновского излучения в спектре излучения релятивистских электронов в кристалле при изменении ориентации кристаллического радиатора.

Исследуя возможности указанного способа, мы провели расчеты с использованием компьютерного моделирования событий. Приготавливались наборы событий, соответствующие заданным параметрам распределения вероятности, по которым затем это распределение восстанавливалось с использованием регрессии на базе функции (4). Погрешность определения параметров составляла порядка 2% при статистике 600 событий.

Погрешность определения параметров распределения находится как погрешность выборочного среднего, которое является значительно более точной оценкой, чем значение числа событий в канале (см. [1,2]): $D(\sigma^2)=\sigma^2\cdot\sqrt{\frac{2}{n-1}}$.

Расчеты проведены с использованием математического пакета MathCAD. Для приготовления набора событий использовалась функция пакета rnorm(n,μ,σ), которая выводит случайный набор из n значений аргумента нормального распределения с заданными параметрами μ и σ. Регрессия была реализована с использованием функции Minerr(μ,σ) решающего блока. Поскольку для случайного конечного набора событий не может быть обеспечено точное решения задачи ff(μ,σ)=0, то в решающем блоке использовалось условие ff(μ,σ) + 2=0 обеспечивающее работу функции Minerr

Ниже представлена реализация данной задачи в виде документа программного пакета MathCAD.

$\mu\mu := .8 \qquad \sigma\sigma := .2$

ORIGIN := 1

TOL := 10^{-4}

$N := \mathrm{sort}(\mathrm{rnorm}(600, \mu\mu, \sigma\sigma))$

Набор значений аргументов нормального распределения с заданными параметрами *μμ* и *σσ*, сортированный в порядке возрастания

$k_{max} := \mathrm{rows}(N)$

$k_{max} = 600$

$$ff(\mu,\sigma) := \left[\ln\left(\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot\sigma^2\cdot k_{max}}\right)\cdot\sum_{k=1}^{k_{max}} (N_k - \mu)^2 \right]$$

$ff(\mu\mu, \sigma\sigma) = -0.193$

$\mu := 10 \qquad \sigma := 10$

Начальные значения параметров

$ff(\mu, \sigma) = 3.647$

Given

$ff(\mu,\sigma) + .2 = 0 \qquad 1 = 1$

Решающий блок

$$\begin{pmatrix}\mu\\ \sigma\end{pmatrix} := \mathrm{Minerr}(\mu, \sigma)$$

$\mu = 0.779116 \qquad \sigma = 0.198443$

Вычисленные значения параметров

$ff(\mu, \sigma) = -0.198315$

Полученные результаты показаны также на графике (см. рис. 1.): в синем цвете изображена кривая нормального распределения

$$f(x,\mu,\sigma) := \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right] \qquad x := 0, .01 .. 2 \qquad k := 1, 50 .. k_{max}$$

с параметрами μμ и σσ и некоторые точки (каждая пятидесятая) из случайного набора, моделирующего измеренный спектр. Красным цветом представлены нормальное распределение с параметрами μ и σ, полученными с помощью регрессии, и соответствующие точки на нем.

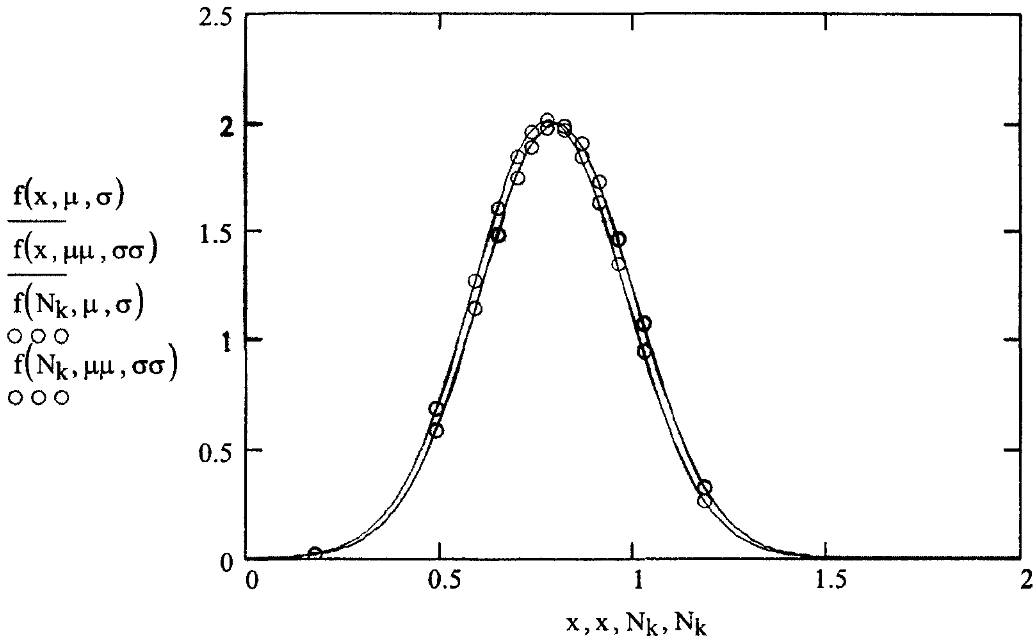

Рис. 1. Восстановление параметров спектрального распределения на основе измерений с малой статистикой. Обозначения величин соответствуют обозначениям в MathCad программе.

В данном примере начальные значения параметров в решающем блоке были специально выбраны сравнительно далеко от их конечных значений, но это не повлияло на результат.

Таким образом, предложенная нелинейная регрессия позволяет восстанавливать параметры нормального распределения на базе случайной выборки событий, и вычислительный процесс восстановления оказывается достаточно устойчивым. Задача может быть легко модифицирована на случай, когда необходимо определять параметры не одного, а нескольких пиков в спектре.

Список литературы

1. Д. Худсон Э. Статистика для физиков изд. «Мир». – М., 1970.
2. Клепков Н.П., Соколов С.Н. Анализ и планирование эксперимента методом максимального правдоподобия. – М., 1964.

PROBABILITY DISTRIBUTION OF EVENTS IN THE CONDITIONS OF EVENTLESS STATISTICS

S. V.Blazhevich[1], M.N.Beknazarov[1], V.K.Grishin[2]

[1] Belgorod State university, Studencheskaya 14 Belgorod 308007 Russia

[2] Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University, Vorob'evy Gory, Moscow 119992, Russia

X-Ray and γ radiation spectral structure analysis of low intensity sources is mated with the necessity to define spectral distribution parameters in the conditions of eventless statistics. In this case single events are registered in several channels only and in other channels the events are fully absent. In this paper the cases are considered when such an analysis can be carry out successfully.