

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ОПЕРАТОРНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ. ПРИМЕРЫ II

А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Глушаком)

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
г. Владикавказ, 362025, Россия

Воронежский государственный педагогический университет,
г. Воронеж, 394043, Россия

Университет Северного Иллинойса,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Воронежский государственный технический университет,
г. Воронеж, 394006, Россия

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, g.garkavenko@mail.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Аннотация. В работе приводятся примеры, иллюстрирующие применение метода подобных операторов с предварительным преобразованием подобия. Метод применяется, в основном, к операторам, определяемым своими матрицами. Предварительное преобразование используется, в частности, когда у невозмущенного оператора расстояние между собственными значениями не увеличивается. К таким операторам относятся оператор Дирака и оператор дифференцирования первого порядка с инволюцией.

Ключевые слова: метод подобных операторов, предварительное преобразование подобия, операторные матрицы, спектр.

Благодарности: Работа первого и четвертого авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

Для цитирования: Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2021. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры II. Прикладная математика & Физика. 53(3): 205–212. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-205-212.

THE METHOD OF SIMILAR OPERATORS IN THE SPECTRAL ANALYSIS OF INFINITE OPERATOR MATRICES. EXAMPLES II

Anatoly Baskakov, Galina Garkavenko, Ilya Krishtal and Uskova Natalia

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Glushak)

North Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
Vladikavkaz, 362025, Russia

Voronezh State Pedagogical University,
Voronezh, 394043, Russia

Northern Illinois University,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Voronezh State Technical University,
Voronezh, 394006, Russia

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, g.garkavenko@mail.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Received July, 9, 2021

Abstract. We illustrate the method of similar operators with examples including the preliminary similarity transformation. The method is applied primarily to operators defined by their matrices. The preliminary similarity transformation is used, in particular, for operators with non-increasing spectral gaps, such as certain Dirac operators and operators with an involution.

Key words: method of similar operators, preliminary similarity transformation, operator matrices, spectrum

Acknowledgements: The work is supported by RFBR, № 19-01-00732.

For citation: Baskakov A. G., Garkavenko G. V., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2021. The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. Examples II. Applied Mathematics & Physics. 53(3): 205–212. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-205-212.

1. Введение. Метод подобных операторов применяется для спектрального анализа широкого класса возмущенных неограниченных линейных операторов. В работе [2] подробно выведена и обоснована модификация метода подобных операторов в терминах бесконечных операторных матриц в частности и для случая, когда собственные значения невозмущенного оператора “не разбегаются”. Такая модификация нужна, например, для исследования дифференциальных операторов первого порядка, таких как популярный в последнее время дифференциальный оператор с инволюцией (см. [5, 9]). В [3] приведены примеры, иллюстрирующие теоретические выкладки из [2]. Отметим, что в примерах из [3] не использовалось предварительное преобразование подобия. Данная статья является продолжением работ [2] и [3]. Здесь собраны примеры, иллюстрирующие теорию из [2], причем акцент, в отличие от [3], делается на применении не столько самого метода подобных операторов, сколько предварительного преобразования подобия. Для удобства, в начале статьи (в § 2) приводятся вкратце те теоретические сведения, на которые мы будем опираться.

2. Обзор теоретических результатов. Рассмотрим комплексное (сепарабельное) гильбертово пространство \mathcal{H} и линейный замкнутый нормальный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора A состоит из полупростых собственных значений $\lambda_n, n \in \mathbb{J}, \mathbb{J} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+\}$, конечной геометрической кратности, не превосходящей некоторого числа $M_0 \in \mathbb{N}$. При этом требуется

$$\sup_{i \in \mathbb{J}} \sum_{n \in \mathbb{J} \setminus \{i\}} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_n)^2} < \infty,$$

откуда вытекает условие равномерной разделенности спектра оператора A :

$$\inf_{n \in \mathbb{J}} \text{dist}(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \setminus \{\lambda_n\}) \geq \beta > 0, \quad (1)$$

при некотором $\beta > 0$.

Через $P_n = P(\{\lambda_n\}, A)$, $n \in \mathbb{J}$, обозначим проектор Рисса (спектральный проектор), построенный по множеству $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{J}$, оператора A ; таким образом, $AP_n = \lambda_n P_n$, $n \in \mathbb{J}$.

Символом $\mathfrak{Q}_A(\mathcal{H})$ обозначается банахово пространство операторов, подчиненных оператору A , а символом $\text{End } \mathcal{H}$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в \mathcal{H} с нормой $\|X\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|$, $X \in \text{End } \mathcal{H}, x \in \mathcal{H}$. Отметим, что если $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, то $\text{End } \mathcal{H}$ непрерывно вложено в $\mathfrak{Q}_A(\mathcal{H})$.

Все рассуждения далее будут проводиться, используя операторные матрицы рассматриваемых операторов. Для каждого оператора $X \in \mathfrak{Q}_A(\mathcal{H})$ введем в рассмотрение его матрицу (X_{ij}) , положив $X_{ij} = P_i X P_j$, $i, j \in \mathbb{J}$. Отметим, что любой оператор из $\mathfrak{Q}_A(\mathcal{H})$ однозначно определяется своей матрицей.

Также введем двусторонний идеал операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \text{End } \mathcal{H}$. Отметим, что стандартная норма $\|\cdot\|_2$ этого идеала удовлетворяет равенству $\|X\|_2^2 = \sum_{i, j \in \mathbb{J}} \|X_{ij}\|_2^2$.

Подчеркнем, что в настоящей работе мы рассматриваем возмущение $B \in \mathfrak{Q}_A(\mathcal{H})$, в отличие от [3], где B предполагалось из идеала $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Вследствие этого необходимо вначале произвести предварительное преобразование подобия. Для построения предварительного преобразования подобия считаются выполненными следующие условия, накладываемые на оператор-возмущение $B \in \mathfrak{Q}_A(\mathcal{H})$:

1)

$$\sum_{i \in \mathbb{J}} \|B_{ii}\|_2^2 < \infty; \quad (2)$$

2)

$$\sum_{i, j \in \mathbb{J}, i \neq j} \frac{\|B_{ij}\|_2^2}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} < \infty; \quad (3)$$

3)

$$\sum_{i, j \in \mathbb{J}} \left\| \sum_{l \in \mathbb{J}, l \neq j} \frac{B_{il} B_{lj}}{\lambda_l - \lambda_j} \right\|_2^2 < \infty; \quad (4)$$

4) для любого положительного ε найдется такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что

$$\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon. \quad (5)$$

Также для построения предварительного преобразования подобия необходимы две последовательности операторов $M^{(n)}, N^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, которые удобно определить, используя их операторные матрицы $M^{(n)} \sim (M_{ij}^{(n)}), N^{(n)} \sim (N_{ij}^{(n)}), i, j \in \mathbb{J}$, положив

$$M_{ij}^{(n)} = \begin{cases} B_{ij}, & i = j, \\ B_{ij}, & \max\{|i|, |j|\} \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad N_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{B_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & i \neq j, \quad \min\{|i|, |j|\} \geq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

Теорема 1 (см. [2, теорема 4.1]). Пусть $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и выполнены условия (1) – (5). Тогда существует такое целое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$ подобен оператору $A - M^{(k)} - C^{(k)} = A - Q$, $C^{(k)} = (I + N^{(k)})(BN^{(k)} - N^{(k)}M^{(k)})$, где $N^{(k)}$ и $M^{(k)}$ заданы формулой (6), и $C^{(k)}, N^{(k)}, M^{(k)} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. При этом $(A - B)(I + N^{(k)}) = (I + N^{(k)})(A - Q)$, $Q \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Определим еще две последовательности операторов $J_k X$ и $\Gamma_k X \in \text{End } \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, следующим образом. Сначала положим для $X \sim (X_{ij}), X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $k = 0$:

$$(J_0 X)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (\Gamma_0 X)_{ij} = \begin{cases} \frac{X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Для $k > 0$ обозначим $P_{(k)} = \sum_{|i| \leq k} P_i$ и определим $J_k X$ и $\Gamma_k X$ формулами:

$$J_k X = P_{(k)} X P_{(k)} + \sum_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} P_i X P_i, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}),$$

$$\Gamma_k X = \Gamma_0 X - P_{(k)} (\Gamma_0 X) P_{(k)} = \Gamma_0 (X - J_k X), \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

Теорема 2 (см. [2, теорема 5.8]). Пусть для операторов A и B , $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ выполнены условия (1) – (5). Тогда существуют такие числа $n, k \in \mathbb{Z}_+$ и оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, что оператор $A - B$ подобен оператору

$$A - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} P_i X_* P_i = A - V;$$

при этом матрица оператора $V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ блочно-диагональна, и оператором преобразования служит оператор $(I + M^{(k)})(I + \Gamma_n X_*) = I + U_{kn}$, где $U_{kn} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ из теоремы 2 является решением операторного уравнения метода подобных операторов (см. [2]), получить которое можно методом простых итераций.

Пусть $\widehat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$ – взвешенное среднее $\widehat{\lambda}$ собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Введем также обозначения $l_i = \dim \text{Im } P_i$, $i \in \mathbb{J}$, и $b_{nj}^i, \widetilde{b}_{nj}^i$, $1 \leq n, j \leq l_i$, для элементов матриц $P_i B P_i$ и $P_i B N^{(k)} P_i$, $|i| > m$, соответственно.

Теорема 3 (см. [2, теорема 6.1]). Имеют место следующие асимптотические представления:

$$\widehat{\lambda}_i = \lambda_i - \frac{1}{l_i} \sum_{n=1}^{l_i} b_{nn}^i - \frac{1}{l_i} \sum_{n=1}^{l_i} \widetilde{b}_{nn}^i + \beta_i, \quad \text{где } \beta_i \in \ell_1(\mathbb{J}). \quad (7)$$

Теорема 4 (см. [2, следствие 6.1]). Если $\dim \text{Im } P_i = 1$, $|i| > m$, $i \in \mathbb{J}$, то для собственных значений $\widetilde{\lambda}_i$ оператора $A - B$ имеют место асимптотические формулы

$$\widetilde{\lambda}_i = \lambda_i - b_{ii} - \sum_{l \neq i} \frac{b_{il} b_{li}}{\lambda_l - \lambda_i} + \beta_i, \quad \text{где } \beta_i \in \ell_1(\mathbb{J}) \text{ и } |i| > m.$$

Далее приведем примеры применения общих теорем.

Пример 1. Сначала сформулируем следующий известный результат. Его доказательство можно найти, например, в [8].

Теорема 5. Пусть есть самосопряженный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ и оператор B из идеала $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда существует такая непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, что для всех $\lambda \in \sigma(A + B)$ выполнено неравенство $|\text{Im } \lambda| \leq f(\text{Re } \lambda)$.

Алгоритм построения функции f можно найти в [4, 8].

Пусть теперь $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Тогда, при условии, что теорема 1 имеет место, получаем, что операторы $A - B$ и $A - Q$ подобны, где Q уже оператор из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Вследствие совпадения спектров подобных операторов (см., например, [2, лемма 6.1]) и выполнения теоремы 5 для оператора $A - Q$, следует, что она имеет место и для оператора $A - B$.

Теорема 6. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – линейный замкнутый самосопряженный оператор, оператор B подчинен оператору A , и выполнены условия (1) – (5). Тогда существует такая непрерывная положительная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, что для всех $\lambda \in \sigma(A - B)$ имеет место неравенство $|\text{Im } \lambda| \leq f(\text{Re } \lambda)$.

Наличие такой функции f означает, что спектр возмущенного оператора $A - B$ лежит между графиками функций f и $-f$.

Пример 2. Пусть $L_2[0, \omega]$ – гильбертово пространство (классов эквивалентности) комплекснозначных функций, измеримых по Лебегу и суммируемых с квадратом модуля на отрезке $[0, \omega]$, со скалярным произведением

$$(x, y) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(s) \overline{y(s)} ds$$

и нормой

$$\|x\|^2 = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |x(s)|^2 ds, \quad x \in L_2[0, \omega].$$

Через $W_2^1[0, \omega]$ будем обозначать пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $L_2[0, \omega]$ с производными из $L_2[0, \omega]$.

Пусть $\mathcal{H} = L_2[0, \omega]$ и задан оператор $A = \frac{d}{dt}$, $D(A) = \{x \in W_2^1[0, 1], x(0) = x(1)\}$. Возмутим оператор A оператором B вида

$$Bx(t) = v(t)x(\omega - t), \quad t \in [0, \omega], x \in L_2[0, \omega], \tag{8}$$

где $v \in L_2[0, \omega]$. Таким образом, возмущение есть оператор с инволюцией. Напомним, что некоторый оператор $C \in \text{End } L_2[0, \omega]$ называется инволюцией, если $C^2 = I$. В рассматриваемом случае $(Cx)(t) = x(\omega - t)$, $t \in [0, \omega]$, $x \in L_2[0, \omega]$.

Отметим, что в общем случае возмущение B не принадлежит пространству $\mathfrak{S}_2(L_2[0, \omega])$, но лежит в $\mathfrak{U}_A(L_2[0, \omega])$. Непосредственный подсчет показывает, что $B_{ij} = \widehat{v}(i + j)$. Здесь через $\widehat{x}(n)$ обозначены коэффициенты Фурье функции $x \in L_2[0, \omega]$, имеющей ряд Фурье $x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{x}(n)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}$, и

$$\widehat{x}(n) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(t)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t} dt = (x, e_n), n \in \mathbb{Z}. \text{ Очевидно также, что } P_n x = (x, e_n)e_n = \widehat{x}(n)e_n, n \in \mathbb{Z}.$$

Матрицы M и N состоят из элементов

$$M_{ij} = \begin{cases} \widehat{v}(2i), & i = j; \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \quad N_{lj} = \begin{cases} \frac{\omega \widehat{v}(l+j)}{2\pi(l-j)}, & l \neq j; \\ 0, & l = j. \end{cases}$$

Отсюда немедленно следует выполнение условия $N, M \in \mathfrak{S}_2(H)$ (выполнение условий (2), (3)). Матрица BN состоит из элементов $(BN)_{lj} = \frac{\omega}{2\pi} \sum_{k \neq j} \frac{\widehat{v}(l+k)\widehat{v}(j+k)}{j-k}$. Принадлежность оператора BN идеалу $\mathfrak{S}_2(H)$ (или выполнения условия (4)) следует из интегрального представления этого оператора (см., например, [7]):

$$(BNx)(t) = \frac{1}{2\omega} \int_0^{2\omega} f\left(\frac{t-\tau}{2}\right) v\left(\frac{2\omega-t-\tau}{2}\right) v(t)x(t) dt,$$

$$f(t) = i\left(t - \frac{\omega}{2}\right), t \in [0, \omega].$$

Проверку условия (5) также можно найти [1, 7].

Таким образом, для исследуемого оператора с инволюцией $A - B$ из теорем 2 и 4 вытекает

Теорема 7. Для достаточно больших $k \geq 0$ дифференциальный оператор $\mathcal{L} = A - B : D(\mathcal{L}) \subset L_2[0, \omega] \rightarrow L_2[0, \omega]$, заданный формулами $(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx}{dt} - v(t)x(\omega - t)$, $D(\mathcal{L}) = \{x \in W_2^1 : x(0) = x(\omega)\}$, подобен оператору

$$A - V = A - P_{(k)}VP_{(k)} - \sum_{|i|>k} P_iVP_i,$$

где $V \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, \omega])$ – решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов. Для собственных значений $\tilde{\lambda}_j, |j| > k$, оператора \mathcal{L} имеют место асимптотические формулы

$$\tilde{\lambda}_j = i\frac{2\pi j}{\omega} - \widehat{v}(2j) - \frac{\omega}{2\pi j} \sum_{l \neq j} \frac{(\widehat{v}(j+l))^2}{l-j} + c_n,$$

где $(c_n) \in \ell_1$.

Пример 4. В этом примере будет показано, что оператор Дирака из [1, 6] также укладывается в приведенную в [2] схему.

Пусть теперь $\Omega = [0, \omega]^2 = [0, \omega] \times [0, \omega]$ и невозмущенный оператор $A : D(A) \subset L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ задается формулой

$$(Ax)(t) = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt},$$

где $t \in [0, \omega], x = (x_1, x_2) \in L_2(\Omega)$ и $D(A) = \{x \in L_2(\Omega) : x(0) = x(\omega)\}$. Отметим, что обычно, наряду с периодическими краевыми условиями, также рассматривают антипериодические краевые условия и условия Дирихле (см. [1, 6]). Так как все рассуждения для антипериодических условий и условий Дирихле аналогичны соответствующим для периодических краевых условий (опять же, см. [1, 6]), то мы ограничимся только рассмотрением периодических краевых условий.

Собственными значениями оператора A являются числа $\lambda_n = \frac{2\pi n}{\omega}$, $n \in \mathbb{Z}$. Они двукратны, и собственными векторами являются функции

$$e_n^1 = \begin{pmatrix} e^{-n} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_n^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e_n \end{pmatrix}, \quad e_n(t) = e^{i\lambda_n t}, t \in [0, \omega].$$

Спектральные проекторы $P_n = P(\{\lambda_n\}, A)$ задаются формулами $P_n x = (x, e_n)e_n^1 + (x, e_{-n})e_n^2$, $n \in \mathbb{Z}$, $\dim \text{Im } P_n = 2$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Возмутим оператор A оператором $B \in \mathfrak{L}_A(L_2[0, \omega])$ вида

$$(Bx)(t) = \begin{pmatrix} 0 & v_1(t) \\ v_2(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad v_1, v_2 \in L_2[0, \omega].$$

Блочная матрица оператора-возмущения B имеет вид

$$b_{nj} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{v}_1(-(n+j)) \\ \widehat{v}_2(n+j) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\widehat{v}_1(n), \widehat{v}_2(n)$ – коэффициенты Фурье функций v_1 и v_2 в стандартном базисе $e_n(t) = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}$ пространства $L_2[0, \omega]$.

Операторы, имеющие матрицы N и M , участвующие в предварительном преобразовании подобия в [1, 7], приведены в интегральном виде:

$$(Mx)(s) = \frac{1}{2\omega} \int_0^{2\omega} \begin{pmatrix} 0 & v_1(\frac{s+\tau}{2}) \\ v_1(\frac{s-\tau}{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

$$(Nx)(s) = \frac{1}{2\omega} \int_0^{2\omega} \begin{pmatrix} 0 & f(\frac{s-\tau}{2})v_1(\frac{s+\tau}{2}) \\ f(\frac{s-\tau}{2})v_1(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

где $(x_1, x_2) \in L_2[\Omega]$, $s \in (0, \omega)$, $f(t) = i(t - \frac{\omega}{2})$, $t \in [0, \omega]$, поэтому условия (2) – (5) автоматически выполняются, там же в [1] доказано выполнение условия (5).

Интегральный вид оператора BN следующий (см. [1, формула (38)])

$$(BNx)(s) = \frac{1}{2\omega} \int_0^{2\omega} \begin{pmatrix} f(\frac{\tau-s}{2})v_1(s)v_2(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \\ 0 & f(\frac{s-\tau}{2})v_2(s)v_1(\frac{s+\tau}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

следовательно, $BN \in \mathfrak{S}_2(H)$. Нас в оценках собственных значений будут интересовать только диагональные блоки матрицы BN . Легко проверить, что

$$(BN)_{nn} = \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\omega}{2\pi(j-n)} \begin{pmatrix} 0 & \widehat{v}_1(-(n+j)) \\ \widehat{v}_2(n+j) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \widehat{v}_1(-(n+j)) \\ \widehat{v}_2(n+j) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} \begin{pmatrix} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-(n+j))\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} & 0 \\ 0 & \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-(n+j))\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} \end{pmatrix}.$$

Важным для оценок собственных значений является то, что блок $(BN)_{nn}$ является диагональным и на главной диагонали у него стоят одинаковые элементы.

Приведем без доказательства лемму 7.5 из [1], которая потребуется нам в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть

$$z_n = \begin{pmatrix} 0 & b_n^2 \\ b_n^3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_n^1 & c_n^2 \\ c_n^3 & c_n^4 \end{pmatrix},$$

где последовательности $b^k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 2, 3$, принадлежат $\ell_2(\mathbb{Z})$, а последовательности $c^k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, 4$, принадлежат $\ell_1(\mathbb{Z})$. Тогда

$$\sigma(z_n) = \{ \sqrt{b_n^2 b_n^3 + d_n^1}, -\sqrt{b_n^2 b_n^3 + d_n^1} \},$$

где последовательности $d^k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, принадлежат $\ell_{4/3}(\mathbb{Z})$. Более того, если существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1 b_n^2 \leq b_n^3 \leq c_2 b_n^2$, для всех $n \in \mathbb{Z}$ достаточно больших по абсолютной величине, то последовательности $d^k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, принадлежат $\ell_1(\mathbb{Z})$.

Итак, нам надо вычислить собственные значения матрицы 2×2 вида

$$\begin{pmatrix} \frac{2\pi n}{\omega} - \frac{\omega}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-(n+j))\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} & 0 \\ 0 & \frac{2\pi n}{\omega} - \frac{\omega}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-(n+j))\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \widehat{v}_1(-2n) \\ \widehat{v}_2(2n) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_n^1 & c_n^2 \\ c_n^3 & c_n^4 \end{pmatrix},$$

где последовательности $c^k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, k = 1, 2, 3, 4$, принадлежат $\ell_1(\mathbb{Z})$.

Определение 1. Потенциал $V = \begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ v_2 & 0 \end{pmatrix}$ называется сбалансированным, если существуют $c_1, c_2 > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что

$$c_1|\widehat{v}_1(-2n)| \leq |\widehat{v}_2(2n)| \leq c_2|\widehat{v}_1(-2n)|$$

для $n \in \mathbb{Z}$ таких, что $|n| \geq N$.

Из теоремы 2 и леммы 1 получается

Теорема 8. Для достаточно больших целых k спектр оператора Дирака $A - B$ представим в виде объединения

$$\sigma(A - B) = \tilde{\sigma}_{(k)} \cup \left(\bigcup_{|n| > k} \tilde{\sigma}_{(n)} \right),$$

где множество $\tilde{\sigma}_{(k)}$ имеет не более $4k + 2$ собственных значений, множества $\tilde{\sigma}_{(n)}, |n| > k$, двухточечны

$$\tilde{\sigma}_n = \left\{ \frac{2\pi n}{\omega} - \frac{\omega}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-n-j)\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} + \sqrt{\widehat{v}_1(-2n)\widehat{v}_2(2n)} + d_n^1, \right. \\ \left. \frac{2\pi n}{\omega} - \frac{\omega}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-n-j)\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} - \sqrt{\widehat{v}_1(-2n)\widehat{v}_2(2n)} + d_n^2 \right\},$$

и последовательности $d^k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, k = 1, 2$, принадлежат $\ell_{4/3}(\mathbb{Z})$. Если же потенциал V является сбалансированным, то последовательности $d^k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, k = 1, 2$, принадлежат $\ell_1(\mathbb{Z})$.

Замечание. В рассматриваемом случае можно было использовать формулу (7) для взвешенных средних $\widehat{\lambda}_n$ собственных значений, входящих в спектральные множества $\tilde{\sigma}_n, |n| > k$, но получается более грубый результат.

Список литературы

1. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. 2011. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом. Известия РАН. Серия математическая, 75(3): 3–28.
2. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2020. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Прикладная математика & Физика, 52(2): 71–85.
3. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2020. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры I. Прикладная математика & Физика, 52(3): 185–194.
4. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2021. О спектральных свойствах оператора Дирака на прямой. Дифференциальные уравнения, 57(2): 153–161.
5. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. 2011. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией. Журнал вычислительной математики и математической физики, 51(12): 2233–2246.
6. Джаков П. Б., Митягин Б. С. 2006. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака. Успехи математических наук, 61(4(370)): 77–182.
7. Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2019. Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов. Сибирские электронные математические известия, 16: 1091–1132.
8. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. Closed operator functional calculus in Banach modules and applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 492(2): 124473.

9. Kopzhassarova A. A., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M. 2012. Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 590781.

References

1. Baskakov A. G., Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. 2011. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. *Izvestiya: Mathematics*, 75 (3): 445–469.
2. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. *Applied Mathematics & Physics*, 52 (2): 71–85 (in Russian).
3. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. Examples I. *Applied Mathematics & Physics*, 52 (3): 185–194 (in Russian).
4. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2021. On spectral properties of the Dirac operator on a real line. *Differential Equations*, 57 (2): 153–161.
5. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. 2011. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 51 (12): 2102–2114.
6. Djakov P. B., Mityagin B. S. 2006. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators. *Russian Mathematical Surveys*, 61 (4): 663–766.
7. Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Spectral properties of first-order differential operators with an involution and groups of operators. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 16: 1091–1132 (in Russian).
8. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. Closed operator functional calculus in Banach modules and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 492 (2): 124473.
9. Kopzhassarova A. A., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M. 2012. Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 590781.


Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 09.07.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Баскаков Анатолий Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова

 <http://orcid.org/0000-0003-4616-840X>

ул. Ватутина, 44-46, г. Владикавказ, 362025, Северная Осетия-Алания, Россия

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валериевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Воронежского государственного педагогического университета

 <http://orcid.org/0000-0002-5220-5775>

ул. Ленина 86, г. Воронеж, 394043, Россия

E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Криштал Илья Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор Университета Северного Иллинойса

 <http://orcid.org/000-0001-7171-2177>

WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL, 60115, USA

E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Воронежского государственного технического университета

 <http://orcid.org/000-0002-9212-8786>

ул. 20 лет Октября, 84, Воронеж, 394006, Россия

E-mail: nat-uskova@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoly G. Baskakov – Doctor of Sciences Phys. Math., Professor, Leading Researcher of the North Ossetian State University named after K. L. Khetagurova, Vladikavkaz, North Ossetia-Alania, Russia

Galina V. Garkavenko – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

Ilya A. Krishtal – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor at the University of Northern, DeKalb, IL, USA

Natalia B. Uskova – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia