Академия наук Украины
Ордена Трудового Красного Знамени Институт математики

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Сборник научных трудов

Киев
Институт математики АН Украины
1991

ISBN 5-7702-0156-8. Асимптотические решения нелинейных уравнений с малым параметром. Киев, 1991.

УДК 517.91/93

В.М. МОСКОВКИН, И.Т. СЕЛЕЗОВ

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭКОЛОГИИ БЕРЕГОВОЙ ЗОНЫ

Проводится качественный анализ динамической системы второго порядка, описывающей динамику береговой зоны. Показано, что в случае задания двух нелинейных эмпирических функций в соответствии с реальными процессами в такой системе не могут возникать бифуркации рождения цикла.

Рассматривается динамическая система второго порядка, описывающая эволюцию береговой зоны, обусловленную взаимодействием волн с размываемым дном и берегом

$$\frac{dw}{dt}=\frac{aH}{2}\left[f(w)+\frac{H}{\tau\sin\varphi\cos\varphi}\right]-\tilde{\varphi}(w)+u,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{f(w)}{H}\sin^2\varphi-\frac{1}{\tau}\operatorname{tg}\varphi.$$

Система (I) следует как вырожденная из более общей системы третьего порядка [I]. Она описывает переформирование донной поверхности, непосредственно примыкающей к берегу, и может рассматриваться как упрощенная модель относительно интегральных (осредненных) величин [2]. Анализ на основе локальных моделей, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, в настоящее время не представляется возможным.

В системе (I) первое уравнение представляет собой уравнение баланса пляжеобразующего материала (w - объем материала) в условиях изменяющейся крутизны прямолинейного клифа, второе уравнение описывает изменение угла наклона клифа φ, т.е. его отступание с поворотом вокруг основания за счет процессов абразии и денудации (выполаживания). Функция $f(w)$ характеризует скорость отступления основания клифа, $\tilde{\varphi}(w)$ - интенсивность истирания пляжеобразующего материала при волновом воздействии.

В случае линейных функций $f(w)=\gamma(w_m-w)$, $\tilde{\varphi}(w)=kw$ [3] после перехода к безразмерным величинам $w'=w/w_m$, $t'=kt$ динамическая система (1) примет вид

$$\frac{dw'}{dt'}=-k_1w'+k_2\frac{1}{\sin 2\varphi}+k_3,$$

$$\frac{d\varphi}{dt'}=k_4(1-w')\sin^2\varphi-k_5\operatorname{tg}\varphi, \tag{2}$$

где $k_1=1+\frac{aH\gamma}{2k}$, $k_2=\frac{aH^2}{\tau k w_m}$, $k_3=\frac{u}{kw_m}+\frac{aH\gamma}{2k}$, $k_4=\frac{\gamma w_m}{kH}$,

$k_5=\frac{1}{k\tau}$.

Отметим, что при определении особых точек при подстановке $\sin 2\varphi=\frac{2H}{\tau f(w)}$ (условие $\frac{d\varphi}{dt}=0$) в первое уравнение системы (I) получим обычное уравнение баланса пляжеобразующего материала

$$\frac{dw}{dt}=aHf(w)-\tilde{\varphi}(w)+u \quad [3,4].$$

Итак, особые точки системы (2) определяются формулами

$$w_* = \frac{2k_5k_3 + k_2k_4}{2k_5k_1 + k_2k_4}, \quad \sin 2\varphi_* = \frac{2k_5}{k_4(1-w_*^{!})} \geq 0. \tag{3}$$

Матрица линеаризованной системы (2) примет вид.

$$A = \begin{vmatrix} -k_1 & -2k_2\dfrac{\cos 2\varphi_*}{\sin^2 2\varphi_*} \\ -k_4\sin^2\varphi_* & 2k_5 - \dfrac{k_5}{\cos^2\varphi_*} \end{vmatrix}.$$

След и детерминант этой матрицы имеют вид

$$\mathrm{tr}\, A = 2k_5 - k_1 - \frac{k_5}{\cos^2\varphi_*},$$

$$\det A = \frac{k_1k_5}{\cos^2\varphi_*} - 2k_1k_5 - \frac{1}{2}k_2k_4(1-\mathrm{tg}^2\varphi_*).$$

Из выражений (3) получим

$$(\varphi_*)_1 = \frac{1}{2}\arcsin\lambda, \quad (\varphi_*)_2 = \frac{\pi}{2} - (\varphi_*)_1, \tag{4}$$

$$0 < \sin 2\varphi_* = \frac{2k_5k_1 + k_2k_4}{k_4(k_1-k_3)} = \lambda \leq 1, \quad k_1 > k_3. \tag{5}$$

Из выражения (5) получим

$$\cos 2\varphi_* = \sqrt{1-\lambda^2}, \quad \cos^2\varphi_* = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\lambda^2}\right), \quad \mathrm{tg}^2\varphi_* = \left(\frac{\lambda}{1\pm\sqrt{1-\lambda^2}}\right)^2.$$

Откуда

$$\mathrm{tr}\, A = 2k_5 - k_1 - \frac{2k_5}{(1\pm\sqrt{1-\lambda^2})}, \tag{6}$$

$$\det A = -k_1^2 - k_2k_4\left(\frac{1-\lambda^2 \pm \sqrt{1-\lambda^2}}{2-\lambda^2 \pm 2\sqrt{1-\lambda^2}}\right). \tag{7}$$

Бифуркация седлового типа возникает при $\det A = 0$ [5]. При выборе знака плюс в выражении (7) $\det A < 0$ при любых параметрах. При выборе знака минус выражение в круглых скобках отрицательное и, следовательно, может быть определено бифуркационное множество седлового типа (граница седел)

$$k_1^2 + k_2k_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Условие $\mathrm{tr}\, A = 0$ приводится к виду

$$\frac{k_5}{2k_5 - k_1} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\lambda^2}\right);$$

при этом

$$\det A = -k_1^2 - \frac{1}{2}k_2k_4\left[1 - \left(\frac{\lambda(2k_5-k_1)}{2k_5}\right)^2\right] < 0,$$

что свидетельствует о невозможности возникновения бифуркации Хопфа [5], так как $\lambda \leq 1$.

Рассмотрим нелинейные функции $f(w)$, $\varphi(w)$ [3]

$$f(w)=\frac{B(w+\xi)}{(w+\tau)^2}, \quad \tilde{\varphi}(w)=\frac{cw}{w+\gamma_1}, \tag{8}$$

тогда

$$\sin 2\varphi_* = \frac{2H(w_*+\tau)^2}{B(w_*+\xi)}, \tag{9}$$

$$\operatorname{tr} A = \frac{1}{\tau}\left(2-\frac{1}{\cos^2\varphi_*}\right)+\frac{aHB(\tau-2\xi-w_*)}{2(w_*+\tau)^3}-\frac{c\gamma_1}{(w_*+\gamma_1)^2}, \tag{10}$$

$$\det A = \frac{1}{\tau}\left(2-\frac{1}{\cos^2\varphi_*}\right)\left[\frac{aHB}{2}\,\frac{(\tau-2\xi-w_*)}{(w_*+\tau)^3}-\frac{c\gamma_1}{(w_*+\gamma_1)^2}\right]+ \tag{11}$$

$$+\frac{aHB}{\tau}\,\frac{\cos 2\varphi_*}{2\cos^2\varphi_*}\,\frac{(\tau-2\xi-w_*)}{(w_*+\tau)^3}.$$

При $\operatorname{tr} A = 0$ имеем

$$\det A = -\left[\frac{aHB}{2}\,\frac{(\tau-2\xi-w_*)}{(w_*+\tau)^3}-\frac{c\gamma_1}{w_*+\gamma}\right]^2+\frac{aHB\cos 2\varphi_*}{\tau\, 2\cos^2\varphi_*}\,\frac{(\tau-2\xi-w_*)}{(w_*+\tau)^3}. \tag{12}$$

Рассмотрим возможность возникновения в системе бифуркации Хопфа, когда $\operatorname{tr} A = 0$. В случае $w_* > \tau - 2\xi$ ($w = \tau - 2\xi$ – точка максимума функции $f(w)$ (8)) из выражения (10) при $\operatorname{tr} A = 0$ получим $\cos^2\varphi_* \geq \frac{1}{2}$ ($0 \leq \varphi_* \leq \frac{\pi}{4}$), откуда $\cos 2\varphi_* > 0$, тогда из выражения (12) следует, что $\det A < 0$ и бифуркация Хопфа отсутствует.

В случае $w_* < \tau - 2\xi$ имеем $0 \leq \cos^2\varphi_* \leq \frac{1}{2}$, откуда $\cos 2\varphi_* < 0$ и снова приходим к отрицательному детерминанту. Следовательно, в динамической системе (1) при нелинейных функциях (8) не возникают бифуркации рождения цикла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Московкин В.М., Есин Н.В., Дмитриев В.А. К теории управления процессами берего- и шельфоформирования//Тез.докл. Междунар. симпоз. "Инженерная геология шельфа и континентального склона морей и океанов мира", Тбилиси,1988.-Тбилиси,1988.-С.164-166.

2. Selezov I.T. Wave hydraulic models as mathematical approximations// Proc.22 Congress IAHR:Lausanne. 1987. Techn. Session B.-1987.- P. 301-306.

3. Московкин В.М., Есин Н.В. Оптимальное управление абразионным процессом//Докл.АН СССР.-1989.-284,№ 3.-С.731-734.

4. Есин Н.В., Московкин В.М., Дмитриев В.А. К теории управления абразионным процессом// Природные основы берегозащиты.-М.: Наука,1987.-С.5-17.

5. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний.-М.:Наука,1987.-384 с.