УДК 517.585: 519.6

ФУНКЦИИ МАТЬЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОГРАММНЫХ ПАКЕТАХ

С. В. Блажевич[1], М. Н. Бекназаров[2]

[1, 2] Белгородский государственный университет, 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14
e-mail: blazh@bsu.edu.ru

Дифференциальные уравнения Матье часто возникают при решении научных и инженерных проблем. Наиболее известным примером является задача о колебаниях эллиптической мембраны. Эллипсом можно в первом приближении описывать форму различных объектов, возникающих как результат деформации круга (в двумерном пространстве) или цилиндра (в трехмерном пространстве). Решения этих уравнений представляют собой специальные функции, называемые функциями Матье. Несмотря на существование множества проблем, приводящих к необходимости численных расчетов функций Матье, реализация этих функций в современных математических пакетах не представляется удовлетворительной. В данной работе рассмотрены возможности численных расчетов функций Матье, предлагаемые в современных программных пакетах, а также предложен программный комплекс для вычисления обыкновенных и модифицированных функций Матье, реализованный авторами в пакете MathCad с использованием средств программирования пакета.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Матье, задача о колебаниях эллиптической мембраны, модифицированные функции Матье, численные методы расчета функций Матье, программный пакет MathCad для расчета функций Матье.

ВВЕДЕНИЕ

Функции Матье – специальные функции, введённые французским математиком Э. Матье (E. Mathieu) в 1868 г. при решении задач о колебании эллиптической мембраны [1]. Функции Матье применяются также при изучении распространения электромагнитных волн в эллиптическом цилиндре, при рассмотрении поверхностных волн жидкости в сосуде, имеющем форму эллиптического цилиндра, и при решении ряда других вопросов. Обыкновенными функциями Матье называются чётные или нечётные функции, являющиеся периодическими решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Матье):

$$\frac{d^2y}{dv^2}+(a-2q\cos 2v)y=0 \quad , \tag{1а}$$

а модифицированными функциями – решения уравнения

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}+(a-2q ch 2\xi)F=0. \tag{1б}$$

Эти функции были далее изучены множеством исследователей. В течение нескольких десятилетий были опубликованы работы, посвященные аналитическому исследованию и использованию полученных результатов в математической физике [2,3], исследованы аналогии между функциями Матье и другими математическими функциями. Функции Матье достаточно подробно рассмотрены в книге Абрамовица [4].

Несмотря на существование множества проблем, привлекающих внимание исследователей, функции Матье приводятся в современных учебниках математики или математической физики, но для численных расчетов недостаточно представлены в математических пакетах. В частности, в инженерных и математических пакетах, MatLab 7 и Maple 9 [3] представлены только лишь обыкновенные функции Матье, хотя на практике необходимы наравне с обыкновенными функциями Матье также модифицированные функции Матье. Но имеющиеся сложности (показаны ниже в разделе “Численные методы”) в численной реализации данных алгоритмов не позволяют их использовать в полной мере.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Исторически это уравнение появилось при изучении уравнения колебаний пластины с эллиптической границей [1, 2]:

$$\begin{aligned} &\partial_x^2 V + \partial_y^2 V = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 V \\ &V\Big|_{\Omega(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1)} = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Вывод уравнения Матье довольно громоздок, и здесь приведем лишь формулы, воспользовавшись которыми, можно самостоятельно прийти к уравнению Матье. Прежде всего будем предполагать, что пластина колеблется с постоянной частотой р, тогда от волнового уравнения можно перейти к уравнению Гельмгольца:

$$\partial_x^2 V + \partial_y^2 V + \frac{p}{c^2}V = 0. \qquad (3)$$

Теперь от декартовых координат перейдем к эллиптическим:

$$x + iy = hch(\xi + i\eta) \text{ или} \qquad (4)$$

$$x = hch\xi\cos\eta\,,\ y = hsh\xi\sin\eta\,,$$

где ±h, 0 – фокусы эллиптической мембраны.

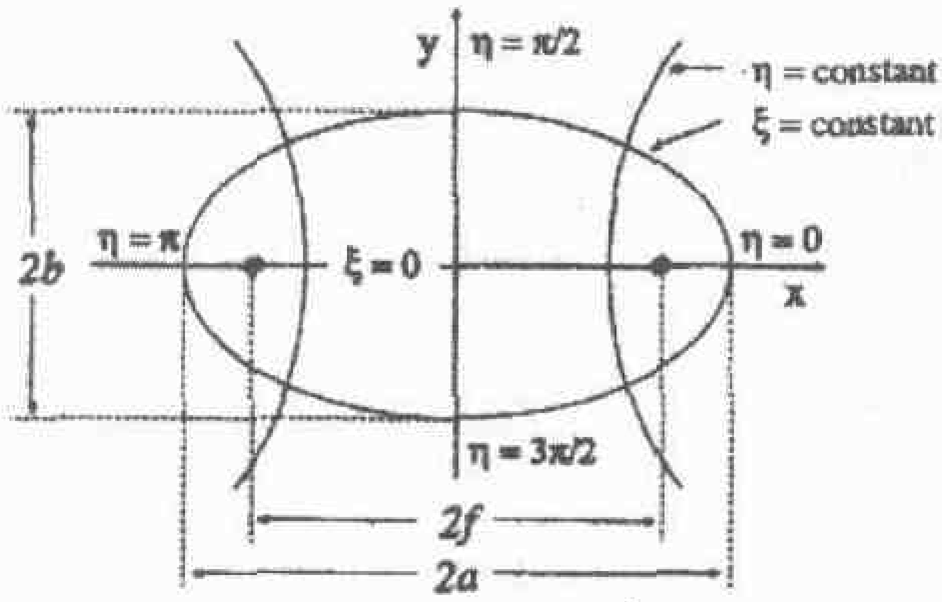


Рис. 1. Эллиптическая цилиндрическая система координат.
Кривые ξ=константа. Софокусные эллипсы и кривые η =константа – ортогональные гиперболы

В этих координатах $\xi \geq 0$, $-\pi < \eta \leq \pi$. В новых переменных уравнение Гельмгольца примет вид:

$$\partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u + \frac{h^2 p^2}{c^2}(ch^2\xi - \cos^2\eta)u = 0. \qquad (5)$$

Теперь легко разделить переменные:

$$u = F(\xi)G(\eta). \qquad (6)$$

В результате для функции $G(\eta)$ получается уравнение для обыкновенных функций Матье

$$\frac{d^2G}{d\eta^2} + (a - 2q\cos 2\eta)G = 0, \qquad (7)$$

а для модифицированных функций Матье $F(\xi)$ уравнение

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} + (a - 2qch2\xi)F = 0. \tag{8}$$

В этих уравнениях введены обозначения:

$$a = A - \frac{h^2p^2}{2c^2}, \; q = \frac{h^2p^2}{4c^2} = \frac{h^2k^2}{4} \tag{9}$$

Решение для G можно представить в виде ряда:

$$G(q,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}(A_k(q)\cos(k\eta) + B_{k+1}(q)\sin((k+1)\eta)), \tag{10}$$

где

$$ce_r(q,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}(A_k(q)\cos(k\eta) \tag{11}$$

и

$$se_{r+1}(q,\eta) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_{k+1}(q)\sin(k\eta) \tag{12}$$

есть функции Матье первого и второго рода.

По сути построения решение для G есть периодическая функция аргумента η. Поэтому в задаче, связанной с колебаниями эллиптической мембраны, необходимо найти такие значения параметра a, при которых существуют периодические решения уравнения Матье с периодом 2π.

Аналогично представление для модифицированных функций Матье получаем из уравнения для F:

$$F(q,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}(A_k(q)ch(k\xi) + B_{k+1}(q)sh((k+1)\xi)), \tag{13}$$

где

$$Ce_r(q,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}(A_k(q)ch(k\xi) \tag{14}$$

и

$$Se_{r+1}(q,\eta) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_{k+1}(q)sh(k\xi) \tag{15}$$

есть модифицированные функции Матье первого и второго рода. Здесь $ch(k\xi)$ и $sh(k\xi)$ – функции гиперболического синуса и косинуса.

Нетрудно заметить, что

$$Ce_r(q,\xi) = ce_r(q,i\xi), \tag{16}$$

где i – мнимая единица.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Дифференциальное уравнение Матье

$$\theta''(\eta) + (\alpha - 2q\cos 2\eta)\Theta(\eta) = 0 \tag{17}$$

имеет периодические решения с периодом π или 2π. Значения α, которые удовлетворяют этому условию, известны как характеристические числа и представляют неограниченный ряд реальных значений, имеющих свойство $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$. Когда решения симметричны относительно $\eta=0$, характеристические числа обозначаются как $\alpha_r(q)$: $\{r \in 0, 1, 2\ldots\}$, тогда как для нечетных решений их представляют как $\beta_r(q)$: $r \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Если уравнение (10) подставить в уравнение (17), то получим следующие рекуррентные соотношения Фурье коэффициентов для характеристических значений α_r или β_r. Мы имеем дифференциальное отношение для r четных или нечетных, поэтому, соответственно, значения r обозначим как 2n и 2n+1, где n$\geq$0.

$$ce_{2n} : (\alpha = \alpha_{2n}); \qquad (k \geq 2)$$

$$\alpha A_0 = qA_2 \tag{18а}$$

$$(\alpha - 4)A_2 = q(2A_0 + A_4) \tag{18б}$$

....

$$[\alpha - (2k)^2]A_{2k} = q(A_{2k-2} + A_{2k+2}) \tag{18в}$$

$$ce_{2n+1} : (\alpha = \alpha_{2n+1}); \quad (k \geq 1)$$

$$(\alpha - 1)A_1 = q(A_1 + A_3) \tag{19а}$$

$$[\alpha - (2k+1)^2]A_{2k+1} = q(A_{2k-1} + A_{2k+3}) \tag{19б}$$

$$se_{2n+1} : (\beta = \beta_{2n+2}); \quad (k \geq 2)$$

$$(\beta - 4)B_2 = qB_4 \tag{20а}$$

$$[\beta - (2k)^2]B_{2k} = q(B_{2k-2} + B_{2k+2}) \tag{20б}$$

$$se_{2n+1} : (\beta = \beta_{2n1}); \qquad (k \geq 1)$$

$$(\beta - 1)B_1 = q(B_3 - B_1) \tag{21а}$$

$$[\beta - (2k+1)^2]B_{2k+1} = q(B_{2k-1} + B_{2k+3}) \tag{22б}$$

Для того чтобы периодические решения для выше представленных рекуррентных соотношений существовали, характеристические числа должны удовлетворять следующим непрерывным дробям:

$$V_0 = \frac{2}{V_2 -} \frac{1}{V_4 -} \frac{1}{V_6 - \ldots}; \ (Roots = \alpha_{2n}) \tag{23}$$

$$V_1 - 1 = \frac{1}{V_3 -} \frac{1}{V_5 -} \frac{1}{V_7 - \ldots}; \ (Roots = \alpha_{2n+1}) \tag{24}$$

$$V_2 = \frac{1}{V -_4} \frac{1}{V_6 -} \frac{1}{V_8 - \ldots}; \ (Roots = \beta_{2n+2}) \tag{25}$$

$$V_1 + 1 = \frac{1}{V_3 -} \frac{1}{V_5 -} \frac{1}{V_7 - \ldots}; \ (Roots = \beta_{2n+1}), \tag{26}$$

где

$$V_j = \frac{(\alpha - j^2)}{q}; \ (j \geq 0) \tag{27}$$

Здесь использовано обозначение для непрерывных дробей

$$\frac{1}{V_1 -} \frac{1}{V_2 -} \frac{1}{V_3 - \ldots} = \cfrac{1}{V_1 - \cfrac{1}{V_2 - \cfrac{1}{V_3 - \ldots}}}$$

Непрерывные дроби (23) – (26) являются уравнениями для α или β, корни которых являются характеристическими числами α_r и β_r функций Матье.

Поскольку характеристические числа вычисляются, решая уравнения (23) – (26), рекуррентные отношения (18а) – (21б) могут быть использованы для получения

Фурье коэффициентов ряда (10). Обыкновенные функции Матье могут быть окончательно выражены как

$$ce_{2m}(q,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}(q)\cos 2k\eta \tag{28}$$

$$ce_{2m+1}(q,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+1}(q)\cos(2k+1)\eta \tag{29}$$

$$se_{2m+2}(q,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+2}(q)\sin(2k+2)\eta] \tag{30}$$

$$se_{2m+1}(q,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}(q)\sin(2k+1)\eta \tag{31}$$

Как следствие – свойства ортогональности функций рядов синусов и косинусов, обычные функции Матье ce_r и se_{r+1} являются ортогональными функциями:

$$\int_0^{2\pi} ce(q,z)ce_p(q,z)dz=\int_0^{2\pi} se_m(q,z)se_p(q,z)dz=\begin{cases}\pi\ if & m=p\\ 0\ if & m\neq p\end{cases}. \tag{32}$$

Подстановкой уравнений (28) – (31) в (32) можем получить следующее соотношение для нормировки:

$$2A_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(A_{2k})^2=\sum_{k=0}^{\infty}(A_{2k+1})^2\sum_{k=0}^{\infty}(B_{2k+2})^2=\sum_{k=0}^{\infty}(B_{2k+1})^2=1 \tag{33}$$

Модифицированное уравнение Матье $R''(\xi)+(\alpha-2q\cosh 2\xi)R(\xi)=0$ может быть получено из обычного уравнения Матье (17) подстановкой измененной переменной $\eta=i\xi$. Таким образом, используя обычные уравнения Матье (28) – (31), можем получить следующие модифицированные функции Матье:

$$Ce_{2n}(q,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}(q)\cosh 2k\xi \tag{34}$$

$$Ce_{2m+1}(q,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+1}(q)\cosh(2k+1)\xi \tag{35}$$

$$Se_{2m+2}(q,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+2}(q)\sinh(2k+2)\xi] \tag{36}$$

$$Se_{2m+1}(q,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}(q)\sinh(2k+1)\xi\ , \tag{37}$$

где $Ce_r(q,\xi)$ – модифицированная функция Матье первого рода порядка r, а $Se_{2r+2}(q,\xi)$ – модифицированная функция Матье второго рода порядка (r+1).

Модифицированные уравнения Матье (34) – (37) могут также быть выражены с использованием рядов функций Бесселя. Представленные выше соотношения для расчета функций Матье могут быть представлены в матричной форме [5]:

для функции $ce_{2m}(z,q)$

$$\begin{bmatrix} -a & \sqrt{2q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2q} & 2^2-a & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 4^2-a & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 6^2-a & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ae_0 \\ Ae_2 \\ Ae_4 \\ Ae_6 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}=0$$

для функции $ce_{2m+1}(z,q)$

$$\begin{bmatrix} 1+q-a & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 3^2-a & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 5^2-a & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 7^2-a & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ae_1 \\ Ae_3 \\ Ae_5 \\ Ae_7 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}=0$$

для функции $se_{2m+2}(z,q)$

$$\begin{bmatrix} 2^2-b & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 4^2-b & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 6^2-b & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 8^2-b & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Be_2 \\ Be_4 \\ Be_6 \\ Be_8 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}=0$$

для функции $se_{2m+1}(z,q)$

$$\begin{bmatrix} 1-q-b & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 3^2-b & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 5^2-b & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 7^2-b & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Be_1 \\ Be_3 \\ Be_5 \\ Be_5 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}=0$$

ПРОГРАММА РАСЧЕТА ФУНКЦИЙ МАТЬЕ В СРЕДЕ MATHCAD

В программном пакете MathCad соотношения, представленные выше, в разделе «Численные методы», были реализованы нами средствами программирования пакета. Основная программа mat1(q, ftype, order, ntrms) с помощью задания входных параметров управляет вычислительным процессом, обеспечивая расчет конкретной функции Матье:

```
mat1(q,ftype,order,ntrms) := | for i ∈ 0..(ntrms − 2)
                             |   | v_{i+1,i} ← q
                             |   | v_{i,i+1} ← q
                             | if ftype = 1
                             |   | if order = 1
                             |   |   | for i ∈ 0..(ntrms − 1)
                             |   |   |   v_{i,i} ← (2·i)^2
                             |   |   | v_{1,0} ← √2·q
                             |   |   | v_{0,1} ← v_{1,0}
                             |   | if order = 2
                             |   |   | for i ∈ 0..(ntrms − 1)
                             |   |   |   v_{i,i} ← (1 + 2·i)^2
                             |   |   | v_{0,0} ← 1 + q
                             | if ftype = 2
                             |   | for i ∈ 1..ntrms      if order = 1
                             |   |   v_{i-1,i-1} ← (2·i)^2
                             |   | otherwise
                             |   |   | for i ∈ 0..(ntrms − 1)
                             |   |   |   v_{i,i} ← (1 + 2·i)^2
                             |   |   | v_{0,0} ← 1 − q
                             | a ← eigenvals(v)
                             | c ← eigenvecs(v)
                             | c ← sortM(a,c)
                             | for i ∈ 0..(cols(v) − 1)  if order = 1 ∧ ftype = 1
                             ⋮
```

```
⋮
c_{0,i} ← c_{0,i} / √2
for i ∈ 0..(cols(c) − 1)
    cv_i ← 0
    for j ∈ 0..(cols(c) − 1)
        cv_i ← cv_i + conj(c_{i,j}) · c_{i,j}
for i ∈ 0..(cols(c) − 1)    if (order = 1) ∧ (ftype = 1)
    cv_0 ← cv_0 + conj(c_{0,i}) · c_{0,i}
for i ∈ 0..(cols(c) − 1)    if Im(q) ≠ 0
    for j ∈ 0..(cols(c) − 1)
        c_{i,j} ← c_{i,j} / √(cv_i)
if ftype = 1
    for j ∈ 0..cols(c) − 1
        sgn_j ← sign( Σ_{i=0}^{cols(c)−1} c_{j,i} )
    sgn_i ← 1  if  sgn_i = 0
    cv_j ← sgn_j / √(cv_j)
otherwise
    for j ∈ 0..(ntrms − 1)                    if order = 1
        sgn_j ← 0
        for i ∈ 0..(ntrms − 1)
            sgn_j ← sgn_j + [2 · (i + 1)] · c_{i,j}
        sgn_j ← sign(sgn_j)
        sgn_j ← 1  if  sgn_j = 0
        cv_j ← sgn_j / √(cv_j)
    for j ∈ 0..(ntrms − 1)                    otherwise
        sgn_j ← 0
        for i ∈ 0..(ntrms − 1)
            sgn_j ← sgn_j + [2 · (i + 1) − 1] · c_{i,j}
        sgn_j ← sign(sgn_j)
        sgn_j ← 1  if  sgn_j = 0
        cv_j ← sgn_j / √(cv_j)
for i ∈ 0..(cols(c) − 1)
    for j ∈ 0..(cols(c) − 1)
        c_{i,j} ← 1 · c_{i,j} · cv_i
c ← revers(c, ntrms, ftype)
```

В программе используются встроенные функции пакета, а также две пользовательские функции:

$$\mathrm{sortM}(a,c) := \mathrm{submatrix}\left(\mathrm{rsort}\left(\mathrm{stack}\left(a^T, c\right), 0\right), 1, \mathrm{cols}(c), 0, \mathrm{cols}(c)-1\right)$$

и

```
revers(c,ntrms,ftype) := | for i ∈ 0..ntrms − 1
                         |   for j ∈ 0..ntrms − 1
                         |     | c[i,j] ← −|c[i,j]|  if mod(i + j,2) ∧ i > j
                         |     | c[i,j] ← |c[i,j]|  otherwise
                         | c
```

.

Используя представленную выше программу mat1(q, ftype, order, ntrms), функции Матье различного типа можно рассчитывать, задавая необходимые значения параметров, определяющих тип (ftype) и порядок (order) функции. Указанные параметры генерируются главными программами вычисления обыкновенных функций Матье ce(n,q,x,ntrms) и se(n,q,x,ntrms), которые обращаются к программе mat1(q, ftype, order, ntrms). Точность расчета определяется выбором размера матрицы, который задается параметром ntrms.

```
ce(n,q,x,ntrms) := | if mod(n,2) = 0
                   |   | order ← 1
                   |   | for i ∈ 0..ntrms − 1
                   |   |   m[i] ← 2·(i)
                   | otherwise
                   |   | order ← 2
                   |   | for i ∈ 0..ntrms − 1
                   |   |   m[i] ← 1 + 2·(i)
                   | v ← 0
                   | c ← mat1(q,1,order,ntrms)
                   | k ← floor(n/2)
                   | for i ∈ 0..ntrms − 1
                   |   v ← v + cos(x·m[i])·c[i,k]
                   | v·√1  if n = 0
                   | v  otherwise
```

,

```
se(n,q,x,ntrms) := | if mod(n,2) = 0
                   |   | order ← 1
                   |   | for i ∈ 0..ntrms − 1
                   |   |   m[i] ← 2·(i + 1)
                   | otherwise
                   |   | order ← 2
                   |   | for i ∈ 0..ntrms − 1
                   |   |   m[i] ← 1 + 2·i
                   | v ← 0
                   | c ← mat1(q,2,order,ntrms)
                   | k ← n/2 − 1  if order = 1
                   | k ← floor(n/2)  otherwise
                   | for i ∈ 0..ntrms − 1
                   |   v ← v + sin(x·m[i])·c[i,k]
                   | v
```

Представленные программы позволяют легко рассчитывать и производные от функций Матье, просто заменяя cos(x) на sin(x) и наоборот, учитывая при этом знаки (x – это угловая переменная, тождественная η). Например, для представленных обыкновенных функций Матье программы для производных по x будут иметь вид:

```
ced(n,q,x,ntrms) := | if mod(n,2) = 0
                    |   | order ← 1
                    |   | for i ∈ 0.. ntrms − 1
                    |   |   m_i ← 2 · (i)
                    | otherwise
                    |   | order ← 2
                    |   | for i ∈ 0.. ntrms − 1
                    |   |   m_i ← 1 + 2 · (i)
                    | v ← 0
                    | c ← mat1(q,1,order,ntrms)
                    | k ← floor(n/2)
                    | for i ∈ 0.. ntrms − 1
                    |   v ← v + sin(x · m_i) · m_i · c_{i,k}
                    | v ← −v
                    | v · √1  if n = 0
                    | v  otherwise
```

,

```
ced2(n,q,x,ntrms) := | if mod(n,2) = 0
                     |   | order ← 1
                     |   | for i ∈ 0.. ntrms − 1
                     |   |   m_i ← 2 · (i)
                     | otherwise
                     |   | order ← 2
                     |   | for i ∈ 0.. ntrms − 1
                     |   |   m_i ← 1 + 2 · (i)
                     | v ← 0
                     | c ← mat1(q,1,order,ntrms)
                     | k ← floor(n/2)
                     | for i ∈ 0.. ntrms − 1
                     |   v ← v + cos(x · m_i) · (m_i)^2 · c_{i,k}
                     | v ← −v
                     | v · √1  if n = 0
                     | v  otherwise
```

Модифицированные функции Матье представляются программами:

$$\mathrm{Ce}(n,q,x,ntrms) := \left| \begin{array}{l} f1 \leftarrow \mathrm{Mc}(n,q,x,ntrms) \\ f2 \leftarrow \dfrac{\mathrm{ce}(n,q,0,ntrms)}{\mathrm{Mc}(n,q,0,ntrms)} \\ f \leftarrow f1 \cdot f2 \end{array} \right.$$

и

$$\mathrm{Se}(n,q,x,ntrms) := \left| \begin{array}{l} f1 \leftarrow \mathrm{Ms}(n,q,x,ntrms) \\ f2 \leftarrow \dfrac{\mathrm{Re}(i \cdot \mathrm{se}(n,q,i \cdot 1,ntrms))}{\mathrm{Ms}(n,q,1,ntrms)} \\ f \leftarrow f1 \cdot f2 \end{array} \right.$$

,

где

$$\mathrm{Mc}(n,q,x,ntrms) := \left| \begin{array}{l} q2 \leftarrow \sqrt{q} \\ \text{for } i \in 0..ntrms-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} k_i \leftarrow i \\ sgn \leftarrow \cos(\pi \cdot k) \end{array} \right. \\ mh \leftarrow \mathrm{floor}\left(\dfrac{n}{2}\right) \\ u1 \leftarrow q2 \cdot e^{-x} \\ u2 \leftarrow q2 \cdot e^{x} \\ f \leftarrow 0 \\ \text{if } \mathrm{mod}(n,2) = 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} r \leftarrow \dfrac{n}{2} \\ c \leftarrow \mathrm{mat1}(q,1,1,ntrms) \\ \text{for } i \in 0..ntrms-1 \\ \quad u_i \leftarrow c_{i,mh} \\ s \leftarrow \mathrm{MaxInd}(u) \\ \vdots \end{array} \right. \\ \vdots \end{array} \right.$$

```
      for i ∈ 0..ntrms − 1
          p0_i ← (−1)^r / (u_s · sgn_i · 2)   if s = 0
          p0_i ← (−1)^r / (u_s · sgn_i)   otherwise
      s ← s
      for i ∈ 0..ntrms − 1
          f ← f + (Jn(k_i − s, u1) · Jn(k_i + s, u2) + Jn(k_i + s, u1) · Jn(k_i − s, u2)) · (p0_i · u_i)
  otherwise
      r ← (n + 1)/2
      c ← mat1(q, 1, 2, ntrms)
      for i ∈ 0..ntrms − 1
          u_i ← c_(i,mh)
      s ← MaxInd(u)
      for i ∈ 0..ntrms − 1
          p0_i ← −(−1)^r / (u_s · sgn_i)
      s ← s
      for i ∈ 0..ntrms − 1
          f ← f + (Jn(k_i − s, u1) · Jn(k_i + s + 1, u2) + Jn(k_i + s + 1, u1) · Jn(k_i − s, u2)) · (p0_i · u_i)
  f
```

и

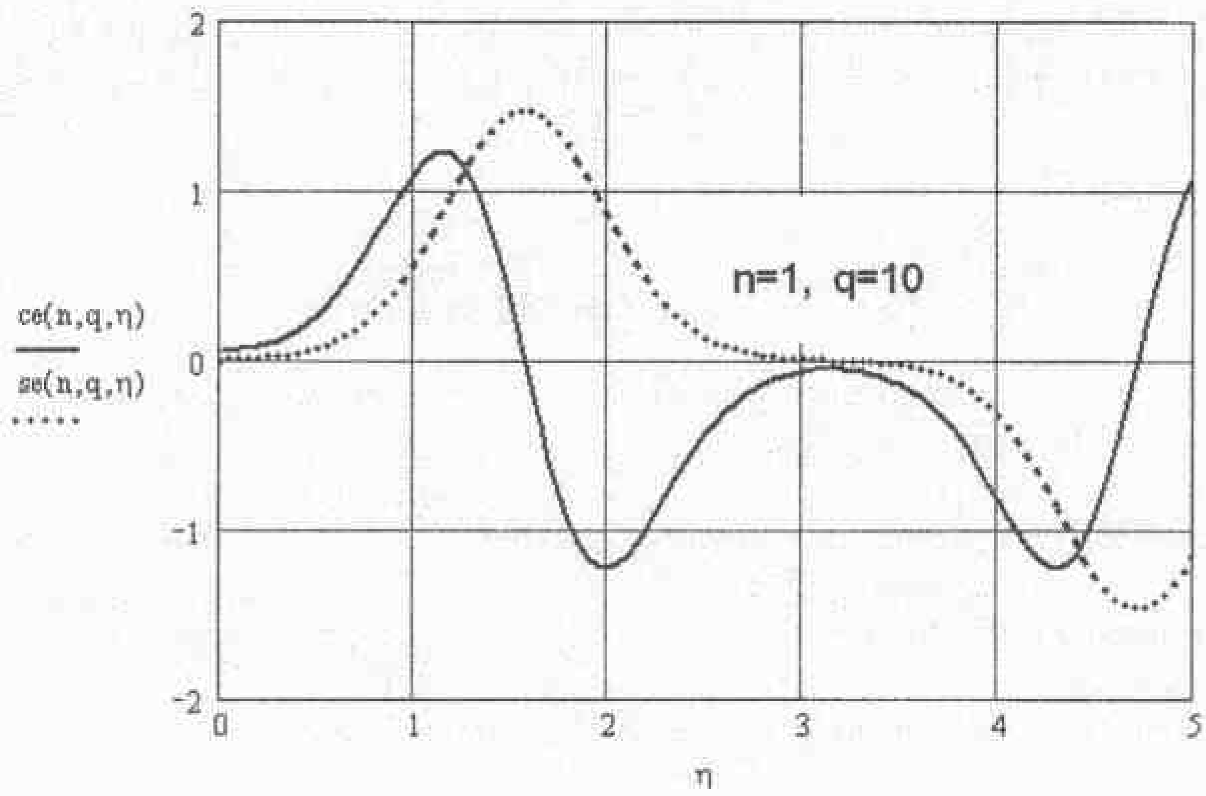
```
Ms(n, q, x, ntrms) :=  q2 ← √q
                       mh ← floor(n/2)
                       z1 ← q2 · e^(−x)
                       z2 ← q2 · e^x
                       f ← 0
                       if mod(n, 2) = 0
                           r ← n/2
                           for i ∈ 0..ntrms − 1
                               k_i ← i + 1
                               sgn_i ← cos(π · k_i)
```

```
⋮   ⋮
    c ← matl(q,2,1,ntrms)
    for i ∈ 0..ntrms − 1
      u_i ← c_(i,r−1)
    s ← MaxInd(u)
    for i ∈ 0..ntrms − 1
      p0_i ← (−1)^r / (u_s · sgn_i)
    s ← s + 1
    for i ∈ 0..ntrms − 1
      f ← f + (Jn(k_i − s,z1) · Jn(k_i + s,z2) − Jn(k_i + s,z1) · Jn(k_i − s,z2)) · (p0_i · u_i)
    f ← f
otherwise
    for i ∈ 0..ntrms − 1
        k_i ← i
        sgn_i ← cos(π · k_i)
    r ← (n − 1) / 2
    c ← matl(q,2,2,ntrms)
    for i ∈ 0..ntrms − 1
      u_i ← c_(i,mh)
    s ← MaxInd(u)
    for i ∈ 0..ntrms − 1
      p0_i ← (−1)^r / (u_s · sgn_i)
    s ← s
    for i ∈ 0..ntrms − 1
      f ← f + (Jn(k_i − s,z1) · Jn(k_i + s + 1,z2) − Jn(k_i + s + 1,z1) · Jn(k_i − s,z2)) · (p0_i · u_i)
    f ← f
f
```

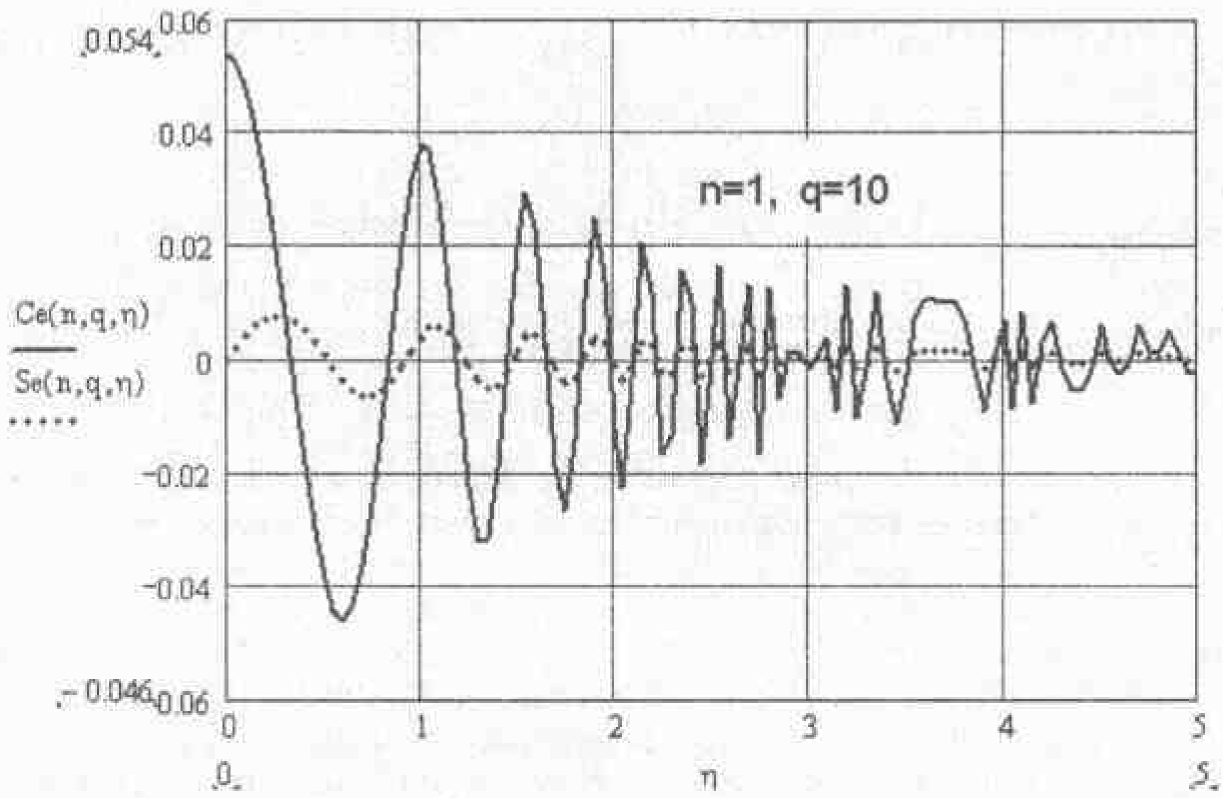
Расчеты конкретных примеров обыкновенных функций Матье, проведенные с использованием данных программ, сравнивались с результатами аналогичных расчетов функций в математическом пакете Maple и MatLab. При этом было получено хорошее совпадение результатов расчета.

Следует отметить, что указанные выше математические пакеты не имеют встроенных средств для расчета модифицированных функций Матье, а использование для таких расчетов обыкновенных функций Матье путем замены действительных значений аргумента на мнимые (см. формулу 16), обнаруживало неустойчивость работы программы, приводящую к расходимости.

В качестве демонстрации на рис. 2. и рис. 3. представлены результаты расчета функций Матье для некоторых конкретных значений ее параметров.



а



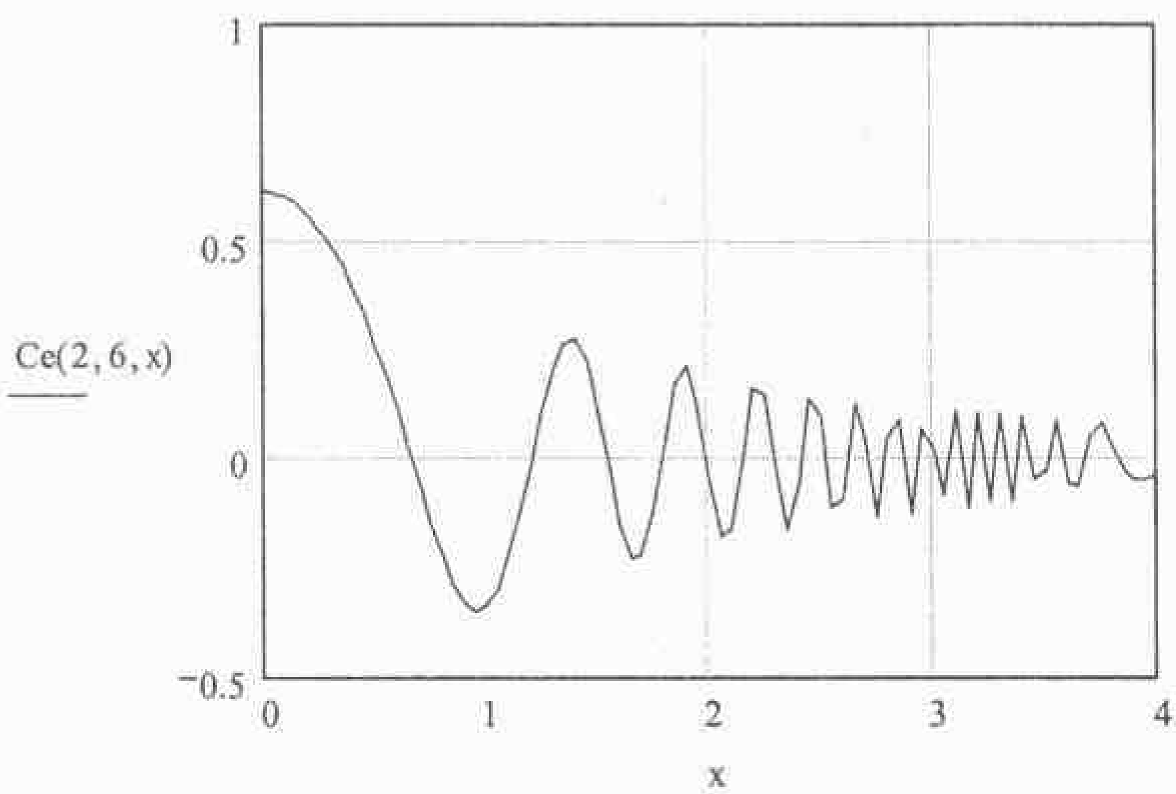
б

Рис. 2. Графики функций Матье: а – обыкновенных, б – модифицированных

MathieuCE(2,6,x,I)

а

$x := 0, 0.05 .. 4$



б

Рис. 3. Расчет модифицированной функции Матье с параметрами n=2, q=6

Решение, полученное с использованием функций Матье, встроенных в пакете Maple, расходится в точке x=3.7 (рис. 3а). Такие же расчеты в пакете MathCad, проведенные с помощью программ, представленных в данной статье, не имеют такой особенности (рис. 3 б).

Литература

1. Emile Mathieu, "Le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique," Jour. De Math. Pures et Appliquees (Jour. De Liouville) 13 (1898) 137.
2. J. C. Gutiérrez-Vega, S. Chávez-Cerda and R. M. Rodríguez-Dagnino, "Free oscillations in an elliptic membrane,"Rev. Mex. Fis., 45(6), pp. 613-622, Dec. 1999
3. MATLAB Softwave, Version 7, The Mathworks Inc.
4. M. Abramovitz and I. Stegun. Handbook of Mathematical functions (Dover USA,1965)
5. McLachlan N.W., Theory and application of Mathieu functions (Oxford Press, London, 1951)

MATHIEU FUNCTIONS IN MATHEMATICAL PROGRAM PACKAGES

S.V. Blazhevich, M.N.Beknazarov

Belgorod State University, Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, e-mail: Blazh@bsu.edu.ru

The Mathieu differential equations often appeared on the solution of science and technical problems. The elliptic membrane oscillation problem is the most known example. The solution of this problem is special functions called Mathieu functions. Despite a considerable amount of problems which lead to necessity of numerical computation of Mathieu functions, the realization of these functions in present-day mathematical program package is not satisfactory. In this work the ability of the modern mathematical program packages in calculating the Mathieu functions are considered and a program system is proposed for the Mathieu function calculation in the MathCad with using of the programming means of the package.

Key words: differential equalization of Mat'e, task about the vibrations of elliptic membrane, modified functions of Mat'e, numeral methods of calculation of functions of Mat'e, programmatic package of MathCad for the calculation of functions of Mat'e.