Н. Г. КУЛАКОВ

О ПРЕДЕЛЬНЫХ И ПРОИЗВОДНЫХ ЧИСЛАХ ФУНКЦИИ.

В данной работе раскрывается всесторонняя структурная сущность понятий предела и производной функции.

При изложении настоящего вопроса нам потребуются некоторые сведения из теории точечных множеств, на которых мы сейчас и остановимся.

Пусть x_0 есть точка числовой прямой. Всякий интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$, называют окрестностью точки x_0.

Пусть $E = \{x\}$ есть множество точек числовой прямой. Точка x_0 называется предельной точкой множества E, если в любой окрестности точки x_0 содержится бесконечное множество точек множества E.

При этом предельная точка x_0 может принадлежать множеству E, а может и не принадлежать E.

Точка $x_0 \in E$ называется изолированной точкой множества E, если точка x_0 не является предельной точкой для множества E.

Иначе говоря, точка $x_0 \in E$ называется изолированной точкой множества E, если существует такая окрестность точки x_0, в которой нет других точек из множества E, кроме точки x_0. Ясно, что каждая точка множества E есть либо изолированная, либо предельная точка E.

Множество E называется изолированным множеством, если оно состоит из одних изолированных точек.

Из определения предельной точки следует, что конечные множества предельных точек не имеют.

Бесконечные множества могут иметь предельные точки, а могут их и не иметь.

Если бесконечное множество является ограниченным, то оно всегда имеет по крайней мере одну предельную точку (теорема Больцано — Вейерштрасса).

Пусть x_0 есть предельная точка множества E. Тогда возможны следующие три случая:

1) Только слева от точки x_0 в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек из E. В этом случае предельную точку x_0 называют левосторонней предельной точкой множества E.

2) Только справа от точки x_0 в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек из E. В этом случае предельную точку x_0 называют правосторонней предельной точкой множества E.

3) И слева и справа от точки x_0 в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек из E. В этом случае предельную точку x_0 называют двухсторонней предельной точкой множества E.

Введем следующие обозначения:

1) $E^{+}(x_0, \delta) = E \cdot (x_0, x_0 + \delta)$ есть пересечение множества E с интервалом $(x_0, x_0 + \delta)$.

2) $E^{-}(x_0, \delta) = E \cdot (x_0 - \delta, x_0)$ есть пересечение множества E с интервалом $(x_0 - \delta, x_0)$.

3) $E(x_0, \delta) = E \cdot [(x_0 - \delta, x_0) + (x_0, x_0 + \delta)]$ есть пересечение множества E с суммой интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$.

§ 1. О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ ФУНКЦИИ.

Пусть действительная функция $\varphi(x)$ действительного переменного x определена на множестве E и пусть x_0 есть предельная точка множества E.

Чтобы иметь возможность говорить о конечных предельных числах функции $\varphi(x)$ в точки x_0 относительно множества E, мы будем предполагать, что функция $\varphi(x)$ является ограниченной на некотором множестве $E(x_0, \delta_1)$.

1. Первое определение левого и правого пределов функции. Могут быть следующие три возможности:

1) Точка x_0 является левосторонней предельной точкой множества E. В этом случае вводится понятие левого предела функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E.

Определение. Число A^{-} называют левым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E^{-}(x_0, \delta)$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x) - A^{-}| < \varepsilon,$$

и пишут:

$$A^{-} = \lim_{x \to x_0 - 0} \varphi(x) = \varphi(x_0 - 0).$$

2) Точка x_0 является правосторонней предельной точкой множества E. В этом случае вводится понятие правого предела функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E.

Определение. Число A^{+} называют правым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E^{+}(x_0, \delta)$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x) - A^{+}| < \varepsilon,$$

и пишут:

$$A^+ = \lim_{x \to x_0+0} \varphi(x) = \varphi(x_0+0).$$

3) Если точка x_0 есть двусторонняя предельная точка множества E, то можно говорить о левом и правом пределах функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E.

2. **Первое определение предела функции.** Пусть точка x_0 является двусторонней предельной точкой множества E.

Определение. Число A называют пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E(x_0, \delta)$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x) - A| < \varepsilon,$$

и пишут:

$$A = \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

3. **Второе определение предела функции.** Пусть точка x_0 есть двухсторонняя предельная точка множества E.

Определение. Если левый и правый пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E совпадают, то их общее значение

$$A^- = \varphi(x_0-0) = \varphi(x_0+0) = A^+ = A$$

называют пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E. Ясно, что первое определение предела функции равносильно второму определению.

4. **О четырех предельных числах функции.** Пусть точка x_0 есть двухсторонняя предельная точка множества E.

Определение. Число $\overline{A^+}$ называют верхним правым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E, если:

1) для каждого числа $\overline{A^+} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E^+(x_0, \delta)$ справедливо неравенство

$$\varphi(x) < \overline{A^+} + \varepsilon$$

2) для каждого числа $\overline{A^+} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и при любом $\delta > 0$ найдутся такие точки $x \in E^+(x_0, \delta)$, в которых справедливо неравенство

$$\varphi(x) > \overline{A^+} - \varepsilon,$$

и пишут:

$$\overline{A^+} = \overline{\lim_{x \to x_0+0}} \varphi(x) = \overline{\varphi(x_0+0)}.$$

Определение. Число $\underline{A^+}$ называют нижним правым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E, если:

1) для каждого числа $\underline{A^+} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E^+(x_0, \delta)$ справедливо неравенство

$$\varphi(x) > \underline{A^+} - \varepsilon$$

2) для каждого числа $\underline{A^+} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и при любом $\delta > 0$ найдутся такие точки $x \in E^+(x_0, \delta)$, в которых справедливо неравенство

$$\varphi(x) < \underline{A^+} + \varepsilon,$$

и пишут:

$$\underline{A^+} = \underline{\lim}_{x \to x_0 + 0} \varphi(x) = \underline{\varphi(x_0 + 0)}.$$

Определение. Число $\overline{A^-}$ называют верхним левым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E, если:

1) для каждого числа $\overline{A^-} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E^-(x_0, \delta)$ справедливо неравенство

$$\varphi(x) < \overline{A^-} + \varepsilon$$

2) для каждого числа $\overline{A^-} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и при любом $\delta > 0$ найдутся такие точки $x \in E^-(x_0, \delta)$, в которых справедливо неравенство

$$\varphi(x) > \overline{A^-} - \varepsilon,$$

и пишут:

$$\overline{A^-} = \overline{\lim}_{x \to x_0 - 0} \varphi(x) = \overline{\varphi(x_0 - 0)}.$$

Определение. Число $\underline{A^-}$ называют нижним левым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E, если:

1) для каждого числа $\underline{A^-} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E^-(x_0, \delta)$ справедливо неравенство

$$\varphi(x) > \underline{A^-} - \varepsilon$$

2) для каждого числа $\underline{A^-} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и при любом $\delta > 0$ найдутся такие точки $x \in E^-(x_0, \delta)$, в которых справедливо неравенство

$$\varphi(x) < \underline{A^-} + \varepsilon,$$

и пишут:

$$\underline{A^-} = \underline{\lim}_{x \to x_0 - 0} \varphi(x) = \underline{\varphi(x_0 - 0)}.$$

Теорема 1. Если точка x_0 есть двухсторонняя предельная точка множества E и функция $\varphi(x)$ является ограниченной на некотором множестве $E(x_0, \delta_1)$, то всегда существуют единственные и конечные нижний правый, верхний правый, нижний левый и верхний левый пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E.

Доказательство. Докажем теорему для верхнего правого предела (существование и единственность остальных предельных чисел доказывается аналогично). Обозначим при $0 < \delta \leqslant \delta_1$

$$M(\delta) = \sup_{x \in E^+(x_0, \delta)} \varphi(x),$$

$$\overline{A^+} = \inf_{(\delta)} M(\delta)$$

и покажем, что число $\overline{A^+}$ является верхним правым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E. По определению верхней грани имеем:

$$\varphi(x) \leqslant M(\delta) \qquad (1)$$

для всех $x \in E^+(x_0, \delta)$. Возьмем число $\overline{A^+} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Так как $\overline{A^+}$ есть нижняя грань чисел $M(\delta)$ и $\overline{A^+} + \varepsilon > \overline{A^+}$, то существует такое $\delta > 0$, что будет выполняться неравенство

$$M(\delta) < \overline{A^+} + \varepsilon$$

и значит в силу (1)

$$\varphi(x) < \overline{A^+} + \varepsilon$$

для всех $x \in E^+(x_0, \delta)$. Теперь возьмем число $\overline{A^+} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ Поскольку $\overline{A^+}$ есть нижняя грань чисел $M(\delta)$ и $\overline{A^+} - \varepsilon < \overline{A^+}$, то

$$M(\delta) > \overline{A^+} - \varepsilon$$

при любом $\delta > 0$ и $\delta \leqslant \delta_1$. Так как $M(\delta)$ есть верхняя грань функции $\varphi(x)$ на множестве $E^+(x_0, \delta)$ и $M(\delta) > \overline{A^+} - \varepsilon$, где $0 < \delta \leqslant \delta_1$, то при любом $\delta > 0$ и $\delta \leqslant \delta_1$ найдутся такие точки $x \in E^+(x_0, \delta)$, в которых будет выполняться неравенство

$$\varphi(x) > \overline{A^+} - \varepsilon.$$

Таким образом, выполняются два требования, фигурирующие в определении верхнего правого предела. Следовательно, число $\overline{A^+}$ есть верхний правый предел функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E.

Теперь докажем единственность верхнего правого предела. Допустим, что существует еще верхний правый предел $\overline{B^+}$, причем $\overline{A^+} < \overline{B^+}$ Возьмем число C между $\overline{A^+}$ и $\overline{B^+}$: $\overline{A^+} < C < \overline{B^+}$. Так как $\overline{A^+}$ есть верхний правый предел и $\overline{A^+} < C$, то найдется такое δ_0, что для всех $x \in E^+(x_0, \delta_0)$ будет выполняться неравенство

$$\varphi(x) < C.$$

С другой стороны, поскольку $\overline{B^+}$ есть верхний правый предел по нашему допущению и $C < \overline{B^+}$, то при δ_0 найдутся такие точки $x \in E^+(x_0, \delta_0)$, в которых окажется

$$\varphi(x) > C,$$

что невозможно. Это противоречие доказывает наше утверждение. Теорема полностью доказана.

Теорема 2. Справедливы неравенства

$$\underline{A^-} \leqslant \overline{A^-} \text{ и } \underline{A^+} \leqslant \overline{A^+},$$

т. е. нижний левый предел не превосходит верхнего левого предела и нижний правый предел не превосходит верхнего правого предела.

Доказательство. Докажем второе неравенство (первое доказывается аналогично). Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E^+(x_0, \delta)$ будут одновременно выполняться два неравенства

$$\varphi(x) < \overline{A^+} + \varepsilon,$$
$$\varphi(x) > \underline{A^+} - \varepsilon.$$

Отсюда, вычитая второе неравенство из первого, получим:

$$0 < \overline{A^+} - \underline{A^+} + 2\varepsilon$$

или

$$-2\varepsilon < \overline{A^+} - \underline{A^+},$$

откуда следует, что $\overline{A^+} - \underline{A^+} \geqslant 0$, т. е. $\overline{A^+} \geqslant \underline{A^+}$. Теорема доказана.

5. **Второе определение левого и правого пределов функции.** Пусть x_0 есть двухсторонняя предельная точка множества E.

Определение. Если нижний левый и верхний левый пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E совпадают, то их общее значение

$$\underline{A^-} = \underline{\varphi(x_0 - 0)} = \overline{\varphi(x_0 - 0)} = \overline{A^-} = A^- = \varphi(x_0 - 0)$$

называют левым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E.

Определение. Если нижний правый и верхний правый пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E совпадают, то их общее значение

$$\underline{A^+} = \underline{\varphi(x_0 + 0)} = \overline{\varphi(x_0 + 0)} = \overline{A^+} = A^+ = \varphi(x_0 + 0)$$

называют правым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E.

Ясно, что второе определение левого и правого пределов функции равносильно первому определению (см. пункт 1).

6. **Первое определение нижнего и верхнего пределов функции.** Пусть x_0 есть двухсторонняя предельная точка множества E.

Определение. Число $\underline{A}$ называют нижним пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E, если:

1) для каждого числа $\underline{A}-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E(x_0, \delta)$ справедливо неравенство

$$\varphi(x) > \underline{A} - \varepsilon$$

2) для каждого числа $\underline{A}+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и при любом $\delta > 0$ найдутся такие точки $x \in E(x_0, \delta)$, в которых справедливо неравенство

$$\varphi(x) < \underline{A} + \varepsilon,$$

и пишут:

$$\underline{A} = \varliminf_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Определение. Число $\overline{A}$ называют верхним пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E, если:

1) для каждого числа $\overline{A}+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E(x_0, \delta)$ справедливо неравенство

$$\varphi(x) < \overline{A} + \varepsilon$$

2) для каждого числа $\overline{A}-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и при любом $\delta > 0$ найдутся такие точки $x \in E(x_0, \delta)$, в которых справедливо неравенство

$$\varphi(x) > \overline{A} - \varepsilon,$$

и пишут:

$$\overline{A} = \varlimsup_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Теорема 1. Если x_0 есть двухсторонняя предельная точка множества E и функция $\varphi(x)$ является ограниченной на некотором множестве $E(x_0, \delta_1)$, то всегда существуют единственные и конечные нижний и верхний пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E (эта теорема доказывается так же, как и теорема 1 пункта 4).

Теорема 2. Справедливо неравенство

$$\underline{A} \leqslant \overline{A},$$

т. е. нижний предел не превосходит верхнего предела (эта теорема доказывается так же, как теорема 2 пункта 4).

7. **Второе определение нижнего и верхнего пределов функции.** Пусть x_0 есть двухсторонняя предельная точка множества E.

Определение. Если $\underline{A}^-$ и $\underline{A}^+$ есть соответственно нижний левый и нижний правый пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E, то число

$$\underline{A} = \min\{\underline{A}^-, \underline{A}^+\}$$

называют нижним пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E.

Определение. Если $\overline{A^-}$ и $\overline{A^+}$ есть соответственно верхний левый и верхний правый пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E, то число

$$\overline{A} = \max\{\overline{A^-}, \overline{A^+}\}$$

называют верхним пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E.

Легко видеть, что второе определение нижнего и верхнего пределов функции равносильно первому определению (см. пункт 6).

8. **Третье определение предела функции.** Пусть x_0 есть двухсторонняя предельная точка множества E.

Определение. Если нижний и верхний пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E совпадают, то их общее значение

$$\underline{A} = \overline{A} = A$$

называют пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E.

Ясно, что третье определение предела функции равносильно первому и второму определениям (см. пункты 2 и 3).

9. **Четвертое определение предела функции.** Пусть x_0 есть двухсторонняя предельная точка множества E.

Определение. Если нижний левый, верхний левый, нижний правый и верхний правый пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 относительно множества E совпадают, то их общее значение

$$\underline{A}^- = \overline{A^-} = \underline{A}^+ = \overline{A^+} = A$$

называют пределом функции $\varphi(x)$ в точе x_0 относительно множества E.

Ясно, что четвертое определение предела функции равносильно трем данным выше определениям (см. пункты 2, 3 и 8).

Таким образом, все четыре определения предела функции равносильны.

Замечание. Понятия всех предельных чисел функции определяются только в предельных точках множества (они не определяются в изолированных точках множества).

10. **Пример.** Рассмотрим на множестве $E = (-\infty, 0) + (0, +\infty)$ функцию $\varphi(x)$ следующей структуры:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, \text{ если } x > 0 \\ 2\sin\frac{1}{x}, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Нас будет интересовать точка $x_0 = 0$; она является двухсторонней предельной точкой множества E.

Исходя из данных выше определений, мы легко находим предельные числа функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 = 0$:

$$\underline{A^-} = -2;\ \overline{A^-} = 2;\ \underline{A^+} = -1;\ \overline{A^+} = 1;\ \underline{A} = -2;\ \overline{A} = 2.$$

Так как $\underline{A^-} \neq \overline{A^-}$ и $\underline{A^+} \neq \overline{A^+}$, то функция $\varphi(x)$ в точке $x_0 = 0$ не имеет ни левого, ни правого пределов и тем более не имеет предела.

§ 2. О ПРОИЗВОДНЫХ ЧИСЛАХ ФУНКЦИИ.

Пусть функция $\varphi(x)$ определена на множестве E и пусть $x_0 \in E$ есть двухсторонняя предельная точка множества E. Составим отношение

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \qquad (*)$$

Чтобы иметь возможность говорить о конечных производных числах функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, мы будем предполагать, что отношение (*) является ограниченным на некотором множестве $E(x_0, \delta_1)$.

1. О четырех производных числах функции.

Определение. Нижний левый предел отношения (*) в точке $x_0 \in E$ относительно множества E называют нижней левой производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, обозначают символом $\underline{\varphi'_-(x_0)}$ и пишут:

$$\underline{\lim}_{x \to x_0 - 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \underline{\varphi'_-(x_0)}.$$

Определение. Верхний левый предел отношения (*) в точке $x_0 \in E$ относительно множества E называют верхней левой производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, обозначают символом $\overline{\varphi'_-(x_0)}$ и пишут:

$$\overline{\lim}_{x \to x_0 - 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \overline{\varphi'_-(x_0)}.$$

Определение. Нижний правый предел отношения (*) в точке $x_0 \in E$ относительно множества E называют нижней правой производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, обозначают символом $\underline{\varphi'_+(x_0)}$ и пишут:

$$\varliminf_{x \to x_0+0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \underline{\varphi'_+(x_0)}.$$

Определение. Верхний правый предел отношения (*) в точке $x_0 \in E$ относительно множества E называют верхней правой производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, обозначают символом $\overline{\varphi'_+(x_0)}$ и пишут:

$$\varlimsup_{x \to x_0+0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \overline{\varphi'_+(x_0)}.$$

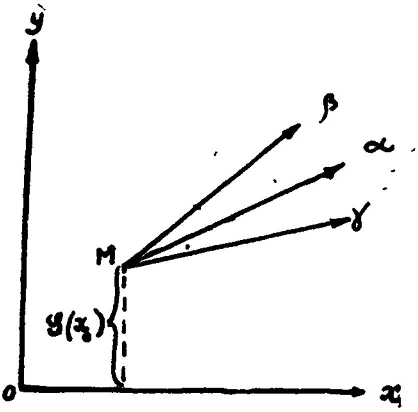

Рис. 1.

Теоремы 1 и 2 пункта 4, § 1 дают нам право формулировать следующую теорему.

Теорема. Если точка $x_0 \in E$ есть двухсторонняя предельная точка множества E и отношение (*) является ограниченным на некотором множестве $E(x_0, \delta_1)$, то всегда существуют единственные и конечные нижняя левая, верхняя левая, нижняя правая и верхняя правая производные функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, причем всегда справедливы неравенства

$$\underline{\varphi'_-(x_0)} \leqslant \overline{\varphi'_-(x_0)}, \quad \underline{\varphi'_+(x_0)} \leqslant \overline{\varphi'_+(x_0)}.$$

2. Геометрический смысл производных чисел. Дадим, например, геометрическое истолкование верхней правой производной $\overline{\varphi'_+(x_0)} = k$ функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E (для остальных производных чисел оно дается подобным образом).

Проведем из точки M с координатами x_0, $\varphi(x_0)$ луч α с угловым коэффициентом $k = \overline{\varphi'_+(x_0)}$ (рис. 1). Если из точки M провести луч β с бóльшим углом наклона, чем луч α, то найдется такое множество $E^+(x_0, \delta)$, что для всех $x \in E^+(x_0, \delta)$ соответствующие точки графика функции $\varphi(x)$ будут лежать ниже луча β. Если же из точки M провести луч γ с меньшим углом наклона, чем луч α, то на любом множестве $E^+(x_0, \delta)$ найдутся такие точки x, в которых соответствующие точки графика функции $\varphi(x)$ будут лежать выше луча γ.

3. **Первое определение левой и правой производных функции.** Пусть $x_0 \in E$ есть двухсторонняя предельная точка множества E.

Определение. Левый предел отношения (*) в точке $x_0 \in E$ относительно множества E называют левой производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, обозначают символом $\varphi'_-(x_0)$ и пишут:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'_-(x_0).$$

Определение. Правый предел отношения (*) в точке $x_0 \in E$ относительно множества E называют правой производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, символически обозначают через $\varphi'_+(x_0)$ и пишут:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'_+(x_0).$$

4. **Второе определение левой и правой производных функций.** Пусть $x_0 \in E$ есть двухсторонняя предельная точка множества E.

Определение. Если нижняя левая производная $\underline{\varphi'_-(x_0)}$ и верхняя левая производная $\overline{\varphi'_-(x_0)}$ функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E совпадают, то их общее значение

$$\underline{\varphi'_-(x_0)} = \overline{\varphi'_-(x_0)} = \varphi'_-(x_0)$$

называют левой производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E.

Определение. Если нижняя правая производная $\underline{\varphi'_+(x_0)}$ и верхняя правая производная $\overline{\varphi'_+(x_0)}$ функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E совпадают, то их общее значение

$$\underline{\varphi'_+(x_0)} = \overline{\varphi'_+(x_0)} = \varphi'_+(x_0)$$

называют правой производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E.

Ясно, что второе определение левой и правой производных функции равносильно первому определению (см. § 1).

5. **Первое определение нижней и верхней производных функции.** Пусть $x_0 \in E$ есть двухсторонняя предельная точка множества E.

Определение. Нижний предел отношения (*) в точке $x_0 \in E$ относительно множества E называют нижней производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, обозначают символом $\underline{\varphi'(x_0)}$ и пишут:

$$\underline{\lim}_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \underline{\varphi'(x_0)}.$$

О п р е д е л е н и е. Верхний предел отношения (*) в точке $x_0 \in E$ относительно множества E называют верхней производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, обозначают символом $\overline{\varphi'(x_0)}$ и пишут:

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \overline{\varphi'(x_0)}.$$

Теоремы 1 и 2 пункта 6, § 1 дают нам право сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а. Если $x_0 \in E$ есть двухсторонняя предельная точка множества E и отношение (*) является ограниченным на некотором множестве $E(x_0, \delta_1)$, то всегда существуют единственные и конечные нижняя и верхняя производные функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, причем всегда справедливо неравенство

$$\underline{\varphi'(x_0)} \leqslant \overline{\varphi'(x_0)}.$$

6. **Второе определение нижней и верхней производных функции.** Пусть $x_0 \in E$ есть двухсторонняя предельная точка множества E.

О п р е д е л е н и е. Число $\underline{\varphi'(x_0)} = \min \{\underline{\varphi'_-(x_0)}, \underline{\varphi'_+(x_0)}\}$ называют нижней производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E.

О п р е д е л е н и е. Число $\overline{\varphi'(x_0)} = \max \{\overline{\varphi'_-(x_0)}, \overline{\varphi'_+(x_0)}\}$ называют верхней производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E.

Ясно, что второе определение нижней и верхней производных функции равносильно первому определению (см. § 1).

7. **Четыре определения производной функции.** Пусть $x_0 \in E$ есть двухсторонняя предельная точка множества E.

П е р в о е о п р е д е л е н и е. Предел отношения (*) в точке $x_0 \in E$ относительно множества E называют производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E, обозначают через $\varphi'(x_0)$ и пишут:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0).$$

В т о р о е о п р е д е л е н и е. Если левая и правая производные функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E совпадают, то их общее значение

$$\varphi'_-(x_0) = \varphi'_+(x_0) = \varphi'(x_0)$$

называют производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E.

Третье определение. Если нижняя и верхняя производные функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E совпадают, то их общее значение

$$\underline{\varphi'(x_0)} = \overline{\varphi'(x_0)} = \varphi'(x_0)$$

называют производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E.

Четвертое определение. Если нижняя левая, верхняя левая, нижняя правая и верхняя правая производные функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E совпадают, то их общее значение

$$\underline{\varphi'_-(x_0)} = \overline{\varphi'_-(x_0)} = \underline{\varphi'_+(x_0)} = \overline{\varphi'_+(x_0)} = \varphi'(x_0)$$

называют производной функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ относительно множества E. Все эти четыре определения производной функции равносильны (см. § 1).

Замечание. Понятия всех производных чисел функции определяются только в предельных точках множества, ему принадлежащих (они не определяются в изолированных точках множества).

8. **Пример.** Рассмотрим на множестве $E = (-\infty, +\infty)$ функцию $\varphi(x)$ следующей структуры:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ 2x \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Исходя из данных выше определений, мы легко находим производные числа функции $\varphi(x)$ в точке $x_0 = 0$:

$$\underline{\varphi'_-(0)} = -2;\ \overline{\varphi'_-(0)} = 2;\ \underline{\varphi'_+(0)} = -1;$$
$$\overline{\varphi'_+(0)} = 1;\ \underline{\varphi'(0)} = -2;\ \overline{\varphi'(0)} = 2.$$

Так как $\underline{\varphi'_-(0)} \neq \overline{\varphi'_-(0)}$ и $\underline{\varphi'_+(0)} \neq \overline{\varphi'_+(0)}$, то функция $\varphi(x)$ в точке $x_0 = 0$ не имеет ни левой, ни правой производных и тем более не имеет производной.