УДК 530.145

ОПИСАНИЕ ФОТОНА В РАСШИРЕННОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г.К. Хомяков
г. Харьков, ННЦ "Харьковский физико-технический институт"

Рассмотрена возможность описания движения фотона в рамках квантовой механики с расширенным фазовым пространством. Используется формализм, предложенный ранее для описания движения нерелятивистской и релятивистской частиц со спином ноль. Показано, что при введении "квантового импульса" и использовании правила квантования, согласованного с правилом квантования Бора-Зоммерфельда, возможно получение эквидистантного спектра энергий $E_n=h\nu n$, согласно закона излучения Планка энергия нулевых колебаний поля равна нулю.

1. Введение. При каноническом квантовании поле рассматривается как механическая система с бесконечным числом степеней свободы. Это позволяет применять к квантованию поля методы, известные из механики частиц, если только перейти к соответствующим переменным. Так, для случая свободного электромагнитного поля при каноническом квантовании поле представляется как совокупность бесконечного, но счетного числа независимых одномерных осцилляторов [1], к которым и применяются правила квантования.

В формализме квантовой механики с расширенным фазовым пространством [2, 3] предполагается, что динамика частицы описывается в рамках классической механики, например, с помощью уравнения Гамильтона-Якоби. В случае свободного электромагнитного поля гамильтонианы осцилляторов не зависят явно от времени, поэтому достаточно использовать для описания динамики уравнение для характеристической функции Гамильтона W:

$$H(r,\nabla W)=E\,, \tag{1.1}$$

где

$$p=\nabla W \tag{1.2}$$

есть кинетический импульс частицы, а E – ее энергия [4].

Условия квантования в рассматриваемом формализме механики вводятся с помощью некоторой переменной квантования Z, которая удовлетворяет тензорной системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$(\hbar^2\nabla\nabla+pp)\cdot Z=0\,, \tag{1.3}$$

где pp – диада, образованная с помощью (1.2), $\hbar$ – постоянная Планка.

Вид системы уравнений (1.3) для переменной квантования Z выбирается таким образом, чтобы он удовлетворял необходимым требованиям инвариантности, которые принадлежат к числу наиболее общих и глубоких физических законов, выражающих основные свойства пространства и времени, движения частиц и их взаимодействий. Поскольку сейчас рассматривается нерелятивистский случай, система уравнений (1.3) должна обладать необходимыми трансформационными свойствами, которые диктуются такими свойствами пространства, как однородность и изотропность (инвариантность относительно смещений и вращений). Выполнение последнего требования обеспечивается тем, что операторы в (1.3) являются афинными ортогональными тензорами, а Z-функция – скаляром.

Важнейшим свойством системы уравнений (1.3) является ее однозначная совместимость со стационарным уравнением Шредингера. Действительно, в одномерном случае, когда

$$E = p^2 / 2m + V(x),$$

уравнение (1.3) есть просто одномерное уравнение Шредингера.

В трехмерном случае Sp (след) уравнение (1.3) дает для одной частицы

$$(\hbar^2 \Delta + p^2) \cdot Z = 0,$$

где – Δ лапласиан. Если считать, что

$$E = p^2 / 2m + V(r),$$

получаем для функции Z трехмерное стационарное уравнение Шредингера:

$$\left(-\hbar^2 \cdot \frac{\Delta}{2m} + V \right) \cdot Z = E \cdot Z. \qquad (1.4)$$

Выбор уравнений для переменной квантования Z в виде системы (1.3), для которой уравнение Шредингера является афинным инвариантом, позволяет в данной модификации формулировки квантовой механики сохранить шредингеровские собственные значения энергии. Естественным является требование, чтобы для стационарных состояний функция Z удовлетворяла таким-же граничным условиям конечности, непрерывности и однозначности, каким удовлетворяет Шредингеровская волновая функция.

Система уравнений (1.1), (1.2), (1.3) это система уравнений в частных производных. С этой системой можно связать систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, уравнение Гамильтона для укороченного действия известным образом связано с системой уравнений Гамильтона. Для случая одной частицы [4]:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}; \quad \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial H}{\partial r}. \qquad (1.6)$$

Для получения уравнения квантования для гамильтоновой системы (1.6), соответствующего уравнению (1.3) для переменной квантования Z, введем вектор-переменную квантования

$$P = -i\hbar \nabla Z / Z, \qquad (1.7)$$

для которой из (1.3) следует

$$\frac{dP}{dr} = \frac{i}{\hbar} \cdot [pp - PP], \qquad (1.8)$$

где pp и PP – диады на p и P соответственно.

Действительно, взяв компоненты (1.7), продифференциировав их по компонетам **r** и исключив Z, получим (1.8).

При движении частицы по траектории, определяемой (1.6), вектор P изменяется во времени в соответствии с

$$\frac{dP}{dt} = \frac{i}{\hbar} \cdot [pp - PP] \cdot V, \qquad (1.9)$$

где v=dr/dt .

Таким образом, описание движения одной частицы во времени дается уравнениями (1.6) и (1.9) . Математически вектор P – "квантовый импульс" – при этом является равноправной с r и P динамической переменной. На него накладываются условия, приводящие к отбору действительных орбит из всей совокупности возможных классических орбит. Задание r, p и P в некоторый момент времени полностью определяет некоторое бездисперсионное квантово-механическое состояние.

В рамках квантовой механики Гейзенберга-Шредингера (КМГШ) знание вектора состояния накладывает только статистические ограничения на результаты измерений. В предложенном формализме эти статистические элементы КМГШ возникают почти также, как в классической статистической механике, т.е. как средние на лучше определенных состояниях [5], стр. 700. Эти бездисперсионные состояния содержат информацию не только о векторе квантово-механического состояния КМГШ, но также дополнительные переменные. Обозначим через γ совокупность дополнительных переменных, которые совместно с параметрами, фиксирующими вектор состояния в рамках КМГШ, полностью определяют состояние индивидуальной частицы. В силу однородности уравнений (1.3) и (1.4), волновая функция уравнения Шредингера может быть представлена через Z(r, γ) и некоторую амплитуду распределения ρ(r):

$$\psi = \int \rho(\gamma) \cdot Z(r,\gamma) \cdot d\gamma. \qquad (1.15)$$

Поэтому в предлагаемом формализме шредингеровская волновая функция Ψ(r) описывает ансамбль частиц.

Рассмотрение, аналогичное приведенному для нерелятивистской частицы, может быть проведено и для движения релятивистской частицы, детерминистское движение которой также может быть параметризовано тремя релятивистскими векторами положения, импульса и "квантового импульса" [3]. Поэтому представляет интерес исследовать возможность описания фотона в этой же системе параметров.

2. Квантование свободного поля излучения. Классическая электродинамика справедлива в тех областях, где можно пренебречь всеми эффектами, связанными с конечностью планковского кванта действия h. Исторически необходимость отхода от классической теории выяснилась при построении теории излучения. Планк (а позднее Эйнштейн) допустил, что энергия монохроматической волны с частотой ν может принимать лишь значения, которые являются целыми кратными некоторой пропорциональной частоте величины

$$E_n = h\nu n, \qquad (2.1)$$

где n – целое число, h – универсальная постоянная Планка.

Это правило квантования элекромагнитного поля вместе с законом сохранения энергии приводит к условию частот Бора. В соответствии с (2.1), пучок света состоит из некоторого числа частиц-фотонов, сохраняющих в то же время классические волновые свойства. Проблема состоит, таким образом, в том, чтобы в рамках рассматриваемого формализма придать волнам Максвелла некоторые свойства частиц.

Наиболее просто квантование свободного поля излучения с применением "квантового импульса" может быть проведено методом, аналогичным каноническому квантованию поля. В кулоновской калибровке, как известно [1], скалярный потенциал свободного электромагнитного поля φ=0, а для векторного потенциала и напряженностей полей имеем уравнения

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\cdot \ddot{A} = 0, \qquad (2.2)$$

$$divA = 0; \qquad (2.3)$$

$$E = -\frac{1}{c}\cdot \dot{A}; \quad \mathrm{H} = \mathrm{rotA}.$$

Заключим поле в куб с ребром L достаточно больших размеров и повторим этот куб так, чтобы A было периодично на его поверхности вместе со своими производными. Тогда A может описывать как стоячие, так и бегущие волны, и любое решение (2.2) можно представить в виде ряда

$$A(r,t) = \sum_i q_i(t)\cdot A_i(r),$$

каждый член которого удовлетворяет уравнениям

$$\Delta A_i(r) + \frac{\omega_i^2}{c^2}\cdot A_i(r) = 0; \qquad (2.4)$$

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2\cdot q_i(t) = 0, \qquad (2.5)$$

а постоянные разделения ω_i выбраны так, чтобы q_i были периодическими функциями времени. Уравнение (2.4) удовлетворяется функциями типа

$$A_i(r) = \sqrt{8\pi c^2}\cdot e_j\cdot \sin(k_i\cdot r);$$

$$A_i(r) = \sqrt{8\pi c^2}\cdot e_j\cdot \cos(k_i\cdot r),$$

образующими полную ортонормированную систему, или их любыми линейными комбинациями. Здесь e_j – единичный вектор поляризации, j может принимать значения j=1,2. Условие (2.3) приводит к поперечности волны:

$$(e_j\cdot k) = 0.$$

По условию периодичности k_i принимает только ряд дискретных значений:

$$k_{ix} = 2\pi\frac{n_1}{L}; \quad \mathrm{k}_{iy} = 2\pi\frac{n_2}{L}; \quad \mathrm{k}_{iz} = 2\pi\frac{n_3}{L},$$

где n_1, n_2, n_3 – целые положительные числа. При этом $\omega_i = c\cdot|k_i|$. Для полного задания поля нужно задать еще амплитуды $q_i(t)$, которые удовлетворяют уравнению осциллятора (2.5). Последнее записывается в гамильтоновой форме

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_i}{\partial p_i} = P_i; \qquad (2.6)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H_i}{\partial q_i} = -\omega_i^2 q_i; \qquad (2.7)$$

$$H_i = \frac{1}{2}\cdot(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2), \qquad (2.8)$$

что эквивалентно (2.5).

При выбранной нормировке A_i энергия

поля в нормировочном кубе

$$E=\int\frac{(E^2+H^2)\cdot dv}{8\pi}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j}(p_i^2+\omega_i^2 q_i^2),$$

т.е. энергия поля равна сумме энергий независимо движущихся осцилляторов. Далее в рамках канонического квантования предполагается, что импульсам и координатам p_i и q_i осцилляторов (2.6, 2.7, 2.8) соответствуют постулируемые в нерелятивистской квантовой механике операторы. В результате для возможных энергий получается известная задача на собственные значения с $E_n=h\nu(n+1/2)$, содержащим энергию нулевых колебаний.

В области, описываемой уравнением Шредингера, энергия нулевых колебаний играет существенную роль и является экспериментально наблюдаемой величиной. Однако в полях элементарных частиц до сих пор ее не удалось связать с наблюдаемыми эффектами. Из-за бесконечного количества степеней свободы поля как механической системы энергия нулевых колебаний стремится к бесконечности. Релятивистская инвариантность, наоборот, требует, чтобы она была равной нулю, поскольку состояние без частиц должно выглядеть одинаково для наблюдателей в различных лоренцевых системах отсчета, а существование неисчезающего вектора энергии-импульса нарушает это свойство [6]. Возникающую трудность устраняют переопределением оператора энергии. Однако такое переопределение Гамильтониана с вычитанием бесконечной энергии нулевых колебаний не кажется достаточно корректным. Поэтому в рассматриваемом формализме для квантования движения осцилляторов электромагнитного поля 1) применяется правило, аналогичное правилу Бора-Зоммерфельда [7], и 2) вводится " квантовый импульс", являющийся дополнительной переменной для фотона. Для этого, чтобы удовлетворить обоим этим требованиям к уравнениям (2.6, 2.7, 2.8) для канонически сопряженной пары координата-импульс добавляется

$$\frac{d\Pi_i}{dq_i}=\frac{i}{\hbar}\cdot\Pi_i p_i \qquad (2.10)$$

уравнение для "квантового импульса" Пi, которое является аналогом (1.8).

При наложении на решение

$$\Pi_i=\Pi_{i0}\cdot Exp(\frac{i}{\hbar}\cdot\oint p_i dq_i)$$

естественного требования совпадения периодов p_i , q_i и Π_i получаем условие Бора-Зоммерфельда, а для амплитуд поля –

$$q_i=A_i\cdot\cos\omega_i t+B_i\cdot\sin\omega_i t$$

соотношение

$$A_i^2+B_i^2=\frac{2n\hbar}{\omega_i},$$

которое определяет уровни энергии

$$E_{i,n}=\hbar\omega_1 n,\quad n=0,1,2...$$

Таким образом, нулевые колебания электромагнитного поля в данном формализме существуют, однако их энергия равна нулю для каждой моды.

Заключение. Показана возможность описания движения фотона в Ньютоновском пространстве–времени. Введение "квантового импульса" и подходящего простого уравнения для него позволяет получить эквидистантные энергетические состояния, требующиеся для согласования с законом излучения Планка.

В целом, в формализме [2, 3] с расширенным фазовым пространством преодолевается некоторая односторонность, как классического, так и квантового подходов. Первый сориентирован преимущественно на описание явлений, когда состояние равновесия нарушено, но он слабо приспособлен для решения проблем структуры. Во втором случае вопрос о ходе явлений практически выпадает из поля зрения, поскольку не находит своего подходящего выражения в формализме теории (появляются "квантовые скачки"). Предложенный формализм с "квантовым импульсом" в расширенном фазовом пространстве позволяет описывать в рамках механики как протекание процессов, так и подходит для описания структуры.

Принцип причинности в предложенном формализме имеет форму, близкую к принципу причинности классической механики, что математически выражается в том, что физические величины удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка, а знание состояния (r, p, P) в любой заданный момент времени однозначно определяет будущее (и прошлое) системы.

Благодарности. Автор благодарен проф. Шульге Н.Ф. за обсуждение полученных результатов.

Библиографический список

1. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. Изд.3. –М.: ИИЛ, 1956.– 491с.

2. Хомяков Г.К. Неканоническая формулировка квантовой механики на базе расширения шредингеровского описания движения: Научные ведомости БелГУ №1(10)2000, Сер. физика.– 2000.– С.130-133.

3. Хомяков Г.К. Неканоническая формулировка квантовой механики (релятивистская частица с нулевым спином): Научные ведомости БелГУ №1(10)2000, Сер. физика.– 2000.– С.140-141.

4. Гольдстейн Г. Классическая механика. Изд. 2.– М.: Наука, 1975. –415с.

5. Бом Д. Квантовая теория.М. ГИФМЛ. 1961. –728с.

6. Тирринг В. Принципы квантовой электродинамики.– М.: Высшая школа, 1964.

7. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. М.: ГТТЛ, 1956. – Т.1. –592с.

УДК 517 ББК 22.161 К 18

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Н.В. Камышанченко, Н.А. Чеканов, К. Эльхажжаб
Белгород, Белгородский государственный университет

В работе изложен метод приближенного решения одномерного уравнения Шредингера

$$\hat{H}\psi(q) = E\psi(q) \qquad (1)$$

на основе метода нормальных форм [1-8]. Для иллюстрации и сравнения наших результатов с известыми из литературы выбран частный вид гамильтониана

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{q^2}{2} + \alpha q^4, \qquad (2)$$

где α – параметр.

Для решения дифференциального уравнения (1), (2) вводим вспомогательную функцию, которая рассматривается как классический гамильтониан

$$H(q,p) = H^{(2)} + H^{(4)},$$
$$H^{(2)} = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right), \qquad (3)$$
$$H^{(4)} = \alpha q^4,$$

где p и q канонически сопряженные импульс и координата, зависящие от времени.

Выполняя канонические преобразования $(q,p) \to (\xi,\eta)$ с производящей функцией

$$F(q,\eta) = q\eta + W(q,\eta), \qquad (4)$$

приводим классическую гамильтонову функцию (3) к нормальной форме $H(q,p) \to \Gamma(\xi,\eta)$ в виде суммы однородных полиномов по переменным (ξ,η). Как известно [9,10], гамильтонова функция $\Gamma(\xi,\eta)$ имеет нормальную форму, если выполняется условие

$$D(\xi,\eta)\Gamma(\xi,\eta) = 0, \qquad (5)$$

где

$$D(\xi,\eta) = \eta\frac{\partial}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial}{\partial\eta}. \qquad (6)$$

Производящая функция (4) удовлетворяет уравнениям [10]

$$p = \eta + \frac{\partial W(q,\eta)}{\partial q},$$
$$\xi = q + \frac{\partial W(q,\eta)}{\partial \eta}, \qquad (7)$$

которые связывают старые (q,p) и новые переменные (ξ,η).

Гамильтоновая функция H(q,p), ее нормальная форма $\Gamma(\xi,\eta)$ и функция $W(q,\eta)$ представляются следующими суммами

$$H(q,p) = \sum_{s\ge 2} H^{(s)}(q,p),$$
$$H^{(s)}(q,p) = \sum_{l+m=s} h_{lm} q^l p^m, \qquad (8)$$
$$\Gamma(\xi,\eta) = \sum_{s\ge 2} \Gamma^{(s)}(\xi,\eta),$$