ВЛАДИМИР МОСКОВКИН

ХАРЬКОВ

УДК 330.42:519.86

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТНОШЕНИЙ МУТУАЛИЗМА И ПАРАЗИТИЗМА В ОБЩЕСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ

В работе [1], опубликованной в этом номере журнала, была предложена концептуальная ресурсно-информационная модель биолого-социальных систем. Ее суть состояла в выделении трех основных видов ресурсов — природных, материально-технических и интеллектуально-информационных, а также четырех видов популяций-индивидов: производящих материально-технические ресурсы, производящих интеллектуальные ресурсы (наука, культура, искусство и др.), производящих информационно-управляющие ресурсы (один из видов интеллектуально-информационных ресурсов) и паразитирующих на всех видах ресурсов и производящих человеческих популяциях. Высказано предположение, что борьба человеческих популяций и их индивидов за вышеуказанные ресурсы является одной из движущих сил в организации и развитии общества, при этом соотношение между запасами и видами этих ресурсов, находящихся в распоряжении у популяций-индивидов, и способы управления потоками ресурсов в обществе определяют структуру и тип общества [1].

Переведем данную концептуальную модель на язык дифференциальных уравнений популяционной динамики. Обозначив численности вышеуказанных видов человеческих популяций через $N_{мт}$ (индивиды, производящие материально-технические ресурсы), $N_{инт}$ (индивиды, производящие интеллектуальные ресурсы), $N_{упр}$ (индивиды, производящие информационно-управляющие ресурсы), $N_{пар}$ (индивиды, паразитирующие на всех видах ресурсов и производящих индивидумах) и используя обычные в популяционной динамике математические принципы записи попарных взаимодействий при мутуализме и паразитизме [2, 3], получим следующую динамическую систему четвертого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_{мт}}{dt} = -\alpha_1 N_{мт} + \beta_{12} N_{мт} N_{инт} + \beta_{13} N_{мт} N_{упр} - \beta_{14} N_{мт} N_{пар} \\ \dfrac{dN_{инт}}{dt} = -\alpha_2 N_{инт} + \beta_{21} N_{инт} N_{мт} + \beta_{23} N_{инт} N_{упр} - \beta_{24} N_{инт} N_{пар} \\ \dfrac{dN_{упр}}{dt} = -\alpha_3 N_{упр} + \beta_{31} N_{упр} N_{мт} + \beta_{32} N_{упр} N_{инт} - \beta_{34} N_{упр} N_{пар} \\ \dfrac{dN_{пар}}{dt} = -\alpha_4 N_{пар} + \beta_{14} N_{мт} N_{пар} + \beta_{24} N_{инт} N_{пар} + \beta_{34} N_{упр} N_{пар} \end{cases} \quad (1)$$

где α_{ij}, $\beta_{ij} > 0$.

В системе уравнений (1) отношения мутуализма означают, что производящие популяции стимулируют друг друга ($\beta_{ij} > 0$) и ни одна из них не может существовать без другой (знак «минус» перед α_i, $i = 1, 2, 3$), а отношения паразитизма означают, что при взаимодействии паразитирующей популяции с производящей первая угнетает вторую (знаки «минус» перед β_{14}, β_{24}, β_{34}) и сама паразитирующая популяция в отсутствие производящей вымирает (знак «минус» перед a_4). При этом предполагается, что прирост паразитирующей популяции обусловлен убылью производящих популяций, попавших под влияние первой. Такое влияние, на наш взгляд, может быть двух видов: 1) непрямое, косвенное влияние, обусловленное «демонстрационным эффектом» со стороны паразитирующей популяции; 2) прямое (непосредственное) влияние, обусловленное процессом всепроникающей коррупции.

Динамические системы такого типа в общем случае имеют $2^4 = 16$ особых точек: одна нулевая особая точка, четыре особые точки с тремя нулевыми координатами, шесть особых точек с двумя нулевыми координатами, четыре особые точки с одной нулевой координатой, одна ненулевая особая точка. Легко показать, что в нашем случае нулевая особая точка, в отличие от такой точки для уравнений популяционной динамики с логистическими членами [4], является устойчивым узлом. Таким образом, в условиях действия отношений мутуализма и паразитизма в общественной системе возможно устойчивое (равновесное) состояние ее полной деградации.

В системе (1) четыре особые точки с тремя нулевыми координатами вырождаются в нулевую особую точку. Из шести особых точек с двумя нулевыми координатами три имеют неотрицательные координаты:

$$N^*_{мт} = N^*_{пар} = 0,\ N^*_{инт} = \frac{\alpha_3}{\beta_{32}},\ N^*_{упр} = \frac{\alpha_2}{\beta_{23}};$$

$$N^*_{инт} = N^*_{пар} = 0,\ N^*_{мт} = \frac{\alpha_3}{\beta_{31}},\ N^*_{упр} = \frac{\alpha_1}{\beta_{13}};$$

$$N^*_{упр} = N^*_{пар} = 0,\ N^*_{мт} = \frac{\alpha_2}{\beta_{21}},\ N^*_{инт} = \frac{\alpha_1}{\beta_{12}}.$$

Наши тестовые расчеты при $\alpha_i = \alpha$, $\beta_{ij} = \beta$ показали, что эти особые точки являются седлами. Четыре особые точки с одной нулевой координатой находятся из решения систем линейных алгебраических уравнений третьего порядка, и их ненулевые координаты в зависимости от параметров модели могут быть как положительными, так и отрицательными. Наибольший интерес представляет ненулевая (нетривиальная) особая точка, координаты которой находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений четвертого порядка:

$$\begin{cases} \beta_{12} N_{инт} + \beta_{13} N_{упр} - \beta_{14} N_{пар} = \alpha_1 \\ \beta_{21} N_{мт} + \beta_{23} N_{упр} - \beta_{24} N_{пар} = \alpha_2 \\ \beta_{31} N_{мт} + \beta_{32} N_{инт} - \beta_{34} N_{пар} = \alpha_3 \\ \beta_{14} N_{мт} + \beta_{24} N_{инт} + \beta_{34} N_{упр} = \alpha_4. \end{cases} \quad (2)$$

Матрица Якоби для системы уравнений (1) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \beta_{12} N^*_{инт} + \beta_{13} N^*_{упр} - \beta_{14} N^*_{пар} & \beta_{12} N^*_{мт} & \beta_{13} N^*_{мт} & -\beta_{12} N^*_{мт} \\ \beta_{21} N^*_{инт} & -\alpha_2 + \beta_{21} N^*_{мт} + \beta_{23} N^*_{упр} - \beta_{24} N^*_{пар} & \beta_{23} N^*_{инт} & -\beta_{24} N^*_{инт} \\ \beta_{31} N^*_{упр} & \beta_{32} N^*_{упр} & -\alpha_3 + \beta_{31} N^*_{мт} + \beta_{32} N^*_{инт} - \beta_{34} N^*_{пар} & -\beta_{34} N^*_{упр} \\ \beta_{14} N^*_{пар} & \beta_{24} N^*_{пар} & \beta_{34} N^*_{пар} & -\alpha_4 + \beta_{14} N^*_{мт} + \beta_{24} N^*_{инт} + \beta_{34} N^*_{упр} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Из этой матрицы сразу же следует вышеуказанное утверждение об устойчивости нулевой особой точки. Подставляя выражение (2) в матрицу (3), получим нулевой след этой матрицы в нетривиальной особой точке. Поэтому здесь целесообразна проверка других условий теоремы Холфа на наличие в системе предельных циклов.

Исследуем характер локальной устойчивости особых точек динамической системы (1) в простейшем случае, когда $\beta_{ij} = \beta$. При этом подберем α_i таким образом, чтобы координаты нетривиальной особой точки были положительными. Согласно системе уравнений (2) это может быть в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ и $\alpha_4 < \alpha$. Положим $\alpha_4 = \frac{1}{3}\alpha$, тогда особая нетривиальная точка, найденная из решения системы уравнений (2), будет иметь вид:

$$\left(N^*_{мт}, N^*_{инт}, N^*_{упр}, N^*_{пар}\right) = \left(\frac{1}{3}\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{3}\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{3}\frac{\alpha}{\beta}, \frac{2}{3}\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

В этой точке характеристическое уравнение

$|A - \lambda I| = 0$, где I — единичная матрица, после достаточно громоздких преобразований было приведено нами к виду:

$$\lambda^2 + \frac{4}{27}\alpha^3\lambda + \frac{1}{27}\alpha^4 = \left(\lambda + \frac{\alpha}{3}\right)^2\left(\lambda^2 - \frac{2\alpha}{3}\lambda + \frac{1}{3}\alpha^2\right) = 0, \quad (4)$$

отсюда получим собственные числа матрицы Якоби: $\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{3}$, $\lambda_{3,4} = \frac{\alpha}{3}\left(1 \pm i\sqrt{2}\right)$, которые говорят о наличии неустойчивого фокуса в рассматриваемой точке (в плоскости двух фазовых переменных имеем расходящиеся осциллирующие решения).

В особых точках

$\left(0, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}, 0\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}, 0, \frac{\alpha}{\beta}, 0\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}, 0, 0\right)$ мы имеем седла. Из четырех особых точек с тремя ненулевыми координатами только одна имеет неотрицательные координаты: $N^*_{мт} = N^*_{инт} = N^*_{упр} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}$, $N^*_{пар} = 0$. В этой точке характеристическое уравнение имеет вид:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2}\alpha & -\frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{2}\alpha & -\lambda & \frac{1}{2}\alpha & -\frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2}\alpha & -\lambda & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{6}\alpha - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{7}{6}\alpha - \lambda\right)\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{2}\alpha & -\lambda & \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2}\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

из которого сразу же следует неустойчивость $\left(\lambda_4 = \frac{7}{6}\alpha > 0\right)$ рассматриваемой особой точки.

В качестве противодействия экспансии паразитирующей популяции можно предложить механизм согласованного взаимодействия всех трех производящих популяций[1].

В этом случае соответствующую динамическую систему четвертого порядка запишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{dN_{мт}}{dt} = -\alpha_1 N_{мт} + \beta_1 N_{мт} N_{инт} N_{упр} - \gamma_1 N_{мт} N_{пар} \\ \frac{dN_{инт}}{dt} = -\alpha_2 N_{инт} + \beta_2 N_{мт} N_{инт} N_{упр} - \gamma_2 N_{инт} N_{пар} \\ \frac{dN_{упр}}{dt} = -\alpha_3 N_{упр} + \beta_3 N_{мт} N_{инт} N_{упр} - \gamma_3 N_{упр} N_{пар} \\ \frac{dN_{пар}}{dt} = -\alpha_4 N_{пар} + \gamma_1 N_{мт} N_{пар} + \gamma_2 N_{инт} N_{пар} + \gamma_3 N_{упр} N_{пар}. \end{cases} \quad (5)$$

Можно показать, что помимо нетривиальной особой точки (или нескольких нетривиальных особых точек) в данной системе существуют только две особые точки с нулевыми координатами: 1. (0, 0, 0, 0);

2. $\left(\sqrt{\frac{\alpha_3\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2\beta_3}}, \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_3\beta_2}{\alpha_2\beta_1\beta_3}}, \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2\beta_3}{\alpha_3\beta_1\beta_2}}, 0\right)$.

Легко показать, что первая особая точка является устойчивым узлом. Линейный анализ устойчивости второй точки проведем при $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, $\gamma_i = \gamma$. В этом случае эта особая точка тоже примет вид $\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, 0\right)$, а соответствующее характеристическое уравнение запишется в виде

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\alpha - \lambda & \alpha & \alpha & -\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \\ \alpha & -\lambda & \alpha & -\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \\ \alpha & \alpha & -\lambda & -\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha + 3\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda + \alpha - 3\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \cdot (\lambda + \alpha) \cdot \left(\lambda^2 - 3\alpha^2\right),$$

откуда следует:

$\lambda_1 = -\alpha + 3\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\lambda_2 = -\alpha$, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}\alpha$.

Следовательно, рассматриваемая особая точка является седлом.

Допустим, что одна из нетривиальных особых точек (если их несколько) динамической системы (5) является устойчивой при заданном соотношении параметров рассматриваемой динамической системы. В связи с тем, что нулевая особая точка является устойчивым узлом, в фазовом четырехмерном пространстве существует две области притяжения — к нетривиальной и нулевой

[1]Этот механизм может реализоваться на практике в рамках широко пропагандируемого Европейской Комиссией «метода открытой координации» (open coordination method).

особым точкам. Допустим, мы находимся в области притяжения к нетривиальной особой точке, что говорит о существовании всех четырех видов популяций, и начинаем изменять параметры нашей модели, тогда мы можем попасть на бифуркационное множество параметров динамической системы (5), на котором будут происходить внезапные скачки из устойчивой нетривиальной особой точки в устойчивую нулевую особую точку. Аналогичные катастрофы[2] будут иметь место и для динамической системы (1).

Наличие устойчивой нулевой особой точки соответствует ситуации, описанной в работе [1]: «если индивиду-паразиту общество позволяет иметь достаточно свободное развитие, то это приведет к гибели этого общества вследствие того, что исчезнет питание для производящих индивидов, а следовательно, и любое производство ресурсов в нем».

Отметим, что уровень развития паразитизма в обществе можно оценивать не только долей численности паразитирующей популяции в общей численности трудоспособного населения, но и долей теневого продукта в общем ВВП.

Построим теперь агрегированную модель взаимодействия производящих и паразитирующей популяций. Для этого объединим все три производящие популяции в одну $N_{мт}$ и для описания ее динамики будем использовать дифференциальное уравнение с логистическим членом. Второе уравнение для паразитирующей популяции запишем по аналогии с уравнением динамики «хищника» в простейшей модели типа «хищник — жертва». Тогда придем к следующей динамической системе второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_{мт}}{dt} = \alpha N_{мт} - \beta N_{мт}^2 - \gamma N_{мт} N_{пар} \\ \dfrac{dN_{пар}}{dt} = -\xi N_{пар} + \gamma N_{мт} N_{пар}. \end{cases} \quad (6)$$

Эта система имеет три особые точки: 1. (0, 0); 2. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}, 0\right)$; 3. $\left(\dfrac{\xi}{\gamma}, \dfrac{\alpha\gamma - \beta\xi}{\gamma^2}\right)$. Матрица Якоби в особой точке системы (6) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta N_{мт}^* & -\gamma N_{мт}^* \\ \gamma N_{пар}^* & -\xi + \gamma N_{мт}^* \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Легко показать, что нулевая особая точка является седлом. Для второй особой точки характеристическое уравнение имеет вид $(-\alpha - \lambda)\cdot\left(-\xi + \dfrac{\alpha\gamma}{\beta} - \lambda\right) = 0$, откуда $\lambda_1 = -\alpha < 0$, $\lambda_2 = -\xi + \dfrac{\alpha\gamma}{\beta}$. Следовательно, эта особая точка является устойчивым узлом при $\alpha\gamma \le \beta\xi$ и седлом при $\alpha\gamma > \beta\xi$. Для третьей особой точки, имеющий реальный смысл при $\alpha\gamma \ge \beta\xi$, характеристическое уравнение имеет вид:

[2] При наличии двух устойчивых и одной неустойчивой особых точек мы приходим к математической катастрофе типа «сборки».

$$\lambda^2 + \frac{\beta\xi}{\gamma}\lambda + \alpha\xi - \frac{\beta\xi^2}{\gamma} = 0, \quad (8)$$

которое имеет следующее решение:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta\xi}{2\gamma} \pm \frac{\sqrt{\beta^2\xi^2 + 4\gamma\xi(\beta\xi - \alpha\gamma)}}{2\gamma}. \quad (9)$$

Здесь при $\beta\xi > \alpha\gamma$ приходим к седлу, при $\beta\xi \le \alpha\gamma$ и $\beta^2\xi \ge 4\gamma(\alpha\gamma - \beta\xi)$ — к устойчивому узлу, при $\beta\xi < \alpha\gamma$ и $\beta^2\xi < 4\gamma(\alpha\gamma - \beta\xi)$ — к устойчивому фокусу.

В отличие от динамических систем (1) и (5), в динамической системе (6) отсутствует устойчивая нулевая особая точка. Но если рассматривать решения этой системы в условиях фазовых ограничений $(N_{мт} \ge 0, N_{пар} \ge 0)$, то нулевое равновесное состояние возможно. Наличие двух седловых режимов в системе (6) при $\alpha\gamma \ge \beta\xi$ характеризуется быстрым выходом фазовых траекторий на границы рассматриваемой области (первого квадранта) и далее на бесконечность. Допустим, фазовая траектория попадает на ось $N_{пар}$, когда $N_{мт} = 0$. Тогда вместо системы (6) мы приходим к уравнению $\dfrac{dN_{пар}}{dt} = -\xi N_{пар}$ и, следовательно, происходит движение по оси $N_{пар}$ до нулевого значения $\left(N_{пар}(t) = N_{пар}(0)\exp(-\xi t), \lim\limits_{t\to\infty} N_{пар}(t) = 0\right)$. Таким образом, в условиях фазовых ограничений в динамической системе (6) нулевая особая точка является устойчивым узлом. В случае, если фазовая траектория попадает на ось $N_{мт}$, когда $N_{пар} = 0$, то мы приходим к логистической модели $\dfrac{dN_{мт}}{dt} = \alpha N_{мт} - \beta N_{мт}^2$, для которой $N_{мт}^* = \dfrac{\alpha}{\beta}$ является устойчивой особой точкой. Таким образом, в этом случае вторая особая точка $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}, 0\right)$ также является устойчивым узлом.

На этом мы закончим рассмотрение совместных моделей мутуализма и паразитизма в общественных системах для двумерного и четырехмерного случаев. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гетманец В. Ф.** Ресурсно-информационная модель биолого-социальных систем // Бизнес Информ.– Х., 2002.– № 11-12.– С. 40 – 43.

2. **Федоров В. Д., Гильманов Т. Г.** Экология.– М.: Изд-во МГУ, 1980.– 464 с.

3. **Goh B. S.** *Stability in models of mutualism* // The American Naturalist.– 1979.– Vol. 113, № 2.– P. 261 – 274.

4. **Московкин В. М., Журавка А. В.** Моделирование конкурентно-, коперационных взаимодействий (Контекст уравнений популяционной динамики в социально-экономических системах) // Бизнес Информ.– Х., 2002.– № 5-6.– С. 27 – 34.