УДК 681.513.8

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЕКТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОУПРУГОСТИ

А.Г. Юрьев[1], С.В. Клюев[1]

1 – Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, e-mail: Klyuyev@yandex.ru

Предложена методика оптимального проектирования строительных конструкций, находящихся в температурном поле. В качестве примера рассмотрено проектирование толстостенного цилиндра.

Ключевые слова: термодинамическая теория необратимого процесса термоупругого деформирования, вариационные принципы изотермической теории упругости, методика оптимального проектирования строительных конструкций.

ВВЕДЕНИЕ

Решение проблемы проектирования рациональных несущих конструкций следует связывать с непосредственным использованием принципов, которым подчинено деформирование твердого тела. Если функционал прямой задачи имеет в качестве уравнений Эйлера – Лагранжа и естественных граничных условий уравнения и граничные условия принятой теории деформирования, то функционалу проектной задачи должны соответствовать, кроме того, дополнительные уравнения, свидетельствующие о зависимости изменения энергии системы от изменения конфигурации и модулей упругости материала тела.

Возможными вариациями функций конфигурации и модулей упругости материала тела будут бесконечно малые изменения функций, удовлетворяющие директивным требованиям к конструкции и материалу; они непрерывны и удовлетворяют требованиям дифференцируемости. Вследствие малости вариаций функций, определяющих конфигурацию, пренебрегаем изменениями в расположении внешних сил относительно отдельных частей тела и изменениями температурного поля.

Вариационные постановки проектных задач механики деформируемого твердого тела рассмотрены в работах [1, 2]. Практика проектирования конструкций, используемых в термических условиях, показывает, что насущной проблемой становится приведение в соответствие не только механических, но и термомеханических свойств массы тела и его пространственного устройства.

Становление вариационных принципов в термодинамике тесно связано с работами М. Био, который показал, что основные уравнения для необратимых систем могут быть получены из условия стационарности функционала энергии.

Термодинамическая теория необратимого процесса термоупругого деформирования основана на предположении о локальном равновесии, при котором мгновенные значения термодинамических функций являются однозначными функциями своих параметров. Основные уравнения классической термодинамики распространяются на локально равновесные макроскопические части термодинамической системы.

1. МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Обратимся к вариационным принципам изотермической теории упругости, предполагая, что тело в исходном состоянии находится под действием сил $\bar{p}_s$ на части поверхности S_1 и объемных сил $\vec{\rho}$ при температурном поле T. Обобщение принципа возможных перемещений сводится к замене удельной потенциальной энергии деформации удельной свободной энергией Гельмгольца $\overline{\Gamma}$, а обобщение принципа возможных изменений напряженного состояния – к замене удельной дополнительной энергии функцией, в некотором смысле аналогичной удельной свободной энергии Гиббса в термодинамике. В проектных задачах стационарность функционала по варьируемым параметрам рассматривается при дополнительных условиях в форме уравнений связи, накладываемых на искомые функции ψ, в числе которых – функции напряженно-деформированного термодинамического состояния, конфигурации, модулей упругости материала:

$$\varphi(\vec{\psi}) = 0, \ \int_{\omega} \tilde{\varphi}(\vec{\psi}) d\omega = c, \tag{1}$$

где ω – допустимая область интегрирования с учетом директивных требований к конструкции; c – заданная постоянная.

Условия отражают геометрические и конструктивные ограничения, а также ограничения на поведение системы.

Вариационная задача с дополнительными условиями приводится к свободной задаче с помощью метода множителей Лагранжа, а ее функционал выражает некоторую обобщенную энергию тела. Дифференциальные уравнения Эйлера – Лагранжа, вытекающие из стационарности функционала, есть необходимое и достаточное условие для допустимых функций допустимого тела быть условными экстремалями.

Для равновесных систем функционал проектной задачи формообразования, построенный на основе функционала принципа возможных перемещений, включает удельную свободную энергию Гельмгольца $\bar{\Gamma}$, которая в данном случае связана с процессом термоупругого деформирования и функциями конфигурации $\vec{\psi}_k$:

$$I = \int_V \left\{ \bar{\Gamma}[\bar{\varepsilon}(\vec{q}, T), \vec{\psi}_k] - \vec{q}^T \vec{\rho} \right\} dV - \int_{S_1} \vec{q}^T \vec{p}_S dS + \int_V \vec{\lambda}^T \vec{\varphi} dV, \tag{2}$$

где $\vec{q}$ – перемещения, $\bar{\varepsilon}$ – деформации, V – объем тела, $\vec{\lambda}$ – множители Лагранжа.

Расширение функционального пространства за счет функций, описывающих конфигурацию тела, приводит к вариационной задаче с переменными областями интегрирования. Вывод выражений для вариаций функционалов, имеющих вид интегралов, распространенных на переменные площадь и объем, приведен в работе.

Следствием стационарности функционала являются уравнения равновесия в объеме тела и на части поверхности S_1, уравнения связи и специфические уравнения проектной задачи. Последние две группы уравнений и отличают проектную задачу от прямой.

При варьировании конфигурации системы и перемещений имеем:

$$\delta I = \int_V \delta\left(\bar{\Gamma} - \vec{q}^T \vec{\rho} + \vec{\lambda}\vec{\varphi}\right) dV - \int_{S_1} \delta\left(\vec{q}^T \vec{p}_S\right) dS +$$

$$+ \int_{S_1} \left[\bar{\Gamma}_S - \vec{q}^T \vec{\rho} + \vec{\lambda}^T \vec{\varphi} - \frac{\partial}{\partial m}\left(\vec{q}^T \vec{p}_S\right) + 2H\left(\vec{q}^T \vec{p}_S\right) \right] \delta m dS = 0, \tag{3}$$

где $\bar{\Gamma}_S$ – удельная свободная энергия Гельмгольца в точках поверхности тела, $H\left(\vec{\psi}_k\right)$ – средняя кривизна поверхности; $m\left(\vec{\psi}_k\right)$ – функция модуля нормали. Из третьего интеграла вытекает специфическое уравнение задачи формообразования:

$$\bar{\Gamma}_S - \vec{q}^T \vec{\rho} + \vec{\lambda}^T \vec{\varphi} - \frac{\partial}{\partial m}\left(\vec{q}^T \vec{p}_s\right) + 2H\left(\vec{q}^T \vec{p}_s\right) = 0, \quad \in S_1. \tag{4}$$

Это уравнение баланса энергии на части поверхности S_1.

Специфические уравнения задачи подбора материала при варьировании функций модулей упругости материала ψ_{m_i} имеют вид

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \psi_{m_i}} + \vec{\lambda}^T \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \psi_{m_i}} = 0, \quad \psi_{m_i} \in \vec{\psi}_m. \tag{5}$$

Таким образом, критерии рациональности конструкций, обычно предлагаемые априори, при вариационной постановке проектных задач идентифицируются с уравнениями структурообразования [3]. При решении проектной задачи методом последовательных приближений (с использованием алгоритма решения прямой задачи) они контролируют его сходимость. Критерии иного рода правомерно использовать лишь при доказательстве их сопряженности с закономерностями структурообразования.

Проектная задача решается с использованием вычислительных комплексов, созданных для расчетов конструкций и программ, управляющих итерационным процессом и анализом чувствительности.

2. ПРИМЕР ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Рассмотрим проектную задачу для полого толстостенного цилиндра. При решении проектных задач стационарность функционала по варьируемым параметрам рассматривается при дополнительных условиях в форме уравнений связи, накладываемых на искомые функции, в числе которых – функции напряженно-деформированного состояния, конфигурации, модулей упругости материала.

Пусть внутренняя поверхность радиуса $r=a$ имеет постоянную температуру $T=T_1$, а внешняя поверхность радиуса $r=b$ имеет температуру $T=0$. В такого рода цилиндре возникает стационарное осесимметричное температурное поле $T(r)$. Используем цилиндрическую систему координат $r\theta z$.

Приняв за основу формулы радиальных (σ_r) и тангенциальных (σ_θ) напряжений от воздействия температуры и условных компенсационных нагрузок на поверхностях цилиндра, выводим:

$$\sigma_r = -4GK\left(\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}} - \frac{\frac{b^2}{r^2}-1}{\frac{b^2}{a^2}-1}\right), \tag{6}$$

$$\sigma_\theta = -4GK\left(\frac{\ln\frac{b}{r}-1}{\ln\frac{b}{a}} + \frac{\frac{b^2}{r^2}+1}{\frac{b^2}{a^2}-1}\right), \tag{7}$$

где G – модуль сдвига, K – модуль объемной деформации.

Нормальные напряжения σ_z находим по формуле

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E\alpha_t T, \tag{8}$$

где E – модуль продольной упругости, ν – коэффициент Пуассона, α_t – коэффициент расширения, который после подстановки принимает вид:

$$\sigma_z = -4GK\left(\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}} + \frac{2\nu}{\frac{b^2}{a^2}-1} - \frac{\nu}{\ln\frac{b}{a}}\right). \tag{9}$$

Далее будем считать, что модуль E, коэффициенты ν и α_t – величины постоянные, не зависящие от температуры и радиуса.

Среднее нормальное напряжение равно

$$\sigma = -\frac{4}{3}GK\left(4\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}} - \frac{1+\nu}{\ln\frac{b}{a}} + \frac{2(1+\nu)}{\frac{b^2}{a^2}-1}\right). \tag{10}$$

Используем вариационный принцип Кастильяно и решим проектную задачу при условии:

$$\pi\left(b^2 - a^2\right) = S_0, \tag{11}$$

где S_0 – заданная площадь сечения полого цилиндра.

Рациональному сечению соответствует стационарное значение функционала, записанного без учета объемных сил

$$I = 3\alpha_t \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b T\sigma r dr + \lambda\left[\pi\left(b^2 - a^2\right) - S_0\right], \tag{12}$$

где λ – множитель Лагранжа.

После подстановки σ и интегрирования получаем

$$I = -8\pi\alpha_t \frac{GKT_1}{\ln\frac{b}{a}}\left\{\frac{4}{\ln\frac{b}{a}}\left[\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)\ln b - 2\ln b\left(\frac{\ln b}{2} - \frac{1}{4}\right)b^2 + \right.\right.$$

$$+ 2\ln b\left(\frac{\ln a}{2} - \frac{1}{4}\right)a^2 + \frac{b^2(\ln b)^2}{2} - \frac{a^2(\ln a)^2}{2} - \left(\frac{\ln b}{2} - \frac{1}{4}\right)b^2 +$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\ln a}{2} - \frac{1}{4}\right)a^2\right]\right\} + \lambda\left[\pi\left(b^2 - a^2\right) - S_0\right]. \tag{13}$$

Из условий

$$\frac{\partial I}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial \lambda} = 0 \tag{14}$$

получаем нелинейную систему уравнений с неизвестными a, b, λ, которая решается с помощью ЭВМ.

Рассмотрим числовой пример. Найдем значения a и b, при котором функционал принимает стационарное значение, если E=2·10^4 МПа; ν=0,2; α_t=8,74·10^{-6} °С$^{-1}$; T_1=100°С; S=0,7 м^2.

Из решения системы уравнений, в основу которых были положены условия (14), получаем a=0,657 м, b= 0,809 м.

Вычисляем возникающие в сечении цилиндра напряжения и строим их эпюры (рис. 1).

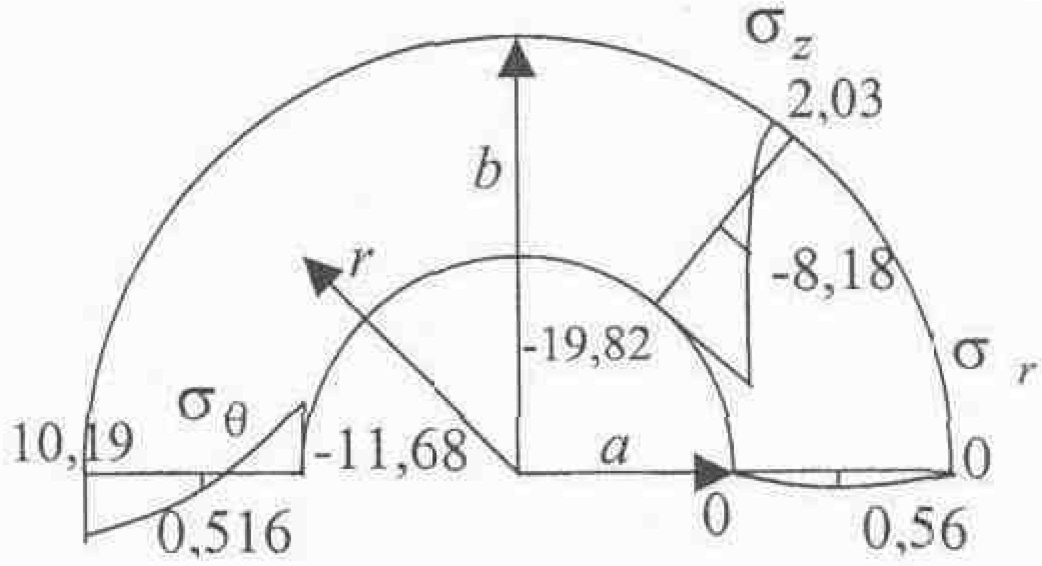

Рис. 1. Напряжения в сечении цилиндра, МПа

Уровень напряжений в рассмотренном примере определяет класс бетона и при необходимости способ и степень его армирования или предварительного напряжения.

Предложенное решение проектной задачи пригодно и для полого цилиндра из полимера, который может явиться элементом конструкции, находящейся в агрессивной среде, когда использование бетона может оказаться нецелесообразным.

Решение проектной задачи при условии ползучести материала будет носить итерационный характер. Шаговая процедура во времени имеет скорость сходимости, зависящую от характера кривой ползучести.

ВЫВОДЫ

1. Проблема оптимизации конструкций, находящихся в температурном поле, эффективно решается с привлечением вариационных принципов термоупругости.
2. Критерий оптимальности конструкций идентифицируется с уравнениями структурообразования, вытекающими из условия стационарности функционала проектной задачи.

Литература

1. Юрьев А.Г. Вариационные постановки задач структурного синтеза в статике сооружений / А.Г. Юрьев. – М.: МИСИ, 1987. – 94 с.
2. Юрьев А.Г. Основы проектирования рациональных несущих конструкций / А.Г. Юрьев. – Белгород: Изд-во БТИСМ, 1988. – 94 с.
3. Юрьев А.Г. Энергетический критерий структурообразования несущих конструкций / А.Г. Юрьев, С.В. Клюев // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2006. – № 2. – С. 90 – 91.

THE MANAGEMENT BY DESIGN PARAMETERS IN THE THERMOELASTICITY PROBLEMS

A.G. Yuriev[1], S.V. Klyuyev[1]

[1]The Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov
E-mail: Klyuyev@yandex.ru

The optimal designing method of building structures existing in temperature field are presented. The design of thick-walled cylinder is considered as an example.

Keywords: thermodynamics theory of irreversible process of thermostate deformation, variation principles of isothermal theory of resiliency, method of the optimum planning of build constructions.